This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

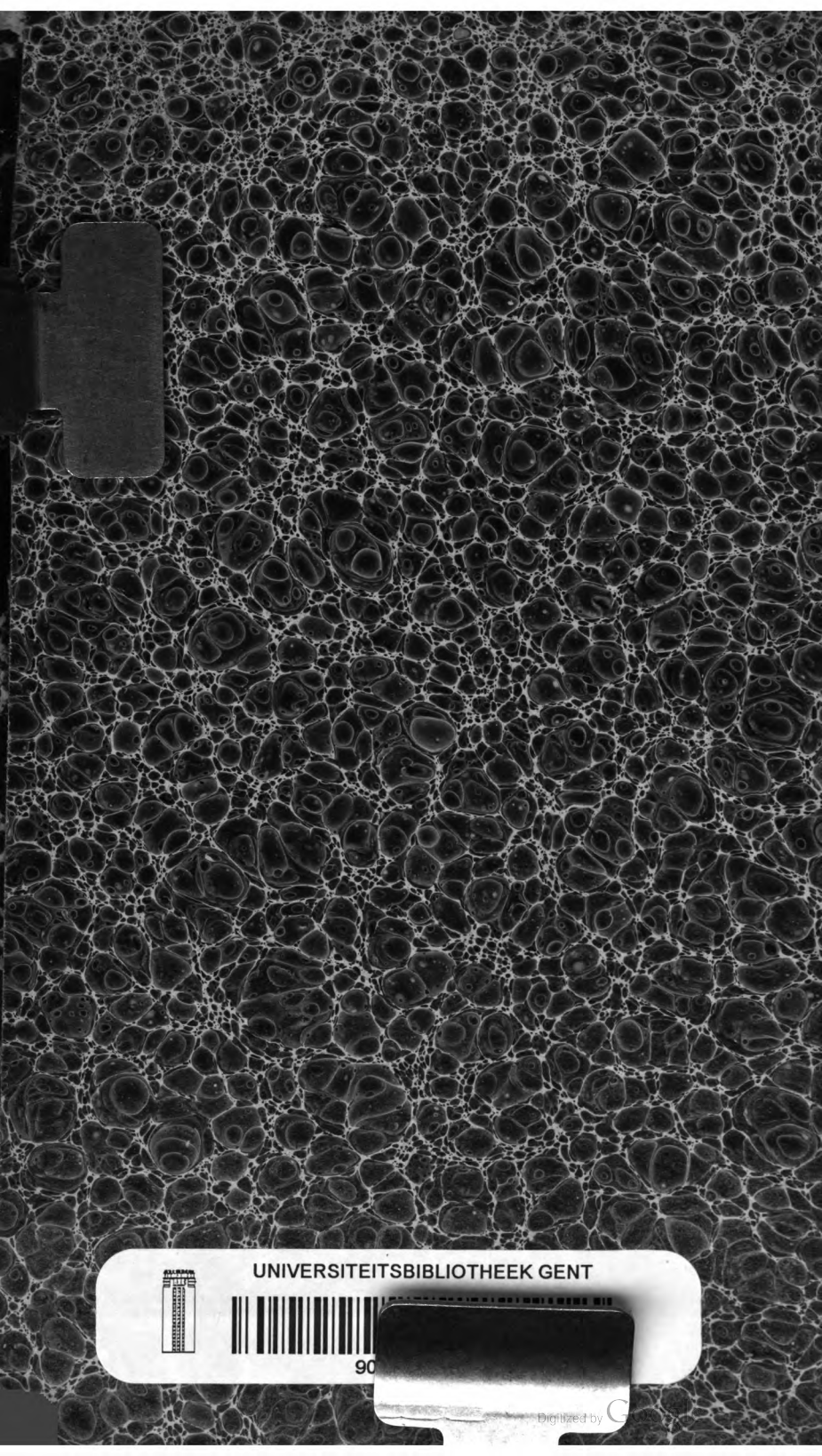
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

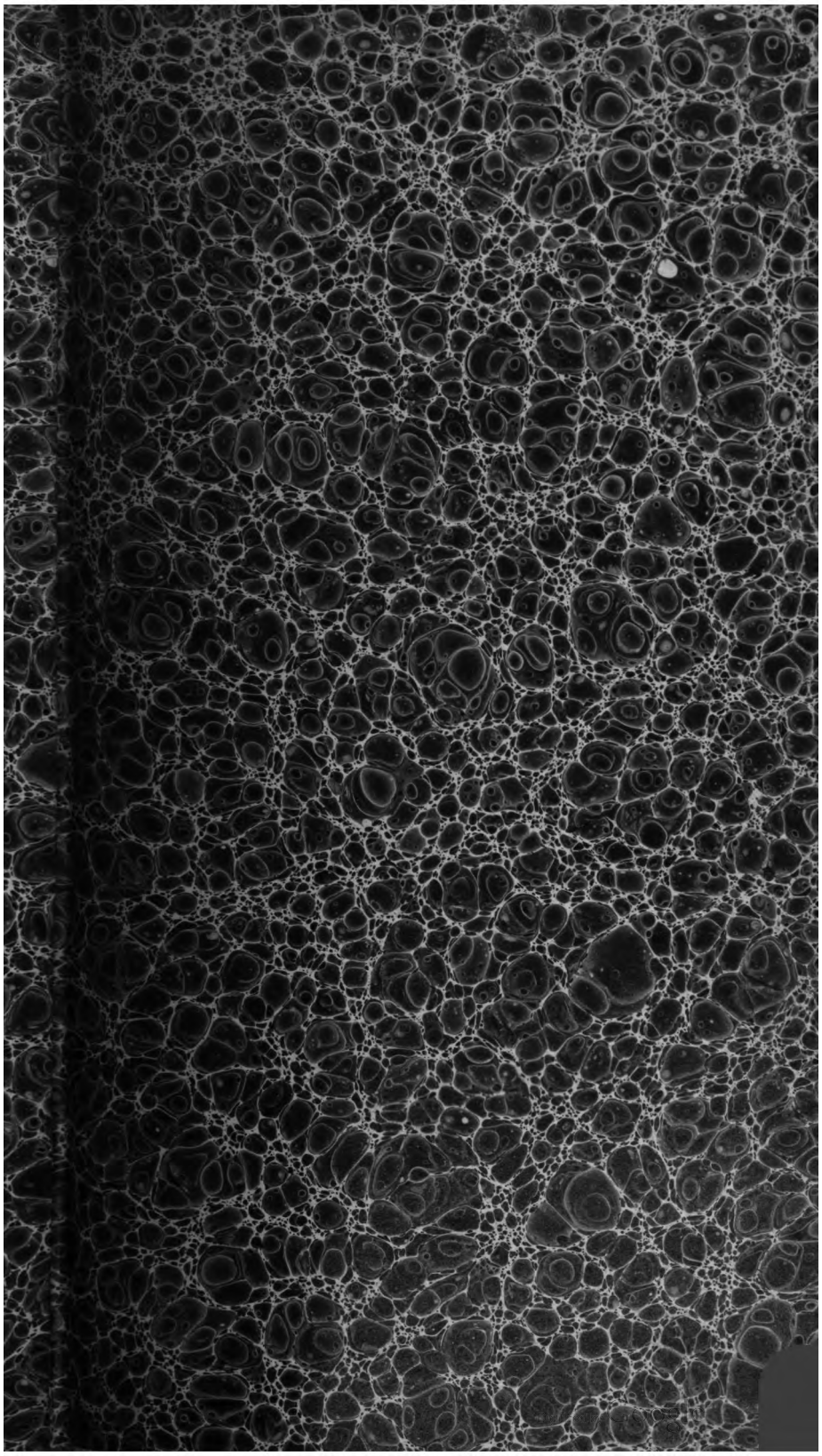
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google


UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



Phys. 173 l

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Physik

mit

vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung

von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königl. Schwed. Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserl. Oesterreich. Akademie der Wissenschaften zu Wien, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Zweiter Theil.

Mit eilf Figurentafeln.

Leipzig, 1850.

Bei E. B. Schwickert.

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Mathematik und Physik

für

staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten
und Kameralisten überhaupt

von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königl. Schwed. Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserl. Oesterreich. Akademie der Wissenschaften zu Wien, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

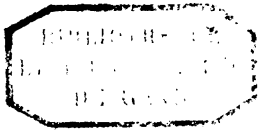
Dritter Theil. Zweite Abtheilung.

Physik. Zweite Abtheilung.

Mit eilf Figurentafeln.

Leipzig, 1850.
Bei E. B. Schwickert.

Digitized by Google



Digitized by Google

Vorrede.

Ich habe in dieser zweiten Abtheilung meines „Lehrbuchs der Physik mit vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung" die Lehre vom Lichte so weit zu entwickeln gesucht, als dies überhaupt ohne zu große Weitläufigkeit mit Hülfe bloßer mathematischer Elementarsätze möglich sein dürfte, und habe dabei, — der Tendenz des ganzen Werks, von welchem dieses Lehrbuch der Physik ein Theil ist, gemäß, — zugleich die Theile dieser wichtigen Lehre besonders hervorzuheben gesucht, welche praktischer Anwendung fähig sind. Wer aber die feinere Theorie der optischen Werkzeuge kennen lernen will, und die Anwendung der höheren Mathematik nicht scheuet, den darf ich wohl auf meine Optischen Untersuchungen. Thl. I. Leipzig. 1846. (Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope). Thl. II. Leipzig. 1847. (Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre) verweisen, von denen der dritte Theil, welcher die Theorie der achromatischen Doppeloculare enthält, nächstens erscheinen wird. Bei der physikalischen Theorie des Lichts war es weniger meine Absicht, alle Erscheinungen aus der Undulationstheorie zu

Digitized by Google

erklären, als vielmehr dies nur bei einigen besonders wichtigen Erscheinungen aus dem ungemein großen Kreise derselben zu versuchen, und in möglichst streng mathematischer Weise zu thun, so weit es die hier vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse zuließen; auf Vollständigkeit in dieser Beziehung, welche auch dem Zwecke des ganzen Werks wenig entsprochen haben würde, kann dasselbe daher keinen Anspruch machen, und ich habe meinen Zweck erreicht, wenn Anfänger durch die in diesem Werke, das ich schließlich der wohlwollenden Aufnahme und, mit Rücksicht auf die Schwierigkeit seiner Bearbeitung, nachsichtigen Beurtheilung recht sehr empfehle, gegebene kurze Darstellung der Undulationstheorie veranlaßt werden, dieselbe aus den Quellen weiter zu studiren, was aber ohne eine sehr vollständige Kenntniß der höheren Analysis und analytischen Mechanik nicht möglich ist.

Greifswald, im December 1849.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Erstes Kapitel. Allgemeine Begriffe 3

Zweites Kapitel. Die ersten Gründe der Photometrie . . 36

Drittes Kapitel. Von der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts im Allgemeinen 46

Viertes Kapitel. Von den ebenen Spiegeln 52

Fünftes Kapitel. Von einigen auf der Anwendung ebener Spiegel beruhenden Instrumenten 64

Sechstes Kapitel. Von den sphärischen Spiegeln 94

Siebentes Kapitel. Von den Kegelspiegeln und den Cylinderspiegeln 121

Achtes Kapitel. Von der Brechung oder Refraction des Lichts im Allgemeinen 125

Neuntes Kapitel. Von der mit jeder Brechung verbundenen Farbenzerstreuung oder Dispersion des Lichts 169

Zehntes Kapitel. Von der Brechung bei einer Kugelfläche 181

Eilftes Kapitel. Von den Linsen im Allgemeinen . . . 203

Zwölftes Kapitel. Von den Linsensystemen 240

Dreizehntes Kapitel. Von den achromatischen Linsen . . 275

Vierzehntes Kapitel. Von den aplanatischen Linsen . . 284

Funfzehntes Kapitel. Von den dialytischen Linsen . . . 309

Sechszehntes Kapitel. Von dem Auge und dem Sehen, den Brillen und der Loupe oder dem einfachen Mikroskope 319

Siebzehntes Kapitel. Von dem astronomischen oder Kepler'schen Fernrohre 341

Achtzehntes Kapitel. Von dem Galilei'schen Fernrohre . 380

Digitized by Google

Seite

Neunzehntes Kapitel. Von dem terreſtriſchen oder Rheita'ſchen Fernrohre 386

Zwanzigſtes Kapitel. Von dem zuſammengeſetzten Mikroſkope 388

Einundzwanzigſtes Kapitel. Von den Spiegel-Teleſkopen 393

Zweiundzwanzigſtes Kapitel. Von noch einigen hauptſächlich auf der Anwendung von Linſengläſern beruhenden Inſtrumenten 398

Dreiundzwanzigſtes Kapitel. Von den Erſcheinungen der Interferenz des Lichts 407

Vierundzwanzigſtes Kapitel. Von den Erſcheinungen der Beugung des Lichts 421

Fünfundzwanzigſtes Kapitel. Von den Erſcheinungen der Polariſation des Lichts 434

Sechsundzwanzigſtes Kapitel. Von der doppelten Strahlenbrechung 444

Siebenundzwanzigſtes Kapitel. Anſichten über die Natur des Lichts 449

Druckfehler.

S. 9 Z. 6 v. u. ſtatt t_1 — — ſetze man t_1 — t —

Digitized by Google

Physik.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre vom Lichte.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe.

§. 1.

Das die Verbindung der Gegenstände außer uns mit unserm Gesichtssinne oder dem Auge, oder die Anschauung der Gegenstände außer uns mit dem Gesichtssinne oder dem Auge vermittelnde Agens, durch welches uns also die uns umgebenden Gegenstände sichtbar gemacht werden oder überhaupt die Möglichkeit des Sehens bedingt wird, nennen wir Licht; wo aber kein Licht ist, die uns umgebenden Gegenstände also uns unsichtbar sind, überhaupt das Sehen unmöglich ist, herrscht Finsterniß. Die gesammte Lehre vom Lichte wird die Optik genannt.

Ohne uns jetzt schon auf Erörterungen über die Natur des Lichts in irgend einer Beziehung einzulassen, und dieselben späteren Untersuchungen vorbehaltend, so bieten die gemeinsten Erfahrungen doch auf der Stelle die Bemerkung dar, daß gewisse Körper, wie z. B. die Sonne, die Flamme, der elektrische Funken, verschiedene phosphorescirende Körper, u. s. w., vorzugsweise Licht zu verbreiten und dadurch die Möglichkeit des Sehens zu vermitteln geeignet sind. Solche Körper heißen leuchtende Körper, im Gegensatz zu den dunkeln Körpern, welche die so eben erwähnte Eigenschaft nicht haben, in Abwesenheit jedes leuchtenden Körpers uns also völlig unsichtbar sind, und nur dann dem Auge sich darstellen oder gesehen werden, wenn sie, wie man zu sagen pflegt, von einem leuchtenden Körper erleuchtet werden, ein Ausdruck, dessen eigentliche Bedeutung jedoch nur erst im weitern Fortgange der Darstellung der Lehre vom Lichte wird zu völliger Deutlichkeit gebracht werden können, und jetzt nur deshalb hier vorläufig erwähnt werden mußte, weil wir uns seines Gebrauchs schon bei unsern nächsten Untersuchungen nicht ganz werden entschlagen können.

Wenn wir die, einen leuchtenden oder erleuchteten Punkt mit unserm Auge verbindende gerade Linie durch einen in dieselbe gebrachten dunkeln Körper unterbrechen, so können erfahrungsmäßig zwei Fälle eintreten, indem nämlich der erleuchtende

Digitized by Google

oder erleuchtete Punkt entweder dessenungeachtet uns noch sichtbar bleibt, der in Rede stehende dunkle Körper also nothwendig dem Lichte einen freien Durchgang durch sich gestatten muß, oder keinen Eindruck mehr auf das Auge hervorbringt, also uns unsichtbar wird, und der in Rede stehende dunkle Körper daher dem Lichte keinen freien Durchgang durch sich gestatten kann, sondern der freien Verbreitung desselben hindernd entgegen treten muß. Aus dieser höchst einfachen Erfahrung, die Jeder alle Augenblicke zu machen im Stande ist, ergeben sich die beiden folgenden für die ganze Lehre vom Lichte sehr wichtigen Folgerungen:

Erstens. Es giebt zwei Arten dunkler Körper, von denen die einen, nämlich die durchsichtigen Körper, die Fortpflanzung des Lichts nicht hemmen und demselben einen freien Durchgang durch sich gestatten, wenn auch allerdings in gewissen Fällen eine Schwächung des Lichteindrucks auf das Auge durch dieselben bewirkt werden kann, die andern dagegen, nämlich die undurchsichtigen Körper, der freien Verbreitung des Lichts hindernd entgegen treten und demselben keinen freien Durchgang durch sich gestatten.

Zweitens. Die Fortpflanzung oder Verbreitung des Lichts, so lange dieselbe wenigstens, was im Folgenden, wenn nicht etwas Anderes besonders bemerkt wird, immer stillschweigend vorausgesetzt werden soll, in demselben durchsichtigen Körper oder sogenannten durchsichtigen Mittel oder Medium vor sich geht, folgt immer nur geraden Linien, welche Lichtstrahlen genannt werden, wobei zugleich auch noch das gleichfalls aus den alltäglichsten Erfahrungen zu ziehende Resultat hervorgehoben werden mag, daß sowohl von leuchtenden als auch erleuchteten Punkten jederzeit Lichtstrahlen nach allen Richtungen im Raume ausgehen, wenn nur, wie sich nach dem Vorhergehenden von selbst versteht, die Verbreitung des Lichts nicht durch undurchsichtige Körper gehindert wird. Die geradlinige Fortpflanzung des Lichts zeigt sich auch auf das Deutlichste, wenn man durch ein möglichst kleines Loch in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers in das letztere Sonnenlicht treten läßt, indem dann immer der durch die stetige Folge der erleuchteten, in der das Zimmer erfüllenden Luft schwimmenden Staubtheilchen bezeichnete Weg des eintretenden Lichts als eine gerade Linie sich darstellt.

§. 2.

Wenn von einem leuchtenden Punkte ein dunkler Körper erleuchtet wird, so giebt es offenbar immer einen gewissen Raum, in welchen von dem leuchtenden Punkte gar kein Licht gelangen kann, und in dem also, insofern wir nämlich, wie sich von selbst versteht, von allen andern leuchtenden Punkten für jetzt ganz abstrahiren, völlige Finsterniß herrscht. Dieser Raum, welcher, wie auf der Stelle erhellet, immer auf der von dem leuchtenden

Digitized by Google

Punkte abgewandten Seite des dunkeln Körpers liegt, heißt der Schatten des letzteren, und muß in jedem besonderen Falle durch geometrische Hülfsmittel näher bestimmt werden. Der Durchschnitt des Schattens mit einer beliebigen Ebene oder Fläche überhaupt kann zweckmäßig die Schattenprojection auf dieser Fläche genannt werden, und ist ebenfalls in jedem einzelnen Falle durch geometrische Hülfsmittel zu bestimmen. Wenn z. B. der dunkle Körper eine Kugel ist, so lege man durch deren Mittelpunkt und den leuchtenden Punkt eine beliebige Ebene, ziehe in derselben an ihren kreisförmigen Durchschnitt mit der Kugel von dem leuchtenden Punkte auf bekannte Weise zwei berührende Linien, und drehe nun die Ebene um die durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugel gehende gerade Linie herum, so ist der in Bezug auf den als vor der Kugel liegend betrachteten leuchtenden Punkt hinter der Kugel liegende kegelförmige Raum, welcher von der bei der erwähnten Drehung von den beiden Berührenden beschriebenen Kegelfläche theilweise begränzt wird, der Schatten der Kugel, und die Schattenprojection auf jeder beliebigen Ebene ist nach bekannten geometrischen Sätzen ein Kegelschnitt, d. h. unter gewissen Bedingungen eine Parabel, ein Kreis oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel.

Wenn nicht bloß von einem leuchtenden Punkte, sondern von einem leuchtenden Körper von merklicher Ausdehnung ein dunkler Körper erleuchtet wird, so pflegt man zwei Schattenräume von einander zu unterscheiden, von denen der eine, in welchen gar kein Licht gelangen kann, der Kernschatten, der andere, in den nur wenig Licht fallen kann, der Halbschatten genannt wird. Um diese beiden Begriffe, von denen freilich der letztere an einiger Unbestimmtheit leidet, etwas näher zu erläutern, wählen wir den bekannten bei der Sonne und Erde, oder der Sonne und dem Monde sich darbietenden Fall, wenn die beiden Körper Kugeln sind, von denen die leuchtende mit einem größern Halbmesser als die erleuchtete beschrieben ist. In diesem Falle denke man sich durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln eine Ebene gelegt, welche in Fig. 1. die Ebene des Papiers sein mag, und ziehe an die beiden Kreise, in denen von dieser Ebene die beiden Kugeln geschnitten werden, vier Tangenten, zwei äußere und zwei innere, wie die Figur zeigt. Dreht man dieselbe dann um die durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln gehende gerade Linie herum, so ist der hinter der kleinern Kugel liegende kegelförmige Raum, welcher von der von den beiden äußern Tangenten beschriebenen Kegelfläche begränzt wird, der Kernschatten, der zwischen dieser Kegelfläche und der von den beiden innern Tangenten beschriebenen Kegelfläche hinter der kleineren Kugel liegende Raum dagegen der Halbschatten.

Bezeichnet man den Halbmesser der größern (leuchtenden) Kugel durch R, den Halbmesser der kleinern (erleuchteten) Kugel durch r, so ist nach bekannten geometrischen Sätzen

Digitized by Google

$$R : r = AC : BC = AC : AC - AB = AB + BC : BC$$

und

$$R : r = AD : BD = AD : AB - AD = AB - BD : BD.$$

Bestimmt man aus diesen Proportionen AC, BC und AD, BD; so erhält man

$$AC = \frac{R}{R-r} \cdot AB,\ BC = \frac{r}{R-r} \cdot AB$$

und

$$AD = \frac{R}{R+r} \cdot AB,\ BD = \frac{r}{R+r} \cdot AB;$$

mittelst welcher Formeln man aus den Halbmessern der beiden Kugeln und der Entfernung der Mittelpunkte derselben von einander die Lage der Punkte C und D jederzeit leicht bestimmen kann.

§. 3.

Schon sehr früh ist die Frage nach der Geschwindigkeit der geradlinigen Fortpflanzung oder Verbreitung des Lichts, oder des Lichts überhaupt, gestellt worden. Alle auf der Erde sich darbietenden Entfernungen waren aber im Verhältniß zu der ungeheuern Größe dieser Geschwindigkeit zu klein, als daß sich aus mit Zugrundelegung solcher Entfernungen angestellten Versuchen eine nur einigermaßen genügende Bestimmung derselben hätte ableiten lassen. Vielmehr ergab sich aus allen derartigen Versuchen die geradlinige Fortpflanzung des Lichts als eine augenblickliche, d. h. ohne Zeitverlust vor sich gehende Bewegung, und wurde auch von den meisten ältern Physikern und Astronomen, z. B. von Descartes*), für eine solche gehalten. Aber im Jahre 1676 gelang es dem Scharfsinne des berühmten in Paris lebenden dänischen Astronomen Olaf Römer, eine sichere Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts aus gewissen astronomischen Beobachtungen herzuleiten, eine Entdeckung, durch welche derselbe seinen Namen in der Geschichte der Physik und Astronomie unsterblich gemacht hat. Hier läßt sich über diesen eine größere Anzahl astronomischer Kenntnisse voraussetzenden Gegenstand in der Kürze nur Folgendes beibringen.

Der Planet Jupiter, dessen Bahn um die Sonne die Erdbahn einschließt, wird von vier Trabanten, Monden oder Sa-

*) In seiner Dioptrik (Renati Descartes Specimina Philosophiae, seu Dissertatio de methodo recte regendae rationis, et veritatis in scientiis investigandae, Dioptrice et Meteora. Ex Gallico translata, et ab Auctore perlecta, variisque in locis emendata. Ultima Editio. Amstelodami. 1677. 4°. pag. 51. Dioptrices Cap. I. §. III.) sagt Descartes: „Statimque ex hoc mirari desinemus, lumen illud a summo Sole, *nulla mora interposita*, radios suos in nos effundere," und die Ueberschrift von §. III. lautet: „Quomodo radii ejus *in instanti* ad nos a Sole perveniant."

Digitized by Google

telliten umkreiſet, welche man nach der Ordnung ihrer wachſenden Entfernungen von dem Jupiter den erſten, zweiten, dritten und vierten Jupitersſtrabanten nennt. Eben ſo wie der Mond der Erde von dieſer, erleiden auch die Jupitersſtrabanten von dem Jupiter Verfinſterungen, und die Eintritte und Austritte der Trabanten in und aus des Jupiters Schatten laſſen ſich von der Erde aus beobachten.

Nehmen wir nun, was freilich nur näherungsweiſe verſtattet iſt, die Bahnen des Jupiters und der Erde als in eine Ebene fallende um die Sonne als Mittelpunkt beſchriebene concentriſche Kreiſe an, und bezeichnen die beobachteten Zeiten zweier einander benachbarter Eintritte (oder Austritte) eines und deſſelben, etwa des erſten Trabanten des Jupiters in den Schatten des letzteren durch T und T_1, ſo daß T dem früher, T_1 dem ſpäter beobachteten Eintritte (oder Austritte) entſpricht, die entſprechenden Entfernungen des Jupiters von der Erde aber durch E und E_1, endlich die Zeit, welche das Licht gebraucht, um die zum Grunde gelegte Längeneinheit zu durchlaufen, durch $\mathfrak{T}$; ſo ſind die wahren Zeiten der beiden Eintritte (oder Austritte) offenbar reſpective

$$T - \mathfrak{T}E \text{ und } T_1 - \mathfrak{T}E_1,$$

und die wahre Zwiſchenzeit zwiſchen den beiden Eintritten (oder Austritten), d. h. die wahre Umlaufszeit des beobachteten Trabanten um den Jupiter, iſt folglich

$$T_1 - \mathfrak{T}E_1 - (T - \mathfrak{T}E) = T_1 - T - \mathfrak{T}(E_1 - E).$$

Um die Zeit der Oppoſition des Jupiters, d. h. wenn nahe die Sonne, die Erde und der Jupiter in dieſer Folge in gerader Linie ſtehen, geben die Beobachtungen

$$T_1 - T = 42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.}$$

Um die Zeit, wenn die Bewegung der Erde gerade nach dem Jupiter hin gerichtet iſt, und letzterer alſo ſtationär erſcheint, geben die Beobachtungen

$$T_1 - T = 42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.} - 14^{sec.}.$$

Um die Zeit endlich, wenn die Bewegung der Erde gerade abwärts von dem Jupiter gerichtet iſt, und letzterer alſo wieder ſtationär erſcheint, geben die Beobachtungen

$$T_1 - T = 42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.} + 14^{sec.}.$$

Im erſten Falle, wo ſich die Entfernung des Jupiters von der Erde nur ſehr langſam ändert, iſt offenbar nahe $E = E_1$, alſo nahe $E_1 - E = 0$, und folglich nahe

$$T_1 - T - \mathfrak{T}(E_1 - E) = T_1 - T = 42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.},$$

d. h. die wahre Umlaufszeit des beobachteten Jupitersſtrabanten um ſeinen Hauptplaneten iſt ſehr nahe

$$42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.}.$$

Alſo iſt im zweiten Falle wenigſtens ſehr nahe:

Digitized by Google

$$42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.} - 14^{sec.} - \mathfrak{T}(E_1 - E) = 42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.},$$

d. i.

$$\mathfrak{T}(E - E_1) = 14^{sec.};$$

und im dritten Falle, ebenfalls wenigstens sehr nahe:

$$42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.} + 14^{sec.} - \mathfrak{T}(E_1 - E) = 42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.},$$

d. i.

$$\mathfrak{T}(E_1 - E) = 14^{sec.}.$$

Bezeichnen wir nun aber die Geschwindigkeit des Lichts, d. h. den von demselben in einer Secunde zurückgelegten Weg, durch G; so ist offenbar

$$\mathfrak{T} : 1 = 1 : G,$$

also $\mathfrak{T}G = 1$, und folglich nach dem Vorhergehenden im zweiten und dritten Falle respective

$$G = \frac{E - E_1}{14} \text{ und } G = \frac{E_1 - E}{14}.$$

Im zweiten und dritten Falle, wo sich die Erde respective dem Jupiter nähert und von demselben entfernt, also respective $E > E_1$ und $E < E_1$ ist, ist aber offenbar respective $E - E_1$ und $E_1 - E$ der von der Erde während eines Umlaufs des beobachteten Trabanten, d. h. nach dem Vorhergehenden in $42^{st.}\ 28^{min.}\ 42^{sec.}$ oder nahe 42,5 Stunden in ihrer Bahn zurückgelegte Weg, welcher in runder Zahl 588000 Meilen beträgt. Also ist

$$G = \frac{588000}{14} \text{ Meilen} = 42000 \text{ Meilen},$$

d. h. das Licht legt in einer Secunde 42000 Meilen zurück, eine Geschwindigkeit, deren Größe in der That alle Begriffe übersteigt.

Um von der Sonne zur Erde zu gelangen, braucht das Licht $8^{min.}\ 13^{sec.}$. Für die nächsten Fixsterne, wenn man deren Entfernung von der Erde 200000mal größer als die Entfernung der Sonne von der Erde annimmt, beträgt dieselbe Größe 3 Jahre und 45 Tage. Ohne Zweifel giebt es aber Fixsterne, die so weit von uns entfernt sind, daß Jahrhunderte vergehen, bevor ihr Licht auf der Erde anlangt, und es könnten also alle unendlich von uns entfernten Sterne mit einem Male vernichtet werden, wir aber dessenungeachtet noch viele Jahre den prachtvollen Anblick des gestirnten Himmels genießen.

Man kann die Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts aus den Beobachtungen der Finsternisse der Jupitertrabanten aber auch noch aus dem folgenden, von dem vorhergehenden etwas verschiedenen Gesichtspunkte betrachten. Es seien jetzt T und T_1 die beobachteten Zeiten zweier durch ein sehr großes Zeitintervall von einander getrennten Eintritte (oder Austritte) eines und desselben Trabanten, E und E_1 die entsprechenden Entfernungen des Jupiters von der Erde, und $\mathfrak{T}$ wieder die Zeit,

Digitized by Google

welche das Licht gebraucht, um die zum Grunde gelegte Längeneinheit zu durchlaufen; so sind offenbar

$$T - \mathfrak{T}E \text{ und } T_1 - \mathfrak{T}E_1$$

die wahren Zeiten der beiden Eintritte (oder Austritte), und die zwischen denselben verflossene wahre Zeit ist folglich

$$T_1 - \mathfrak{T}E_1 - (T - \mathfrak{T}E) = T_1 - T - \mathfrak{T}(E_1 - E).$$

Ist nun aber n die Anzahl der Umläufe, welche in dieser Zeit der Trabant gemacht hat, so ist

$$\frac{T_1 - T}{n} - \mathfrak{T}\frac{E_1 - E}{n}$$

die wahre Zeit eines Umlaufs. Da aber, wenn nur n sehr groß ist, die Größe

$$\mathfrak{T}\frac{E_1 - E}{n}$$

offenbar immer sehr klein sein wird, und als verschwindend betrachtet werden kann, so kann

$$\frac{T_1 - T}{n}$$

wenigstens mit großer Annäherung als die wahre Zeit eines Umlaufs des Trabanten, und daher als bekannt angesehen werden.

Ist jetzt t die beobachtete Zeit eines Eintritts (oder Austritts) um die Zeit der Opposition, t_1 die beobachtete Zeit eines Eintritts (oder Austritts) um die Zeit der Conjunction des Jupiters, und werden durch d und d_1 dessen entsprechende Entfernungen von der Erde bezeichnet, so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher

$$t_1 - t - \mathfrak{T}(d_1 - d)$$

die wahre Zwischenzeit zwischen den beiden beobachteten Eintritten (oder Austritten). Ist aber k die Anzahl der während dieser Zeit von dem Trabanten gemachten Umläufe, so ist nach dem Vorhergehenden dieselbe Zwischenzeit

$$k\frac{T_1 - T}{n},$$

und folglich

$$t_1 - \quad - \mathfrak{T}(d_1 - d) = k\frac{T_1 - T}{n},$$

wo $t_1 - t$ und $k\frac{T_1 - T}{n}$ aus den Beobachtungen und dem Vorhergehenden bekannte Größen sind. Die Beobachtungen zeigen aber, daß immer

$$t_1 - t = k\frac{T_1 - T}{n} + 16^{\text{min.}}\,26^{\text{sec.}},$$

d. h. daß die beobachtete Zwischenzeit immer um $16^{\text{min.}}\,26^{\text{sec.}}$

Digitized by Google

größer als die berechnete Zwischenzeit ist. Folglich ist nach der obigen Gleichung

$$k\frac{T_1 - T}{n} + 16^{\text{min.}}\ 26^{\text{sec.}} - \mathfrak{T}(d_1 - d) = k\frac{T_1 - T}{n},$$

also

$$\mathfrak{T}(d_1 - d) = 16^{\text{min.}}\ 26^{\text{sec.}}.$$

Bezeichnen wir aber die Entfernungen der Erde und des Jupiters von der Sonne respective durch r und R, so erhellet leicht, daß zur Zeit der Opposition $d = R - r$, zur Zeit der Conjunction $d_1 = R + r$, also

$$d_1 - d = R + r - (R - r) = 2r,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$2\mathfrak{T}r = 16^{\text{min.}}\ 26^{\text{sec.}},\quad \mathfrak{T}r = 8^{\text{min.}}\ 13^{\text{sec.}}$$

ist. Weil nun offenbar $\mathfrak{T}r$ die Zeit ist, welche das Licht gebraucht, um von der Sonne bis zur Erde zu gelangen, so beträgt diese Zeit 8min. 13sec., welches ganz mit dem Vorhergehenden übereinstimmt, so daß wir also hierdurch ganz zu derselben Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts wie vorher geführt werden.

§. 4.

Eine höchst merkwürdige Bestätigung hat die Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts, so wie wir dieselbe in dem vorhergehenden Paragraphen kennen gelernt haben, in der Theorie der später von dem großen englischen Astronomen Bradley entdeckten Aberration oder Abirrung des Lichts gefunden, welche aber eine ziemlich große Anzahl astronomischer und anderer größtentheils über die Gränzen dieses Lehrbuchs hinaus liegender mathematischer Kenntnisse voraussetzt, und sich daher namentlich in einem physikalischen Lehrbuche bloß mit Hülfe ganz elementarer mathematischer Sätze nicht wohl in einer allen Lesern vollkommen verständlichen Weise mit derjenigen Deutlichkeit und Vollständigkeit entwickeln läßt, durch welche allein eine wahre Einsicht in diese höchst sinnreiche Theorie vermittelt werden kann, indem, was man namentlich in den meisten physikalischen Lehrbüchern über dieselbe findet, so unvollkommen und ungenügend ist, daß man oft zweifeln muß, daß die Verfasser dieser Schriften sich selbst wirklich eine klare Vorstellung von derselben verschafft haben, zu der man übrigens einzig und allein auf dem Wege gründlicher astronomischer Studien gelangen kann.

Um jedoch wenigstens einen Begriff von dieser höchst merkwürdigen und namentlich für die Astronomie außerordentlich wichtigen, jedenfalls aber auch für die Physik eine große Bedeutung habenden Theorie der Aberration, die man übrigens aus verschiedenen Gesichtspunkten darstellen kann, worüber aber

Digitized by Google

das Weitere nicht hierher gehört, zu geben, wollen wir über dieselbe zuvörderst im Allgemeinen Folgendes bemerken.

In Fig. 2. sei S ein Gestirn, wofür wir uns jedoch hier nur einen Fixstern gesetzt denken wollen, da die Betrachtung der Gestirne, welche eine eigne Bewegung haben, uns hier viel zu weit führen würde, und E_0 sei ein Ort der sich in ihrer elliptischen Bahn bewegenden Erde, welche wir der Einfachheit wegen nur als einen Punkt ansehen werden. Wenn nun die Geschwindigkeit des Lichts gegen die Geschwindigkeit der Erde nicht unendlich groß ist, sondern zu derselben ein bestimmtes endliches meßbares Verhältniß hat, wie wir nach der im vorhergehenden Paragraphen ausführlich besprochenen höchst merkwürdigen Entdeckung Römer's in der That anzunehmen berechtigt sind, so wird der Beobachter sein Fernrohr, wenn er dasselbe nach dem Sterne S richten und diesen Stern wirklich im Fernrohre zu Gesicht bekommen will, offenbar, indem er sich in E_0 befindet, nicht direct nach dem Sterne S richten oder in die Lage der von E_0 nach dem Sterne S gerichteten geraden Linie $E_0 S$ bringen dürfen, weil ja, wenn er dies thun wollte, wegen der schnell in ihrer Bahn forteilenden Erde, da das Licht das Rohr des Fernrohrs nicht in einer völlig als verschwindend zu betrachtenden Zeit durchläuft, dasselbe augenscheinlich gar nicht bis zum Auge des Beobachters gelangen könnte, sondern durch die Wände des mit dem Beobachter zugleich schnell forteilenden Rohrs aufgehalten und in seinem geradlinigen Laufe unterbrochen werden würde, was nothwendig in jedem Punkte der Bahn der Erde der Fall sein muß, so daß also der Beobachter den Stern überhaupt gar nicht zu Gesicht bekommen könnte, wenn er das Fernrohr direct nach dem Sterne richten oder genau in die Lage der von seinem Auge nach dem Sterne gerichteten geraden Linie bringen wollte, was aber, wie gesagt, Alles nur unter der Annahme oder Voraussetzung gilt, daß die Geschwindigkeit des Lichts gegen die Geschwindigkeit der Erde nicht unendlich groß ist, sondern zu derselben ein bestimmtes endliches meßbares Verhältniß hat, von welcher Annahme auszugehen wir nach dem vorhergehenden Paragraphen berechtigt sind. Vielmehr muß der Beobachter, wenn er den Stern wirklich zu Gesicht bekommen will, sein Fernrohr, indem er sich in E_0 befindet, in eine solche Lage $E_0 F_0$ bringen, daß ein von dem Sterne S ausgegangenes und bei F_0 durch das gegen den Stern gerichtete Glas, das sogenannte Objectivglas oder Objectiv, in das Fernrohr tretendes Lichttheilchen, indem das in E_0 in die Lage E_0, F_0 gebrachte Fernrohr von dem mit der Erde in ihrer Bahn forteilenden Beobachter parallel mit sich selbst fortgeführt wird, seinen geradlinigen Weg in dem Rohre, ohne irgend eine Hinderung von den Wänden desselben, verfolgen, und mit dem Beobachter zugleich in einem gewissen Punkte E der Erdbahn anlangen kann. Es muß also in E_0 das Fernrohr in eine solche Lage $E_0 F_0$ gebracht werden, daß das Licht die Linie $F_0 E$ genau

Digitized by Google

in derselben Zeit durchläuft, in welcher die Erde den Theil $E_0 E$ ihrer Bahn, den wir seiner Kleinheit wegen ohne allen merklichen Fehler als eine gerade Linie betrachten können, zurücklegt, oder es muß die Lage $E_0 F_0$ des Fernrohrs so beschaffen sein, daß die Linien $E_0 E$ und $E F_0$ der Geschwindigkeit der Erde in dem Punkte E_0 oder E ihrer Bahn und der Geschwindigkeit des Lichts proportional sind. Dann wird das Lichttheilchen mit dem Beobachter zugleich in dem Punkte E anlangen, der Beobachter wird in dem Punkte E der Erdbahn den Stern in dem Fernrohre wirklich zu Gesicht bekommen, wird ihn aber, da wir annehmen, daß das Fernrohr parallel mit sich selbst fortgeführt worden sei, nicht an seiner wahren Stelle oder nach der Linie ES erblicken, sondern nach der Richtung des Fernrohrs EF, welche der Linie $E_0 F_0$ parallel ist, zu sehen glauben, und seinen Ort am Himmel natürlich auch nach dieser Lage des Fernrohrs beurtheilen und bestimmen, wodurch, da das Fernrohr des sich in E befindenden Beobachters nicht wirklich nach dem Sterne S gerichtet ist, nothwendig Fehler in der Lagenbestimmung der Gestirne am Himmel entstehen müssen, auf welche der Astronom unabweislich gehörig Rücksicht zu nehmen hat, wenn die aus seinen am Himmel angestellten Messungen gezogenen Resultate auf diejenige Genauigkeit und Sicherheit sollen Anspruch machen dürfen, welche die Astronomie namentlich bei dem gegenwärtigen Zustande ihrer großen Ausbildung zu fordern berechtigt ist. Die so eben besprochene Abweichung des Fernrohrs von seiner richtigen Lage bei den astronomischen Beobachtungen nennt man in der Astronomie im Allgemeinen die Aberration, gewöhnlich, wie auch selbst oben am Anfange dieses Paragraphen von uns geschehen ist, die Aberration oder Abirrung des Lichts, sollte sich aber, wenigstens nach unserer Meinung, dieses Zusatzes lieber enthalten, weil derselbe der Natur der Sache, namentlich bei der obigen, sich aber in vielen Beziehungen, insbesondere durch ihre große Einfachheit, gewiß ganz vorzüglich empfehlenden Auffassungsweise, nicht ganz gemäß zu sein scheint, weshalb auch wir von nun an uns bloß des Wortes Aberration ohne den in Rede stehenden Beisatz bedienen werden, wie auch namentlich von den neueren Astronomen fast Allgemein geschieht.

Da der Einfluß der Aberration, wie ihr Entdecker, der große englische Astronom Bradley, zuerst dargethan hat, auf alle astronomischen Beobachtungen sehr merklich ist, alles Obige aber nur auf der Voraussetzung beruhet, daß die Geschwindigkeit des Lichts gegen die Geschwindigkeit der Erde nicht unendlich groß ist, sondern vielmehr zu derselben ein bestimmtes endliches meßbares Verhältniß hat, so sind wir nun auch aus der unzweideutig aus allen astronomischen Beobachtungen sich ergebenden Aberration a posteriori zu schließen unbedingt berechtigt, daß die obige Annahme rücksichtlich der Geschwindigkeit des Lichts richtig ist, oder daß dieselbe zu der Geschwindigkeit der Erde in einem bestimmten endlichen meßbaren Verhältnisse steht,

Digitized by Google

wie wir auch schon im vorhergehenden Paragraphen auf ganz anderem Wege gefunden haben.

Wir haben bei der vorigen Auseinandersetzung, um ihr eine möglichst allgemeine Verständlichkeit zu sichern, absichtlich alle mathematischen Rechnungen vermieden, halten jedoch eine etwas nähere Kenntniß dieses Gegenstandes auch für den Physiker für so wichtig, daß es uns angemessen scheint, den obigen allgemeinen Betrachtungen für die einer größeren mathematischen Ausbildung sich erfreuenden Leser nun noch die folgenden analytischen Entwickelungen beizufügen, die aber durchaus nicht in irgend einer Rücksicht auf einige Vollständigkeit Anspruch machen wollen, sondern nur den Zweck haben, die Grundlinien anzugeben, wie man etwa diesen wichtigen Gegenstand, von den oben entwickelten allgemeinen Ansichten ausgehend, mit Hülfe der analytischen Geometrie zu behandeln haben dürfte, wobei wir uns aber absichtlich möglichst des Gebrauchs astronomischer Kunstausdrücke enthalten werden, was uns an diesem Orte zweckmäßig zu sein scheint. Ueberhaupt beabsichtigen wir bei dieser zugleich möglichst kurzen Darstellung nur einen ganz allgemeinen Umriß. Wer die Grundlehren der analytischen Geometrie nicht kennt und noch gar keine Kenntniß der Lehre von den Kegelschnitten besitzt, muß vorläufig das Folgende überschlagen und sich mit der obigen allgemeinen Darstellung begnügen, was auch ganz unbeschadet des vollkommenen Verständnisses der folgenden Lehren, auf welche diese Theorie ganz ohne Einfluß ist, geschehen kann *).

Wir legen ein beliebiges festes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde, auf welches wir die Lage aller Punkte im Raume beziehen. Die Coordinaten der Punkte E_0 und E in Bezug auf dieses System seien respective X_0, Y_0, Z_0 und X, Y, Z. Die von der als von dem Punkte E ausgehend gedachten Linie EE_0, welche wir der Kürze wegen durch R bezeichnen wollen, mit den positiven Theilen dreier, durch den Punkt E gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel seien α, β, γ. Die Länge $E_0 F_0$ oder EF des Fernrohrs sei L, und φ, ψ, χ seien die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche von den einander parallelen Linien $E_0 F_0$, EF mit den positiven Theilen dreier durch die Punkte E_0, E gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossen werden. Ferner seien $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die Linie ES mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt E gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschließt.

---

*) Ich halte aber eine etwas genauere Kenntniß der mathematischen Theorie der Aberration auch für den Physiker für nothwendig, wenn dieselbe auch vorzugsweise für den Astronomen von Interesse und unentbehrlich ist.

Digitized by Google

Nach den Principien der analytischen Geometrie wird die Linie ES durch die Gleichungen

$$1)\quad \frac{x-X}{\cos\varphi_1} = \frac{y-Y}{\cos\psi_1} = \frac{z-Z}{\cos\chi_1}$$

charakterisirt. Die Coordinaten des Punktes F_0 sind offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$X_0 + L\cos\varphi,\ Y_0 + L\cos\psi,\ Z_0 + L\cos\chi;$$

und weil nun dieser Punkt in der Linie ES liegt, so haben wir nach 1) die folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \frac{X_0 - X + L\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{Y_0 - Y + L\cos\psi}{\cos\psi_1} = \frac{Z_0 - Z + L\cos\chi}{\cos\chi_1}.$$

Weil aber nach den Principien der analytischen Geometrie

$$3)\quad \begin{cases} X_0 - X = R\cos\alpha, \\ Y_0 - Y = R\cos\beta, \\ Z_0 - Z = R\cos\gamma \end{cases}$$

ist, so erhalten die Gleichungen 2) die folgende Form:

$$4)\quad \frac{R\cos\alpha + L\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{R\cos\beta + L\cos\psi}{\cos\psi_1} = \frac{R\cos\gamma + L\cos\chi}{\cos\chi_1}.$$

Verhält sich nun die Geschwindigkeit des Lichts zu der Geschwindigkeit der Erde in dem Punkte E_0 oder E wie 1 : i, so ist

$$EF_0 : EE_0 = 1 : i,$$

und folglich, da $EE_0 = R$ und nach dem Obigen und den Principien der analytischen Geometrie

$$EF_0 = \sqrt{(X_0 - X + L\cos\varphi)^2 + (Y_0 - Y + L\cos\psi)^2 + (Z_0 - Z + L\cos\chi)^2}$$

oder

$$EF_0 = \sqrt{(R\cos\alpha + L\cos\varphi)^2 + (R\cos\beta + L\cos\psi)^2 + (R\cos\gamma + L\cos\chi)^2}$$

ist:

$$5)\quad \left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right)^2 + \left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right)^2 + \left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right)^2 = \frac{1}{i^2}.$$

Wenn man zu den drei Gleichungen

$$\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right)^2 + \left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right)^2 + \left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right)^2 = \frac{1}{i^2},$$

$$\frac{\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi}{\cos\psi_1} = \frac{\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi}{\cos\chi_1}$$

noch die aus der analytischen Geometrie bekannte Gleichung

$$\cos\varphi_1^2 + \cos\psi_1^2 + \cos\chi_1^2 = 1$$

fügt, so kann man aus den als bekannt angenommenen Größen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \varphi,\ \psi,\ \chi$$

die Größen

Digitized by Google

$$\frac{L}{R},\ \varphi_1,\ \psi_1,\ \chi_1$$

finden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Aus der ersten Gleichung erhält man, weil nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich auch

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

und

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

ist, nach gehöriger Entwickelung derselben leicht

$$1 + 2(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi)\frac{L}{R} + \left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{1}{i^2}.$$

Bezeichnen wir aber den von den Linien EE_0 und EF eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ, so ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie

6) $$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi,$$

wo also, da α, β, γ; φ, ψ, χ als bekannt angenommen worden sind, auch Θ eine bekannte Größe ist, und folglich nach dem Obigen

$$1 + 2\cos\Theta\frac{L}{R} + \left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{1}{i^2}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung des zweiten Grades die Größe $\frac{L}{R}$ auf bekannte Weise, so erhält man

7) $$\frac{L}{R} = -\cos\Theta \pm \frac{1}{i}\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2}$$

oder

8) $$\frac{L}{R} = -\cos\Theta \pm \sqrt{\left(\frac{1}{i}\right)^2 - \sin\Theta^2},$$

wo nun noch eine Bestimmung nöthig ist, welches Zeichen man in dieser Formel zu nehmen hat, die auf folgende Art gegeben werden kann.

Das Product der beiden Werthe von $\frac{L}{R}$ ist

$$\cos\Theta^2 - \left\{\left(\frac{1}{i}\right)^2 - \sin\Theta^2\right\} = 1 - \left(\frac{1}{i}\right)^2 = -\frac{1-i^2}{i^2},$$

und folglich, da i immer eine sehr kleine positive Größe ist, stets eine negative Größe. Also haben die beiden Werthe von $\frac{L}{R}$ immer entgegengesetzte Vorzeichen. Ist nun $\cos\Theta$ positiv, so giebt das untere Zeichen einen negativen Werth, und man muß also, da $\frac{L}{R}$ seiner Natur nach positiv ist, das obere Zeichen nehmen; ist dagegen $\cos\Theta$ negativ, so giebt das obere Zeichen offenbar einen positiven Werth, und man muß also wieder dieses Zeichen nehmen, d. h. man muß immer

Digitized by Google

$$9)\quad \frac{L}{R} = -\cos\Theta + \frac{1}{i}\sqrt{1 - i^2 \sin\Theta^2}$$

setzen.

Mittelst der Gleichungen

$$\frac{\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi}{\cos\psi_1} = \frac{\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi}{\cos\chi_1}$$

und

$$\cos\varphi_1^2 + \cos\psi_1^2 + \cos\chi_1^2 = 1$$

erhält man nun ferner leicht mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos\varphi_1 = \pm \frac{\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi}{\sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right)^2 + \left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right)^2 + \left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right)^2}},$$

$$\cos\psi_1 = \pm \frac{\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi}{\sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right)^2 + \left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right)^2 + \left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right)^2}},$$

$$\cos\chi_1 = \pm \frac{\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi}{\sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right)^2 + \left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right)^2 + \left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right)^2}};$$

also nach dem Obigen mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$10)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \pm i \left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right), \\ \cos\psi_1 = \pm i \left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right), \\ \cos\chi_1 = \pm i \left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right); \end{cases}$$

wo sich nun wieder fragt, welche Zeichen man in diesen Formeln zu nehmen hat, worüber man auf folgende Art zu einer bestimmten Entscheidung gelangen kann.

Die Coordinaten des Punktes F_0 in dem zum Grunde gelegten Systeme sind nach dem Obigen

$$X_0 + L\cos\varphi,\quad Y_0 + L\cos\psi,\quad Z_0 + L\cos\chi;$$

und die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf ein durch den Punkt E gelegtes, dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem sind also nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

Digitized by Google

$X_0 - X + L\cos\varphi$, $Y_0 - Y + L\cos\psi$, $Z_0 - Z + L\cos\chi$;

oder nach dem Obigen

$$R\cos\alpha + L\cos\varphi,\ R\cos\beta + L\cos\psi,\ R\cos\gamma + L\cos\chi;$$

oder

$$R\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right), R\left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right), R\left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right).$$

Die Coordinaten des Punktes S in Bezug auf dasselbe System sind, wenn wir der Kürze wegen $ES = \varrho$ setzen:

$$\varrho\cos\varphi_1,\ \varrho\cos\psi_1,\ \varrho\cos\chi_1;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wenn man für

$$\cos\varphi_1,\ \cos\psi_1,\ \cos\chi_1$$

ihre Werthe aus 10) setzt:

$$\pm\varrho i\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right), \pm\varrho i\left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right), \pm\varrho i\left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right);$$

und weil nun die Coordinaten von F_0 und S in Bezug auf ein durch den Punkt E gelegtes, dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem offenbar immer gleiche Vorzeichen haben müssen, so ist ersichtlich, daß man im Vorhergehenden überall die obern Zeichen nehmen, nach 10) also

$$11)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = i\left(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi\right), \\ \cos\psi_1 = i\left(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi\right), \\ \cos\chi_1 = i\left(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi\right) \end{cases}$$

setzen muß. Führt man aber in diese Formeln für $\frac{L}{R}$ seinen Werth aus 9) ein, so erhält man

$$12)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = i\left(\cos\alpha - \cos\Theta\cos\varphi + \frac{1}{i}\cos\varphi\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2}\right), \\ \cos\psi_1 = i\left(\cos\beta - \cos\Theta\cos\psi + \frac{1}{i}\cos\psi\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2}\right), \\ \cos\chi_1 = i\left(\cos\gamma - \cos\Theta\cos\chi + \frac{1}{i}\cos\chi\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2}\right); \end{cases}$$

oder auch

$$13)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \cos\varphi\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2} + i(\cos\alpha - \cos\Theta\cos\varphi), \\ \cos\psi_1 = \cos\psi\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2} + i(\cos\beta - \cos\Theta\cos\psi), \\ \cos\chi_1 = \cos\chi\sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2} + i(\cos\gamma - \cos\Theta\cos\chi). \end{cases}$$

Um die vorhergehende Aufgabe umzukehren, d. h. um φ, ψ, χ

Digitized by Google

aus α, β, γ, φ_1, ψ_1, χ_1 zu finden, hat man nach II), wenn der Kürze wegen

$$14)\quad i_1 = \frac{1}{i}$$

gesetzt wird:

$$\frac{L}{R}\cos\varphi = i_1\cos\varphi_1 - \cos\alpha,$$

$$\frac{L}{R}\cos\psi = i_1\cos\psi_1 - \cos\beta,$$

$$\frac{L}{R}\cos\chi = i_1\cos\chi_1 - \cos\gamma;$$

also, wenn man quadrirt und addirt, weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

und

$$\cos\varphi_1^2 + \cos\psi_1^2 + \cos\chi_1^2 = 1$$

ist:

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 = 1 + i_1^2 - 2i_1(\cos\alpha\cos\varphi_1 + \cos\beta\cos\psi_1 + \cos\gamma\cos\chi_1).$$

Bezeichnen wir aber den von den Linien EE_0 und ES eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Θ_1, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$15)\quad \cos\Theta_1 = \cos\alpha\cos\varphi_1 + \cos\beta\cos\psi_1 + \cos\gamma\cos\chi_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 = 1 + i_1^2 - 2i_1\cos\Theta_1,$$

oder

$$16)\quad \frac{L}{R} = \sqrt{1 + i_1^2 - 2i_1\cos\Theta_1}.$$

oder

$$17)\quad \frac{L}{R} = \frac{1}{i}\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$18)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos\varphi_1 - i\cos\alpha}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}}, \\ \cos\psi = \dfrac{\cos\psi_1 - i\cos\beta}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}}, \\ \cos\chi = \dfrac{\cos\chi_1 - i\cos\gamma}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}}. \end{cases}$$

Wenn man in den Gleichungen 13) wegen der großen Kleinheit der Größe i Glieder, welche in Bezug auf diese sehr

Digitized by Google

kleine Größe von der zweiten Ordnung sind, vernachlässigt, so erhält man näherungsweise:

$$19)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \cos\varphi + i(\cos\alpha - \cos\Theta\cos\varphi), \\ \cos\psi_1 = \cos\psi + i(\cos\beta - \cos\Theta\cos\psi), \\ \cos\chi_1 = \cos\chi + i(\cos\gamma - \cos\Theta\cos\chi); \end{cases}$$

oder

$$20)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 - \cos\varphi = i(\cos\alpha - \cos\Theta\cos\varphi), \\ \cos\psi_1 - \cos\psi = i(\cos\beta - \cos\Theta\cos\psi), \\ \cos\chi_1 - \cos\chi = i(\cos\gamma - \cos\Theta\cos\chi). \end{cases}$$

Nun ist aber, um nur die erste dieser drei Gleichungen etwas näher zu betrachten,

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1).$$

Weil nun

$$\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = \varphi - \tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$$

ist, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) = \sin\varphi\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) - \cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1),$$

also

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = 2\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1) - 2\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)^2,$$

d. i.

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = \sin\varphi\sin(\varphi-\varphi_1) - 2\cos\varphi\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)^2,$$

woraus erhellet, daß man mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die der Null sehr nahe kommende Größe $\varphi-\varphi_1$ von der zweiten Ordnung sind,

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = (\varphi-\varphi_1)\sin\varphi$$

zu setzen berechtigt ist. Da nun diese Betrachtung natürlich auf eine jede der drei Gleichungen 20) anwendbar ist, so erhält man aus diesen Gleichungen:

$$21)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = i\dfrac{\cos\alpha - \cos\Theta\cos\varphi}{\sin\varphi}, \\ \psi - \psi_1 = i\dfrac{\cos\beta - \cos\Theta\cos\psi}{\sin\psi}, \\ \chi - \chi_1 = i\dfrac{\cos\gamma - \cos\Theta\cos\chi}{\sin\chi}; \end{cases}$$

oder

$$22)\quad \begin{cases} \varphi_1 - \varphi = i\left(\cos\Theta\cot\varphi - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\varphi}\right), \\ \psi_1 - \psi = i\left(\cos\Theta\cot\psi - \dfrac{\cos\beta}{\sin\psi}\right), \\ \chi_1 - \chi = i\left(\cos\Theta\cot\chi - \dfrac{\cos\gamma}{\sin\chi}\right). \end{cases}$$

Digitized by Google

Sollen aber die Differenzen

$$\varphi_1 - \varphi,\ \psi_1 - \psi,\ \chi_1 - \chi$$

in Secunden ausgedrückt sein, so muß man setzen:

$$23)\quad \begin{cases} \varphi_1 - \varphi = \dfrac{i}{\sin 1''}\left(\cos\Theta\cot\varphi - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\varphi}\right), \\ \psi_1 - \psi = \dfrac{i}{\sin 1''}\left(\cos\Theta\cot\psi - \dfrac{\cos\beta}{\sin\psi}\right), \\ \chi_1 - \chi = \dfrac{i}{\sin 1''}\left(\cos\Theta\cot\chi - \dfrac{\cos\gamma}{\sin\chi}\right). \end{cases}$$

Stellt man die Gleichungen 18) auf folgende Art dar:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 - i\cos\alpha &= \cos\varphi\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}, \\ \cos\psi_1 - i\cos\beta &= \cos\psi\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}, \\ \cos\chi_1 - i\cos\gamma &= \cos\chi\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}; \end{aligned}$$

so erhält man leicht mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Beziehung auf die sehr kleine Größe i von der zweiten Ordnung sind:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 - i\cos\alpha &= \cos\varphi\,(1 - i\cos\Theta_1), \\ \cos\psi_1 - i\cos\beta &= \cos\psi\,(1 - i\cos\Theta_1), \\ \cos\chi_1 - i\cos\gamma &= \cos\chi\,(1 - i\cos\Theta_1); \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\cos\varphi_1 - i\cos\alpha)\,(1 + i\cos\Theta_1) &= \cos\varphi\,(1 - i^2\cos\Theta_1{}^2), \\ (\cos\psi_1 - i\cos\beta)\,(1 + i\cos\Theta_1) &= \cos\psi\,(1 - i^2\cos\Theta_1{}^2), \\ (\cos\chi_1 - i\cos\gamma)\,(1 + i\cos\Theta_1) &= \cos\chi\,(1 - i^2\cos\Theta_1{}^2); \end{aligned}$$

also, immer unter Verstattung derselben Vernachlässigungen:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 - \cos\varphi &= i(\cos\alpha - \cos\Theta_1\cos\varphi_1), \\ \cos\psi_1 - \cos\psi &= i(\cos\beta - \cos\Theta_1\cos\psi_1), \\ \cos\chi_1 - \cos\chi &= i(\cos\gamma - \cos\Theta_1\cos\chi_1); \end{aligned}$$

woraus man auf ganz ähnliche Art wie vorher

$$24)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = i\,\dfrac{\cos\alpha - \cos\Theta_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}, \\ \psi - \psi_1 = i\,\dfrac{\cos\beta - \cos\Theta_1\cos\psi_1}{\sin\psi_1}, \\ \chi - \chi_1 = i\,\dfrac{\cos\gamma - \cos\Theta_1\cos\chi_1}{\sin\chi_1}; \end{cases}$$

oder

$$25)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = -i\left(\cos\Theta_1\cot\varphi_1 - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\varphi_1}\right), \\ \psi - \psi_1 = -i\left(\cos\Theta_1\cot\psi_1 - \dfrac{\cos\beta}{\sin\psi_1}\right), \\ \chi - \chi_1 = -i\left(\cos\Theta_1\cot\chi_1 - \dfrac{\cos\gamma}{\sin\chi_1}\right); \end{cases}$$

Digitized by Google

oder, wenn die Differenzen

$$\varphi - \varphi_1,\ \psi - \psi_1,\ \chi - \chi_1$$

in Secunden ausgedrückt sein sollen,

$$26)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = -\dfrac{i}{\sin 1''}\left(\cos\Theta_1 \cot\varphi_1 - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\varphi_1}\right), \\ \psi - \psi_1 = -\dfrac{i}{\sin 1''}\left(\cos\Theta_1 \cot\psi_1 - \dfrac{\cos\beta}{\sin\psi_1}\right), \\ \chi - \chi_1 = -\dfrac{i}{\sin 1''}\left(\cos\Theta_1 \cot\chi_1 - \dfrac{\cos\gamma}{\sin\chi_1}\right) \end{cases}$$

erhält.

Wir wollen nun den Mittelpunkt der elliptischen Erdbahn als Anfang der xyz, die Ebene der Erdbahn als Ebene der xy, und die Hauptaxe der Erdbahn als Axe der x annehmen. Dann ist im Vorhergehenden offenbar $\gamma = 90^0$, $\cos\gamma = 0$ zu setzen; und wenn wir die beiden Halbaxen der Erdbahn durch a, b bezeichnen, so ist nach der Lehre von der Ellipse bekanntlich

$$27)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung derselben. Die Gleichung der durch den durch die Coordinaten X, Y der Erde bestimmten Ort E derselben an die Erdbahn gezogenen Berührenden, welche die Stelle der Linie EE_0 vertreten kann, ist nach der Lehre von der Ellipse

$$28)\quad \frac{X}{a^2}\,x + \frac{Y}{b^2}\,y = 1.$$

Bezeichnen wir aber die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden Theile dieser Berührenden, in die dieselbe durch den Berührungspunkt E getheilt wird, mit den positiven Theilen zweier durch den Berührungspunkt E gelegter, den primitiven Axen der x, y paralleler Axen einschließt, durch α', β'; so ist nach den allgemeinen Principien der analytischen Geometrie bekanntlich auch

$$29)\quad \frac{x - X}{\cos\alpha'} = \frac{y - Y}{\cos\beta'}$$

oder

$$30)\quad \frac{\cos\beta'}{X\cos\beta' - Y\cos\alpha'}\,x - \frac{\cos\alpha'}{X\cos\beta' - Y\cos\alpha'}\,y = 1$$

die Gleichung der in Rede stehenden Berührenden, und durch Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung 28) erhält man daher die beiden Gleichungen:

$$31)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\beta'}{X\cos\beta' - Y\cos\alpha'} = \dfrac{X}{a^2}, \\ \dfrac{\cos\alpha'}{X\cos\beta' - Y\cos\alpha'} = -\dfrac{Y}{b^2}; \end{cases}$$

Digitized by Google

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$32)\quad \begin{cases}(X^2 - a^2)\cos\beta' = XY\cos\alpha', \\ (Y^2 - b^2)\cos\alpha' = XY\cos\beta';\end{cases}$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division die Gleichung:

$$33)\quad \frac{X^2 - a^2}{Y^2 - b^2} = \left(\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}\right)^2.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die bekannte Gleichung

$$\cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 = 1,$$

so ergiebt sich:

$$34)\quad \begin{cases}\cos\alpha'^2 = \dfrac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}, \\ \cos\beta'^2 = \dfrac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}.\end{cases}$$

Weil $X^2 - a^2$, $Y^2 - b^2$, wenigstens wenn sie nicht verschwinden, stets negative Größen sind, so haben wegen der Gleichungen 32) offenbar $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen, je nachdem X, Y ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. Wenn daher X, Y gleiche Vorzeichen haben, so ist mit Beziehung der obern und untern Vorzeichen auf einander

$$35)\quad \begin{cases}\cos\alpha' = \pm\sqrt{\dfrac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}}, \\ \cos\beta' = \mp\sqrt{\dfrac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}}.\end{cases}$$

Wenn dagegen X, Y ungleiche Vorzeichen haben, so ist mit Beziehung der obern und untern Vorzeichen auf einander

$$36)\quad \begin{cases}\cos\alpha' = \pm\sqrt{\dfrac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}}, \\ \cos\beta' = \pm\sqrt{\dfrac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}}.\end{cases}$$

Nehmen wir jetzt die positiven Theile der Axen der x und y so an, daß man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muß, nach welcher sich die Erde bewegt, und lassen wir die Winkel α', β' demjenigen der beiden Theile der Berührenden der Erdbahn in dem Punkte E, in welche dieselbe durch diesen Punkt getheilt wird, entsprechen, der von dem Punkte E aus der Richtung der Bewegung der Erde entgegengesetzt ist; so wird leicht erhellen, daß im

1sten, 2ten, 3ten, 4ten

Quadranten der Erdbahn $\cos\alpha'$ respective

positiv, positiv, negativ, negativ

ist, weil nämlich im 1sten und 2ten Quadranten offenbar

$$0 < \alpha' < 90^\circ,$$

Digitized by Google

im 3ten und 4ten Quadranten dagegen

$$90° < \alpha' < 180°$$

ist. Also ist nach dem Vorhergehenden im 1sten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \sqrt{\frac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}},$$

$$\cos\beta' = -\sqrt{\frac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}};$$

im 2ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \sqrt{\frac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}},$$

$$\cos\beta' = \sqrt{\frac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}};$$

im 3ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = -\sqrt{\frac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}},$$

$$\cos\beta' = \sqrt{\frac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}};$$

im 4ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = -\sqrt{\frac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}},$$

$$\cos\beta' = -\sqrt{\frac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)}}.$$

Weil aber

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$$

ist, so ist

$$X^2 - a^2 = -\frac{a^2}{b^2}Y^2,\ Y^2 - b^2 = -\frac{b^2}{a^2}X^2;$$

also

$$(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2) = -\frac{a^4Y^2 + b^4X^2}{a^2b^2},$$

und folglich

$$\frac{X^2 - a^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)} = \frac{a^4Y^2}{a^4Y^2 + b^4X^2},$$

$$\frac{Y^2 - b^2}{(X^2 - a^2) + (Y^2 - b^2)} = \frac{b^4X^2}{a^4Y^2 + b^4X^2}.$$

Weil nun im

1sten, 2ten, 3ten, 4ten

Quadranten die Größen

X und Y

respective

positiv, negativ, negativ, positiv

und

Digitized by Google

positiv, positiv, negativ, negativ

sind; so ist nach dem Vorhergehenden

im 1sten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},\quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

im 2ten Quadranten:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},\quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

im 3ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},\quad \cos\beta = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

im 4ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},\quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

d. h. es ist immer

$$37)\quad \cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},\quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}.$$

Nun sind aber unter den gemachten Voraussetzungen die Winkel α', β' offenbar mit den Winkeln α, β identisch, weil sich beide auf die als von E ausgehend betrachtete Linie EE_0 beziehen; daher ist in völliger Allgemeinheit auch

$$38)\quad \cos\alpha = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}},\quad \cos\beta = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}.$$

Weil aber

$$X^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - Y^2),\quad Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2)$$

ist, so ist

$$a^4 Y^2 + b^4 X^2 = b^2\{a^4 - (a^2 - b^2) X^2\} = b^2 (a^4 - e^2 X^2),$$
$$a^4 Y^2 + b^4 X^2 = a^2\{b^4 + (a^2 - b^2) Y^2\} = a^2 (b^4 + e^2 Y^2);$$

wenn wir die Excentricität der Erdbahn durch e bezeichnen. Also ist in völliger Allgemeinheit

$$39)\quad \cos\alpha = \frac{a^2 Y}{b\sqrt{a^4 - e^2 X^2}},\quad \cos\beta = -\frac{bX}{\sqrt{a^4 - e^2 X^2}};$$

oder

$$40)\quad \cos\alpha = \frac{aY}{\sqrt{b^4 + e^2 Y^2}},\quad \cos\beta = -\frac{b^2 X}{a\sqrt{b^4 + e^2 Y^2}};$$

oder auch

$$41)\quad \cos\alpha = \frac{aY}{\sqrt{b^4 + e^2 Y^2}},\quad \cos\beta = -\frac{bX}{\sqrt{a^4 - e^2 X^2}};$$

oder auch

$$42)\quad \cos\alpha = \frac{a^2 Y}{b\sqrt{a^4 - e^2 X^2}},\quad \cos\beta = -\frac{b^2 X}{a\sqrt{b^4 + e^2 Y^2}}.$$

Digitized by Google

Den positiven Theil der Axe der x wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, durch die Sonne legen, so sind nach den aus dem ersten Theile dieses Werks bekannten Gesetzen der Bewegung der Planeten um die Sonne e, 0 die beiden Coordinaten der Sonne, und nach den Principien der analytischen Geometrie ist folglich, wenn p das von der Sonne auf die durch den Punkt E gelegte Berührende der Erdbahn, deren Gleichung nach dem Obigen

$$\frac{X}{a^2}x + \frac{Y}{b^2}y = 1$$

ist, gefällte Perpendikel bezeichnet, wie man leicht findet:

$$p^2 = \frac{b^4(a^2 - eX)^2}{a^4Y^2 + b^4X^2},$$

oder nach dem Obigen

$$p^2 = b^2\frac{(a^2 - eX)^2}{a^4 - e^2X^2},$$

also

$$p^2 = b^2\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX},$$

und folglich

$$43)\quad p = b\sqrt{\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}}.$$

Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit des Lichts durch G, die Geschwindigkeit der Erde in dem Punkte E, dessen Coordinaten X, Y sind, durch V; so ist nach dem Obigen

$$G : V = 1 : i,$$

also

$$i = \frac{V}{G}.$$

Ist aber V_1 die Geschwindigkeit der Erde in einem andern beliebigen Punkte E_1 ihrer Bahn, dessen Coordinaten X_1, Y_1 sind, und p_1 das von der Sonne auf die Berührende der Erdbahn in diesem Punkte gefällte Perpendikel, so daß also nach dem Vorhergehenden

$$44)\quad p_1 = b\sqrt{\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}}$$

ist; so ist nach dem im ersten Theile dieses Werks §. 155. S. 315. bewiesenen Satze, nach welchem sich bei jeder Centralbewegung die Geschwindigkeiten des sich bewegenden Punktes in den einzelnen Punkten der von demselben beschriebenen Curve umgekehrt wie die von dem Mittelpunkte der Kräfte auf die durch die in Rede stehenden Punkte an die Curve gezogenen Berührenden gefällten Perpendikel verhalten,

$$V : V_1 = p_1 : p,$$

Digitized by Google

also nach dem Vorhergehenden

$$V : V_1 = \sqrt{\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}} : \sqrt{\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}},$$

folglich

$$V = V_1 \left(\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

und daher nach dem Obigen

$$45)\ i = \frac{V_1}{G} \left(\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da wir uns für E_1 jeden beliebigen, nur bestimmten Punkt der Erdbahn gesetzt denken können, so ist

$$V_1 \left(\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

eine constante Größe, die wir durch K_1 bezeichnen, und also

$$46)\ K_1 = V_1 \left(\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

setzen wollen. Setzen wir dann ferner

$$47)\ K = \frac{K_1}{G},$$

wo natürlich K auch eine constante Größe ist, so ist nach 45):

$$48)\ i = K \left(\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

oder

$$49)\ i = K \left(\frac{a^2 + eX}{a^2 - eX}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen des Punktes E von den beiden Brennpunkten der Erdbahn, in welchen die Sonne steht und nicht steht, respective durch r und r', so ist nach den Principien der analytischen Geometrie, wie leicht erhellen wird:

$$r = \sqrt{(e-X)^2 + Y^2},\ r' = \sqrt{(e+X)^2 + Y^2}.$$

Nun ist aber

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2) = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - X^2);$$

also, wie man leicht findet:

$$(e-X)^2 + Y^2 = a^2 - 2eX + \frac{e^2X^2}{a^2}$$

und

$$(e+X)^2 + Y^2 = a^2 + 2eX + \frac{e^2X^2}{a^2},$$

d. i.

$$(e-X)^2 + Y^2 = \left(a - \frac{eX}{a}\right)^2,$$

Digitized by Google

$$(e+X)^2 + Y^2 = \left(a + \frac{eX}{a}\right)^2.$$

Weil aber $e < a$ und auch der absolute Werth von X nie größer als a ist, so ist der absolute Werth von eX immer kleiner als a^2, also der absolute Werth von $\frac{eX}{a}$ immer kleiner als a, und es sind daher offenbar

$$a - \frac{eX}{a} \text{ und } a + \frac{eX}{a}$$

jederzeit positive Größen. Also ist

$$\sqrt{(e-X)^2 + Y^2} = a - \frac{eX}{a},$$

$$\sqrt{(e+X)^2 + Y^2} = a + \frac{eX}{a};$$

folglich nach dem Obigen

$$50) \begin{cases} r = a - \frac{eX}{a} = \frac{a^2 - eX}{a}, \\ r' = a + \frac{eX}{a} = \frac{a^2 + eX}{a}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir eben so die Entfernungen des Punktes E_1 von den beiden Brennpunkten der Erdbahn, in denen die Sonne steht und nicht steht, respective durch r_1 und r_1'; so ist

$$51) \begin{cases} r_1 = a - \frac{eX_1}{a} = \frac{a^2 - eX_1}{a}, \\ r_1' = a + \frac{eX_1}{a} = \frac{a^2 + eX_1}{a}. \end{cases}$$

Folglich ist nach dem Obigen auch

$$52) \quad K_1 = V_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_1'}}$$

und

$$53) \quad i = K \sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

Es ist aber nach dem Obigen auch

$$i\cos\alpha = K \sqrt{\frac{a^2 + eX}{a^2 - eX}} \cdot \frac{a^2 Y}{b\sqrt{a^4 - e^2 X^2}},$$

$$i\cos\beta = -K \sqrt{\frac{a^2 + eX}{a^2 - eX}} \cdot \frac{bX}{\sqrt{a^4 - e^2 X^2}};$$

d. i.

$$54) \begin{cases} i\cos\alpha = K \frac{a^2 Y}{b(a^2 - eX)}, \\ i\cos\beta = -K \frac{bX}{a^2 - eX}; \end{cases}$$

Digitized by Google

oder

$$55)\quad i\cos\alpha = K\frac{aY}{br},\quad i\cos\beta = -K\frac{bX}{ar}.$$

Also ist, weil $\cos\gamma = 0$ ist, nach 6) und 15):

$$56)\quad i\cos\Theta = K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi - \frac{bX}{ar}\cos\psi\right)$$

und

$$57)\quad i\cos\Theta_1 = K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right);$$

wobei man sich auch noch die Formeln

$$56^*)\quad \cos\Theta = \frac{aY}{b\sqrt{rr'}}\cos\varphi - \frac{bX}{a\sqrt{rr'}}\cos\psi$$

und

$$57^*)\quad \cos\Theta_1 = \frac{aY}{b\sqrt{rr'}}\cos\varphi_1 - \frac{bX}{a\sqrt{rr'}}\cos\psi_1$$

merken kann.

Also ist nach 23) und 26), wie man leicht findet:

$$58)\quad \begin{cases} \varphi_1 - \varphi = \dfrac{K}{\sin 1''}\left\{\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi\right)\cot\varphi - \dfrac{aY}{br}\operatorname{cosec}\varphi\right\}, \\ \psi_1 - \psi = \dfrac{K}{\sin 1''}\left\{\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi\right)\cot\psi + \dfrac{bX}{ar}\operatorname{cosec}\psi\right\}, \\ \chi_1 - \chi = \dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi\right)\cot\chi \end{cases}$$

und

$$59)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = -\dfrac{K}{\sin 1''}\left\{\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)\cot\varphi_1 - \dfrac{aY}{br}\operatorname{cosec}\varphi_1\right\}, \\ \psi - \psi_1 = -\dfrac{K}{\sin 1''}\left\{\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)\cot\psi_1 + \dfrac{bX}{ar}\operatorname{cosec}\psi_1\right\}, \\ \chi - \chi_1 = -\dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)\cot\chi_1. \end{cases}$$

Weil aber

$$\cos\varphi\cot\varphi - \operatorname{cosec}\varphi = \frac{\cos\varphi^2 - 1}{\sin\varphi} = -\sin\varphi,$$

$$\cos\psi\cot\psi - \operatorname{cosec}\psi = \frac{\cos\psi^2 - 1}{\sin\psi} = -\sin\psi;$$

und eben so

$$\cos\varphi_1\cot\varphi_1 - \operatorname{cosec}\varphi_1 = \frac{\cos\varphi_1^2 - 1}{\sin\varphi_1} = -\sin\varphi_1,$$

$$\cos\psi_1\cot\psi_1 - \operatorname{cosec}\psi_1 = \frac{\cos\psi_1^2 - 1}{\sin\psi_1} = -\sin\psi_1$$

Digitized by Google

ist; so ist

$$60)\quad \begin{cases} \varphi_1 - \varphi = -\dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{aY}{br}\sin\varphi + \dfrac{bX}{ar}\cos\psi\cot\varphi\right), \\ \psi_1 - \psi = \dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{bX}{ar}\sin\psi + \dfrac{aY}{br}\cos\varphi\cot\psi\right), \\ \chi_1 - \chi = \dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi\right)\cot\chi \end{cases}$$

und

$$61)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = \dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{aY}{br}\sin\varphi_1 + \dfrac{bX}{ar}\cos\psi_1\cot\varphi_1\right), \\ \psi - \psi_1 = -\dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{bX}{ar}\sin\psi_1 + \dfrac{aY}{br}\cos\varphi_1\cot\psi_1\right), \\ \chi - \chi_1 = -\dfrac{K}{\sin 1''}\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \dfrac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)\cot\chi_1. \end{cases}$$

Die Coordinaten X, Y der Erde und deren Vector r lassen sich, wie wir hier als aus den Anfangsgründen der Astronomie bekannt voraussetzen müssen*), leicht für jede gegebene

---

*) Denken wir uns, um über diesen Gegenstand nur Einiges hier zu sagen, durch die Sonne als Anfang ein dem im Vorhergehenden zum Grunde gelegten Systeme paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichnen den von dem Vector r mit dem positiven Theile der ersten Axe dieses Systems eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe an durch den Coordinatenwinkel des Systems hindurch, d. h. nach dem Obigen im Sinne der Bewegung der Erde, von 0 bis 360° zählen, durch L; so sind die Coordinaten der Erde in diesem Systeme offenbar

$$r\cos L,\ r\sin L;$$

und es ist folglich augenscheinlich

$$X = e + r\cos L,\quad Y = r\sin L.$$

Nun ist aber, wie wir aus dem Obigen wissen,

$$r = a - \frac{eX}{a}.$$

Also ist

$$X = e + \left(a - \frac{eX}{a}\right)\cos L,$$

woraus leicht

$$X = a\,\frac{e + a\cos L}{a + e\cos L},$$

und folglich

$$r\cos L = X - e = \frac{(a^2 - e^2)\cos L}{a + e\cos L},$$

d. i.

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos L} = \frac{b^2}{a + e\cos L}$$

Digitized by Google

Zeit aus den astronomischen Tafeln oder aus den Ephemeriden berechnen. Eben so sind auch die Verhältnisse

$$\frac{a}{b} \text{ und } \frac{b}{a}$$

aus den Elementen der Erdbahn bekannt. Kennt man also nur die Constante K, so lassen sich mittelst der Formeln 60) aus φ, ψ, χ die Größen φ_1, ψ_1, χ_1, mittelst der Formeln 61) aus φ_1, ψ_1, χ_1 die Größen φ, ψ, χ berechnen, wobei wir zugleich bemerken wollen, daß man φ, ψ, χ die scheinbaren, d. h. von der Aberration afficirten, dagegen φ_1, ψ_1, χ_1 die wahren, d. h. von der Aberration nicht afficirten, Coordinaten des Sterns nennt. Nur die ersteren lassen sich durch Beobachtung bestim-

---

erhalten wird. Endlich erhält man

$$Y = r \sin L = \frac{b^2 \sin L}{a + e \cos L}.$$

In den obigen Formeln kommen nun bloß die beiden Brüche

$$\frac{aY}{br} \text{ und } \frac{bX}{ar}$$

vor, für welche man mittelst der obigen Gleichungen leicht die folgenden Ausdrücke erhält:

$$\frac{aY}{br} = \frac{a}{b} \sin L, \quad \frac{bX}{ar} = \frac{e + a \cos L}{b};$$

oder

$$\frac{aY}{br} = \frac{a}{b} \sin L, \quad \frac{bX}{ar} = \frac{e}{b} + \frac{a}{b} \cos L;$$

oder

$$\frac{aY}{br} = \frac{a}{b} \sin L, \quad \frac{bX}{ar} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} + \frac{a}{b} \cos L;$$

oder

$$\frac{aY}{br} = \frac{a}{b} \sin L, \quad \frac{bX}{ar} = \frac{a}{b}\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} + \cos L\right\}.$$

Setzt man

$$\sin L' = \frac{b}{a},$$

mittelst welcher Formel sich dieser Hülfswinkel L' leicht berechnen läßt, so ist

$$\frac{aY}{br} = \frac{a}{b} \sin L, \quad \frac{bX}{ar} = \frac{a}{b} (\cos L + \cos L');$$

d. i.

$$\frac{aY}{br} = \frac{a}{b} \sin L, \quad \frac{bX}{ar} = 2 \frac{a}{b} \cos \tfrac{1}{2} (L + L') \cos \tfrac{1}{2} (L - L').$$

Das Weitere über diesen Gegenstand gehört in die Astronomie, und läßt sich hier ohne zu große Weitläufigkeit nicht erläutern.

Digitized by Google

men, und sind für zu verschiedenen Zeiten und demzufolge aus verschiedenen Punkten der Erdbahn angestellte Beobachtungen verschieden; die letzteren dagegen haben natürlich eine völlig unveränderliche Größe, und können aus den ersteren bloß vermittelst der Formeln 60) berechnet werden.

Bezeichnen wir den von den Linien ES und EF eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Ω, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\cos\Omega = \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\psi\cos\psi_1 + \cos\chi\cos\chi_1.$$

Also ist nach 13), weil nach 6)

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi$$

und bekanntlich

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

ist, wie man leicht findet:

$$62)\quad \cos\Omega = \sqrt{1 - i^2\sin\Theta^2},$$

also

$$63)\quad \sin\Omega = i\sin\Theta.$$

Ferner ist nach 18)

$$64)\quad \cos\Omega = \frac{1 - i\cos\Theta_1}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}},$$

folglich, wie man leicht findet:

$$65)\quad \sin\Omega = \frac{i\sin\Theta_1}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta_1}},$$

also

$$66)\quad \operatorname{tang}\Omega = \frac{i\sin\Theta_1}{1 - i\cos\Theta_1}.$$

Weil

$$\sin\Omega = i\sin\Theta_1\{1 + i(i - 2\cos\Theta_1)\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist, so ist, mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die sehr kleine Größe i von der zweiten Ordnung sind, näherungsweise

$$\sin\Omega = i\sin\Theta_1\{1 - \tfrac{1}{2}i(i - 2\cos\Theta_1)\},$$

folglich immer mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$67)\quad \sin\Omega = i\sin\Theta_1.$$

Weil nach 53)

$$i = K\sqrt{\frac{r'}{r}}$$

und nach 56) und 57)

$$i\cos\Theta = K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi - \frac{bX}{ar}\cos\psi\right)$$

Digitized by Google

und

$$i\cos\Theta_1 = K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)$$

ist, so findet man leicht

$$68)\quad \sin\Omega = K\sqrt{\frac{r'}{r} - \left(\frac{aY}{br}\cos\varphi - \frac{bX}{ar}\cos\psi\right)^2},$$

und näherungsweise, nämlich mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf die sehr kleine Größe i von der zweiten Ordnung sind:

$$69)\quad \sin\Omega = K\sqrt{\frac{r'}{r} - \left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1 - \frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)^2}.$$

Für $\chi_1 = 90^0$ ist nach der dritten der Gleichungen 18), weil bekanntlich $\cos\gamma = 0$ ist, $\cos\chi = 0$, also $\chi = 90^0$, und folglich $\chi = \chi_1$ oder $\chi - \chi_1 = 0$.

Für $\chi_1 = 0$ ist offenbar $\varphi_1 = 90^0$ und $\psi_1 = 90^0$, also $\cos\Theta_1 = 0$, folglich nach der dritten der Gleichungen 18)

$$\cos\chi = \frac{1}{\sqrt{1+i^2}},$$

also

$$\sin\chi = \frac{i}{\sqrt{1+i^2}},$$

und folglich nach 53)

$$\sin\chi = \frac{K\sqrt{\frac{r'}{r}}}{\sqrt{1+K^2\frac{r'}{r}}}.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf i von der zweiten Ordnung sind, ist $\sin\chi = i$, also

$$\sin\chi = K\sqrt{\frac{r'}{r}} \text{ oder } \chi = K\sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

Für $\chi_1 = 0$, d. i. nach dem Vorhergehenden für $\cos\Theta_1 = 0$ oder $\Theta_1 = 90^0$, ist nach 65) auch

$$\sin\Omega = \frac{i}{\sqrt{1+i^2}},$$

d. i.

$$\sin\Omega = \frac{K\sqrt{\frac{r'}{r}}}{\sqrt{1+K^2\frac{r'}{r}}};$$

und mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Beziehung auf i von der zweiten Ordnung sind:

$$\sin\Omega = K\sqrt{\frac{r'}{r}} \text{ oder } \Omega = K\sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

Digitized by Google

Wäre die Erdbahn ein Kreis, was sie in der That wenigstens nahe ist, so wäre $\frac{r'}{r} = 1$, und ein Jeder wird die diesem Falle entsprechenden Formeln aus den obigen leicht ableiten, und aus denselben weitere Folgerungen ziehen können.

Hauptsächlich kommt es nun noch darauf an, daß wir zeigen, wie die Constante K durch Beobachtungen bestimmt werden kann. Hat man aber ein und denselben Fixstern zwei Mal zu verschiedenen Zeiten, wo die Coordinaten der Erde und ihr Vector nach den astronomischen Tafeln X, Y, ϱ und X′, Y′, ϱ′ sind, beobachtet, und seine scheinbaren Coordinaten φ, ψ, χ und φ′, ψ′, χ′ durch die geeigneten astronomischen Hülfsmittel bestimmt, so daß also diese scheinbaren Coordinaten bekannt sind; so ergeben sich aus 60) die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\varphi_1 - \varphi = -\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{a\,Y}{b\,\varrho}\sin\varphi + \frac{b\,X}{a\,\varrho}\cos\psi\cot\varphi\right),$$

$$\psi_1 - \psi = \frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{b\,X}{a\,\varrho}\sin\psi + \frac{a\,Y}{b\,\varrho}\cos\varphi\cot\psi\right),$$

$$\chi_1 - \chi = \frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{a\,Y}{b\,\varrho}\cos\varphi - \frac{b\,X}{a\,\varrho}\cos\psi\right)\cot\chi$$

und

$$\varphi_1 - \varphi' = -\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{a\,Y'}{b\,\varrho'}\sin\varphi' + \frac{b\,X'}{a\,\varrho'}\cos\psi'\cot\varphi'\right),$$

$$\psi_1 - \psi' = \frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{b\,X'}{a\,\varrho'}\sin\psi' + \frac{a\,Y'}{b\,\varrho'}\cos\varphi'\cot\psi'\right),$$

$$\chi_1 - \chi' = \frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{a\,Y'}{b\,\varrho'}\cos\varphi' - \frac{b\,X'}{a\,\varrho'}\cos\psi'\right)\cot\chi';$$

oder der Kürze wegen

$$\varphi_1 - \varphi = -\frac{K}{\sin 1''}H,\ \psi_1 - \psi = \frac{K}{\sin 1''}M,\ \chi_1 - \chi = \frac{K}{\sin 1''}N$$

und

$$\varphi_1 - \varphi' = -\frac{K}{\sin 1''}H',\ \psi_1 - \psi' = \frac{K}{\sin 1''}M',\ \chi_1 - \chi' = \frac{K}{\sin 1''}N';$$

wo die Bedeutung von

H, M, N und H′, M′, N′

leicht von selbst erhellen wird.

Durch Subtraction erhält man aus diesen Gleichungen

$$\varphi - \varphi' = \frac{K}{\sin 1''}(H - H'),\ \psi - \psi' = -\frac{K}{\sin 1''}(M - M'),\ \chi - \chi' = -\frac{K}{\sin 1''}(N - N');$$

Digitized by Google

also

$$\frac{K}{\sin 1''} = \frac{\varphi - \varphi'}{H - H'},$$

$$\frac{K}{\sin 1''} = -\frac{\psi - \psi'}{M - M'},$$

$$\frac{K}{\sin 1''} = -\frac{\chi - \chi'}{N - N'};$$

mittelst welcher Formeln sich also die Constante $\frac{K}{\sin 1''}$ und daher auch K berechnen läßt. Daß die aus verschiedenen Beobachtungen hergeleiteten Werthe dieser Constante wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht ganz genau mit einander übereinstimmen können, versteht sich von selbst, weshalb man durch möglichste Vervielfältigung der Beobachtungen nach den gewöhnlichen Principien eine möglichst große Genauigkeit in der Bestimmung dieser für die Astronomie sehr wichtigen Constante $\frac{K}{\sin 1''}$, welche man die Aberrationsconstante nennt, zu erreichen suchen muß. Nach den neuesten von den Astronomen der Pulkowaer Sternwarte angestellten Beobachtungen und Untersuchungen ist

$$\frac{K}{\sin 1''} = 20'',4451.$$

M. s. Études d'Astronomie stellaire. Par F. G. W. Struve. St.-Petersbourg. 1847. p. 103.

Die Constante K_1, für welche man nach 46) und 52) die Ausdrücke

$$K_1 = V_1 \left(\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}\right)^{\frac{1}{2}} = V_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_1'}}$$

hat, kann man aber leicht aus den bekannten Elementen der Bewegung der Erde mittelst der astronomischen Tafeln oder Ephemeriden ableiten, was einem Jeden sogleich erhellen und hier keiner weitern Erläuterung bedürfen wird; und dann ist nach 47)

$$G = \frac{K_1}{K},$$

mittelst welcher Formel also die Geschwindigkeit des Lichts aus den beiden nach der vorhergehenden ausführlichen Anleitung bestimmten Constanten K und K_1 hergeleitet werden kann.

Ohne uns an diesem Orte auf noch mehr in's Einzelne gehende Entwickelungen über diesen im höchsten Grade interessanten Gegenstand, den wir im Vorhergehenden schon ziemlich weit ausgeführt haben, so daß eigentlich nur noch die Einführung der gewöhnlichen von den im Vorhergehenden gebrauchten etwas verschiedenen, aber auf dieselben leicht reducirbaren Coor-

Digitized by Google

dinaten*) nöthig sein würde, einlassen zu dürfen, wollen wir bloß noch bemerken, daß die auf dem vorhergehenden Wege erhaltene Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts sich mit einer merkwürdigen Genauigkeit an die nach der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Anweisung aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten hergeleiteten Bestimmung dieser Geschwindigkeit anschließt, so daß zugleich diese sehr nahe Uebereinstimmung der beiden auf sehr weit von einander verschiedenen Wegen gewonnenen Bestimmungen einer und derselben Größe mit einander ein sehr sicheres Kriterium für die Genauigkeit des gefundenen Resultats abgiebt. Auch liefert das Vorhergehende ein in jeder Beziehung höchst merkwürdiges und lehrreiches Beispiel, welches einem jeden Naturforscher als ein Muster für andere derartige Untersuchungen in seiner Wissenschaft dienen kann.

Zum Schluß müssen wir nun auch noch bemerken, daß die Aberration den deutlichsten und einleuchtendsten Beweis liefert, daß sich die Erde wirklich um die Sonne bewegt, und daß nicht das Umgekehrte Statt findet. Denn aus der vorhergehenden Theorie ist ersichtlich, daß die Erscheinungen der Aberration, welche sich aus den astronomischen Beobachtungen auf eine ganz unzweideutige Weise ergeben, nur dann sich genügend erklären lassen, wenn wir annehmen, daß der Beobachter des Himmels sich auf seinem Standpunkte in einer ununterbrochenen Bewegung befindet, und daß im Gegentheil diese Erscheinungen ganz wegfallen würden, wenn wir den Beobachter als ruhend annehmen wollten, wie es allerdings scheinbar der Fall ist. Auch giebt es überhaupt nach unserer Ueberzeugung gar keinen mehr einleuchtenden und stringenteren Beweis für die wirkliche Bewegung der Erde um die Sonne, wobei wir freilich für jetzt von dem, was uns die sogenannte physische Astronomie oder die Mechanik des Himmels in dieser Beziehung an die Hand giebt, ganz absehen. Man kann also in der That mit Recht sagen, daß man die elliptische Bewegung der Erde um die Sonne erst

---

*) Zwischen den Coordinaten φ, ψ, χ und φ_1, ψ_1, χ_1 und den gewöhnlichen in der Astronomie gebräuchlichen Coordinaten, die wir im Allgemeinen durch λ, β und λ_1, β_1 bezeichnen wollen, finden, wenn ω eine gewisse constante Größe bezeichnet, wie leicht zu beweisen ist, Gleichungen von der folgenden allgemeinen Form Statt:

$$\cos\varphi = \cos(\omega - \lambda)\cos\beta,$$
$$\cos\psi = \sin(\omega - \lambda)\cos\beta,$$
$$\cos\chi = \sin\beta$$

und

$$\cos\varphi_1 = \cos(\omega - \lambda_1)\cos\beta_1,$$
$$\cos\psi_1 = \sin(\omega - \lambda_1)\cos\beta_1,$$
$$\cos\chi_1 = \sin\beta_1.$$

Mittelst dieser Gleichungen können φ, ψ, χ und φ_1, ψ_1, χ_1 leicht aus λ, β und λ_1, β_1, und umgekehrt λ, β und λ_1, β_1 leicht aus φ, ψ, χ und φ_1, ψ_1, χ_1 gefunden werden.

Digitized by Google

hat am Himmel suchen müssen, und der berühmte Entdecker der Aberration, Bradley, hat sich daher durch diese Entdeckung in mehr als einer Beziehung ein unvergängliches Denkmal in der Geschichte der Astronomie für alle Zeiten gestiftet. Die Schönheit und Wichtigkeit dieser Theorie hat uns daher auch veranlaßt, derselben in diesem Werke die obige ausführlichere Darstellung zu widmen; denn dieselbe hat gewiß für die Astronomie und Physik eine fast gleiche Bedeutung.

Zweites Kapitel.

Die ersten Gründe der Photometrie.

§. 5.

Wenn wir uns von dem von einem leuchtenden Punkte nach allen Seiten hin ausgehenden Lichte einen pyramidalischen oder konischen Theil, dessen Spitze der leuchtende Punkt ist, abgesondert, und denselben von parallelen Ebenen, deren Entfernungen von dem leuchtenden Punkte durch

$$D_1, D_2, D_3, D_4, \ldots D_n$$

bezeichnet werden mögen, durchschnitten denken; so fallen auf die von dem leuchtenden Punkte erleuchteten Theile dieser Ebenen, deren Flächenräume wir respective durch

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots F_n$$

bezeichnen wollen, insofern nämlich immer bloß die in Rede stehende Lichtpyramide oder der in Rede stehende Lichtkegel in's Auge gefaßt wird, offenbar völlig gleiche Lichtmengen. Da nun aber diese gleichen Lichtmengen auf den Figuren

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots F_n$$

in demselben Maaße mehr zerstreut oder ausgebreitet sind, in welchem die Flächenräume dieser Figuren mit der Entfernung von dem leuchtenden Punkte wachsen, so müssen offenbar die Stärken oder Intensitäten der Erleuchtung, oder schlechthin die Erleuchtungen dieser Figuren, welche respective durch

$$E_1, E_2, E_3, E_4, \ldots E_n$$

bezeichnet werden mögen, sich umgekehrt wie die Flächenräume

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots F_n$$

zu einander verhalten, und es muß also

$$E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : \ldots E_n = F_n : \ldots : F_4 : F_3 : F_2 : F_1$$

Digitized by Google

sein. Nach einem bekannten stereometrischen Satze ist aber

$$F_n : \ldots : F_4 : F_3 : F_2 : F_1 = D_n^2 : \ldots : D_4^2 : D_3^2 : D_2^2 : D_1^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$E_1 : E_2 : E_3 : E_4 : \ldots : E_n = D_n^2 : \ldots : D_4^2 : D_3^2 : D_2^2 : D_1^2,$$

woraus sich unmittelbar der folgende Satz ergiebt:

Wenn man eine Ebene parallel mit sich selbst von einem leuchtenden Punkte entfernt, so nimmt deren Erleuchtung durch den leuchtenden Punkt in demselben Verhältnisse ab, in welchem das Quadrat ihrer Entfernung von dem leuchtenden Punkte zunimmt. Und wenn man eine Ebene parallel mit sich selbst einem leuchtenden Punkte nähert, so nimmt deren Erleuchtung durch den leuchtenden Punkt in demselben Verhältnisse zu, in welchem das Quadrat ihrer Entfernung von dem leuchtenden Punkte abnimmt.

Ueberlegt man nur, daß die Oberflächen der Kugeln den Quadraten ihrer Halbmesser bekanntlich proportional sind, so wird mittelst ganz ähnlicher Betrachtungen wie vorher auf der Stelle erhellen, daß der vorhergehende Satz auch von Kugelflächen gilt, welche mit verschiedenen Halbmessern um einen leuchtenden Punkt als Mittelpunkt beschrieben sind, wenn man nur statt der Entfernungen der Ebenen von dem leuchtenden Punkte im Vorhergehenden jetzt die Halbmesser der beschriebenen Kugelflächen setzt.

§. 6.

Denken wir uns jetzt einen Cylinder paralleler Strahlen von zwei gegen dieselben unter den Winkeln i und i_1 geneigten Ebenen durchschnitten, und bezeichnen die Flächenräume der entstehenden Durchschnitte durch F und F_1, den Flächenraum des Durchschnitts einer gegen die Strahlen senkrechten Ebene mit dem Cylinder aber durch $\mathfrak{F}$, so sind offenbar $90^0 - i$ und $90^0 - i_1$ die Neigungswinkel der ebenen Figuren F und F_1 gegen die ebene Figur $\mathfrak{F}$, und nach einem bekannten Satze von den Projectionen ist folglich

$$\mathfrak{F} = F\cos(90^0 - i), \quad \mathfrak{F} = F_1\cos(90^0 - i_1);$$

d. i.

$$\mathfrak{F} = F\sin i, \quad \mathfrak{F} = F_1\sin i_1;$$

also

$$F\sin i = F_1\sin i_1,$$

und folglich

$$F_1 : F = \sin i : \sin i_1.$$

Bezeichnen wir nun aber die Erleuchtungen der gegen die parallelen Strahlen unter den Winkeln i und i_1 geneigten Ebenen durch E und E_1, so ist nach einer ganz ähnlichen Betrachtung

Digitized by Google

wie im vorhergehenden Paragraphen

$$E : E_1 = F_1 : F,$$

und folglich nach der unmittelbar vorhergehenden Proportion

$$E : E_1 = \sin i : \sin i_1,$$

woraus sich der folgende Satz ergiebt:

Die Erleuchtungen gegen parallele Strahlen ungleich geneigter Ebenen verhalten sich zu einander wie die Sinus der Neigungswinkel der Ebenen gegen die parallelen Strahlen.

§. 7.

Wir wollen uns jetzt ein unendlich kleines Element einer von einem strahlenden Punkte erleuchteten Fläche denken, und die von dem strahlenden Punkte nach diesem als einen Punkt betrachteten Elemente gezogene gerade Linie, d. h. die Entfernung des Elements von dem strahlenden Punkte, durch D, die Erleuchtung des Elements durch den strahlenden Punkt aber durch E bezeichnen. Denken wir uns dann ferner um den strahlenden Punkt als Mittelpunkt mit den Halbmessern $\mathfrak{D}$ und D, wo $\mathfrak{D}$ eine ganz beliebige Länge bezeichnet, Kugelflächen beschrieben, und bezeichnen deren Erleuchtungen durch den strahlenden Punkt durch $\mathfrak{E}$ und E', so ist nach §. 5., weil auf demselben Halbmesser senkrecht stehende unendlich kleine Elemente concentrischer Kugelflächen als parallele Ebenen betrachtet werden können,

$$\mathfrak{E} : E' = D^2 : \mathfrak{D}^2.$$

Weil aber die in der Entfernung D von dem strahlenden Punkte auf das mit dieser Entfernung als Halbmesser beschriebene unendlich kleine Kugelflächenelement und das zuerst gedachte unendlich kleine Flächenelement fallenden Strahlen in der Nähe dieser Elemente als parallel betrachtet werden können, so ist, wenn wir den Neigungswinkel des zuerst gedachten Flächenelements gegen diese als parallel betrachteten Strahlen, d. h. überhaupt seinen Neigungswinkel gegen die nach ihm, als einen bloßen Punkt betrachtet, von dem strahlenden Punkte gezogene gerade Linie, durch i bezeichnen, nach §. 6.

$$E' : E = \sin 90° : \sin i,$$

d. i.

$$E' : E = 1 : \sin i.$$

Durch Zusammensetzung der beiden so eben bewiesenen Proportionen

$$\mathfrak{E} : E' = D^2 : \mathfrak{D}^2,$$
$$E' : E = 1 : \sin i$$

ergiebt sich aber nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$\mathfrak{E} : E = D^2 : \mathfrak{D}^2 \sin i,$$

Digitized by Google

also

$$E = \frac{D^2 \sin i}{D^2} \mathfrak{E}.$$

§. 8.

Wir wollen uns nun ferner zwei leuchtende Punkte A und $\mathfrak{A}$ denken, denen wir aus irgend einem Grunde die verschiedenen Lichtstärken L und $\mathfrak{L}$ beizulegen berechtigt sind. Von dem ersten A dieser beiden Punkte werde ein unendlich kleines Flächenelement erleuchtet, dessen Entfernung von dem Punkte A durch D, und dessen Neigungswinkel gegen die von A nach ihm gezogene gerade Linie durch i bezeichnet werden mag. Die Erleuchtung dieses Flächenelements sei E. Denken wir uns nun um die Punkte A und $\mathfrak{A}$ mit dem beliebigen Halbmesser D Kugelflächen beschrieben, und bezeichnen deren Erleuchtungen durch die Punkte A und $\mathfrak{A}$ respective durch E′ und $\mathfrak{E}$; so ist nach der im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Gleichung

$$E = \frac{D^2 \sin i}{D^2} E'.$$

Offenbar ist aber

$$E' : \mathfrak{E} = L : \mathfrak{L},$$

also

$$E' = \frac{L}{\mathfrak{L}} \mathfrak{E},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$E = \frac{L D^2 \sin i}{\mathfrak{L} D^2} \mathfrak{E}.$$

Setzen wir, was offenbar verstattet ist, die Größen D, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{E}$ sämmtlich der Einheit gleich, d. h. nehmen wir die Erleuchtung einer mit der zum Grunde gelegten Längeneinheit als Halbmesser um einen leuchtenden Punkt, dessen Lichtstärke als Einheit der Lichtstärken angenommen wird, als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche als Einheit der Erleuchtungen an, so ist nach dem Vorgehenden

$$E = \frac{\sin i}{D^2} L, \quad L = \frac{D^2}{\sin i} E.$$

Für $i = 90^0$ ist

$$E = \frac{1}{D^2} L, \quad L = D^2 E.$$

Weil z. B. die Entfernungen der Erde, der Venus und des Jupiters von der Sonne sich nahe wie $1 : \frac{3}{4} : 5$ zu einander verhalten, so verhalten sich, wenn L jetzt die Lichtstärke der Sonne

Digitized by Google

bezeichnet, auf diesen drei Planeten die Erleuchtungen von Ebenen, welche von den Sonnenstrahlen unter rechten Winkeln getroffen werden, nahe wie $L : \frac{16}{9}L : \frac{1}{25}L$, d. i. nahe wie $1 : \frac{16}{9} : \frac{1}{25}$ zu einander. Aehnliche Vergleichungen würden sich mittelst der obigen Formeln leicht mehrere anstellen lassen.

§. 9.

Wenn auch die folgende Aufgabe mehr von mathematischem als von physikalischem Interesse ist, so wollen wir dieselbe doch, um eine Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Formeln zu zeigen, und weil die Aufgabe in der Praxis hin und wieder von Nutzen sein kann, hier auflösen:

Ueber einer Ebene befinde sich ein leuchtender Punkt, welcher sich in einer auf der Ebene senkrecht stehenden gegebenen geraden Linie der Ebene mehr nähern und weiter von derselben entfernen läßt. Man soll diejenige Entfernung des leuchtenden Punktes von der Ebene finden, bei welcher die Erleuchtung aller der Elemente der Ebene, die von dem Durchschnittspunkte der auf derselben senkrecht stehenden geraden Linie, in welcher sich der leuchtende Punkt bewegen läßt, mit der Ebene die gegebene Entfernung a haben, am größten ist.

Weil für $a = 0$ offenbar auch die gesuchte Entfernung verschwinden, der leuchtende Punkt nämlich mit dem von demselben zu erleuchtenden Elemente der Ebene zusammenfallen muß, so sind wir berechtigt, diesen speciellen Fall von unserer folgenden Betrachtung auszuschließen.

Bezeichnen wir aber, dies vorausgesetzt, überhaupt durch x die gesuchte Entfernung des leuchtenden Punktes von der Ebene, und durch y die entsprechende Erleuchtung der in der Aufgabe näher bestimmten Elemente der Ebene durch den leuchtenden Punkt, so ist offenbar $\sqrt{a^2 + x^2}$ die Entfernung dieser Elemente von dem leuchtenden Punkte, also

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

der Sinus des Neigungswinkels der die Elemente treffenden Strahlen gegen die gegebene Ebene. Folglich ist nach der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formel, wenn L die Lichtstärke des leuchtenden Punktes, welche natürlich eben so wie a als constant zu betrachten ist, bezeichnet,

$$y = \frac{x}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} L.$$

Setzen wir aber

$$z = \sqrt{a^2 + x^2}, \text{ also } x = \sqrt{z^2 - a^2};$$

Digitized by Google

so wird

$$y = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z^3} L = \frac{1}{z^2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}} \cdot L,$$

und folglich, wenn wir

$$u = \frac{a^2}{z^2}, \text{ also } \frac{1}{z^2} = \frac{u}{a^2}$$

setzen:

$$y = \frac{u\sqrt{1-u}}{a^2} L.$$

Weil nun a und L constante Größen sind, so wird y ein Maximum, wenn $u\sqrt{1-u}$ oder, was offenbar dasselbe ist, $(u\sqrt{1-u})^2 = u^2(1-u)$ ein Maximum wird, so daß es also jetzt darauf ankommt, den Werth von u zu bestimmen, für welchen die Größe $u^2(1-u)$ ein Maximum wird, natürlich mit Rücksicht auf die aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Bedingungen, daß die Größe

$$u = \frac{a^2}{z^2} = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$$

offenbar immer positiv und nicht größer als die Einheit ist, auch nie verschwinden kann, weil nach dem Vorhergehenden a nicht verschwinden soll.

Lassen wir u um die beliebige Größe v sich verändern, so ist, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$(u+v)^2\{1-(u+v)\} = u^2(1-u) + u(2-3u)v + (1-3u)v^2 - v^3.$$

Bestimmen wir nun u so, daß das zweite Glied der Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens verschwindet, d. h. daß $u(2-3u) = 0$ ist, so ist entweder $u = 0$ oder $2-3u = 0$. Weil aber nach dem Obigen nicht $u = 0$ sein kann, so muß, wenn u auf die in Rede stehende Weise bestimmt werden soll, $2-3u = 0$, also

$$u = \frac{2}{3}$$

sein. Führt man diesen Werth von u in die vorhergehende Gleichung ein, so wird dieselbe:

$$\left(\frac{2}{3}+v\right)^2\left\{1-\left(\frac{2}{3}+v\right)\right\} = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right) - v^2 - v^3,$$

woraus sich zuvörderst auf der Stelle ergiebt, daß für jedes positive v

$$\left(\frac{2}{3}+v\right)^2\left\{1-\left(\frac{2}{3}+v\right)\right\} < \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

ist. Nimmt man aber v negativ, so kann doch der absolute Werth von v nicht größer als $\frac{2}{3}$ genommen werden, weil näm-

Digitized by Google

lich $\frac{2}{3}+v$, welches überhaupt einen beliebigen Werth der Größe u darstellt, nach dem Obigen nothwendig positiv sein muß, und es ist also, dies vorausgesetzt, $-v^2-v^3$ auch für negative v immer eine negative Größe, folglich nach dem Vorhergehenden auch für negative v immer

$$\left(\frac{2}{3}+v\right)^2\left\{1-\left(\frac{2}{3}+v\right)\right\}<\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right).$$

Daher ist für alle nur den speciellen Bedingungen der Aufgabe genügende positive und negative v

$$\left(\frac{2}{3}+v\right)^2\left\{1-\left(\frac{2}{3}+v\right)\right\}<\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right),$$

also offenbar

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

der größte Werth, welchen überhaupt die Größe $u^2(1-u)$ erhalten kann, so daß also diese Größe, und folglich nach dem Obigen auch die Erleuchtung y für $u=\frac{2}{3}$ ein Maximum wird.

Weil aber nach dem Obigen

$$x=\sqrt{z^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{u}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{u}-1}$$

ist, so wird die Erleuchtung y für

$$x=a\sqrt{\frac{3}{2}-1}=a\sqrt{\frac{1}{2}}=0,707\,.\,a$$

ein Maximum, wodurch also unsere Aufgabe jetzt vollständig aufgelöst ist.

Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Strahlen gegen die gegebene Ebene überhaupt durch i, so ist nach dem Obigen

$$\sin i=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

und folglich für das Maximum der Erleuchtung

$$\sin i=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{3}},$$

woraus sich nahe $i=35^0\,.\,16'$ ergiebt, unter welchem Winkel also die am stärksten erleuchteten Elemente der gegebenen Ebene von den aus dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen getroffen werden.

Weil nach dem Obigen

$$y=\frac{x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}L$$

Digitized by Google

ist, so ist, wie man durch leichte Rechnung findet, die größte Erleuchtung selbst:

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{L}{a^2},$$

d. i. nahe

$$y = 0{,}385 \cdot \frac{L}{a^2}.$$

In Bezug auf die Höhe der Flammen der Lichter und Lampen über den von denselben zu erleuchtenden Ebenen läßt sich von dem Vorhergehenden eine nützliche Anwendung machen.

§. 10.

In dem Vorhergehenden sind die ersten Grundzüge der Wissenschaft enthalten, welche unter dem Namen der Photometrie sich mit der Messung der Stärke oder Intensität des Lichts beschäftigt. So wenig wir uns aber auch hier, wo wir nur elementare mathematische Kenntnisse vorauszusetzen die Absicht haben, auf eine weitere Ausführung derselben einlassen können, so müssen wir doch nun noch, von dem physikalischen Standpunkte aus, einige der Instrumente beschreiben, welche zu der praktischen Ausführung solcher Messungen der Stärke oder Intensität des Lichts in der Physik gebraucht und Photometer genannt zu werden pflegen, so weit deren Einrichtung schon hier, ohne erst später zu entwickelnde Lehren vorauszusetzen, zum Verständniß gebracht werden kann.

Das älteste und einfachste Instrument dieser Art ist schon von Bouguer und Lambert, welche als die Begründer der Photometrie zu betrachten sind, später von Rumford, nach dem es jetzt gewöhnlich benannt wird, angegeben worden. Eine ebene weiße Tafel ist auf einer größeren ebenen Grundfläche senkrecht gegen dieselbe, und vor der Tafel auf der nämlichen Grundfläche gleichfalls in senkrechter Lage gegen dieselbe ist ein schmaler stabförmiger undurchsichtiger Körper aufgestellt. Läßt man nun auf diesen Körper in einem sorgfältig verfinsterten Zimmer von zwei leuchtenden Punkten A und $\mathfrak{A}$, deren Lichtstärken durch L und $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden mögen, Licht fallen, so werden auf der weißen Tafel zwei dem in Rede stehenden stabförmigen Körper entsprechende Schattenprojectionen S und $\mathfrak{S}$ entstehen. Wäre der leuchtende Punkt A nicht vorhanden, so würde $\mathfrak{S}$ ganz dunkel sein, und empfängt also, wenn A zugegen ist, bloß von diesem leuchtenden Punkte Licht. Wäre eben so der leuchtende Punkt $\mathfrak{A}$ nicht vorhanden, so würde S ganz dunkel sein, und empfängt also, wenn $\mathfrak{A}$ zugegen ist, bloß von diesem leuchtenden Punkte Licht. Wenn also, wie hier angenommen wird, die beiden leuchtenden Punkte A und $\mathfrak{A}$ gleichzeitig zugegen sind, so empfängt S bloß von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ bloß von A

Digitized by Google

Licht. Bezeichnen wir nun die Erleuchtungen von S und S — streng genommen nur einzelner bestimmter Elemente derselben — respective durch E und $\mathfrak{E}$, ferner die Entfernungen der Punkte A und $\mathfrak{A}$ von S und S respective durch D und $\mathfrak{D}$, endlich die Neigungswinkel der von A und $\mathfrak{A}$ auf S und S fallenden Strahlen gegen S und S respective durch i und $\mathfrak{i}$; so ist nach §. 8.

$$E = \frac{\sin i}{D^2} L \text{ und } \mathfrak{E} = \frac{\sin \mathfrak{i}}{\mathfrak{D}^2} \mathfrak{L}.$$

Verändert man nun aber nach und nach mittelst mehrmaliger Versuche die Lage der beiden leuchtenden Punkte gegen die weiße Tafel so lange, bis die beiden Schattenprojectionen — streng genommen einzelne bestimmte Elemente derselben — mit möglichster Genauigkeit gleich erleuchtet sich darstellen, so ist im Obigen $E = \mathfrak{E}$, und folglich

$$\frac{\sin i}{D^2} L = \frac{\sin \mathfrak{i}}{\mathfrak{D}^2} \mathfrak{L},$$

also

$$L : \mathfrak{L} = \frac{\sin i}{\mathfrak{D}^2} : \frac{\sin \mathfrak{i}}{D^2},$$

oder

$$L : \mathfrak{L} = \frac{D^2}{\sin i} : \frac{\mathfrak{D}^2}{\sin \mathfrak{i}},$$

oder

$$L : \mathfrak{L} = \frac{D^2}{\mathfrak{D}^2} : \frac{\sin i}{\sin \mathfrak{i}},$$

oder

$$L : \mathfrak{L} = D^2 \sin \mathfrak{i} : \mathfrak{D}^2 \sin i.$$

Auch ist

$$L = \frac{D^2 \sin i}{\mathfrak{D}^2 \sin i} \mathfrak{L} = \frac{D^2}{\mathfrak{D}^2} \cdot \frac{\sin \mathfrak{i}}{\sin i} \mathfrak{L}.$$

Ist man $i = \mathfrak{i}$ zu setzen berechtigt, so ist

$$L : \mathfrak{L} = D^2 : \mathfrak{D}^2$$

oder

$$L = \frac{D^2}{\mathfrak{D}^2} \mathfrak{L}.$$

Nimmt man die Lichtstärke des Punktes $\mathfrak{A}$ als Einheit der Lichtstärken an, d. h. setzt man $\mathfrak{L} = 1$, so ist

$$L = \frac{D^2}{\mathfrak{D}^2} \cdot \frac{\sin \mathfrak{i}}{\sin i},$$

und wenn man $i = \mathfrak{i}$ zu setzen berechtigt ist:

$$L = \frac{D^2}{\mathfrak{D}^2}.$$

Digitized by Google

Aus dieser Darstellung wird mit hinreichender Deutlichkeit erhellen, wie man Versuche mit dem in seiner Construction so einfachen Rumford'schen Photometer zweckmäßig anzuordnen hat.

§. 11.

Das Photemeter von Ritchie, mit welchem das Photometer von Potter dem Princip nach übereinstimmt, besteht, wie Fig. 3. zeigt, aus einem auf einem einfachen Stativ aufgestellten Kasten MN, welcher auf beiden Seiten offen und inwendig geschwärzt ist. In diesem Kasten sind zwei ebene weiße gegen einander unter einem Winkel von 90^0, gegen die obere und untere Seitenwand des Kastens unter Winkeln von 45^0 geneigte Papierflächen G und H aufgestellt, denen gegenüber sich in dem Kasten die mit einer Röhre versehene Oeffnung O befindet. Sind nun wieder A und $\mathfrak{A}$ zwei leuchtende Punkte, deren Lichtstärken L und $\mathfrak{L}$ mit einander verglichen werden sollen, so stellt man dieselben den Seitenöffnungen des Kastens so gegenüber, daß die Strahlen nahe den Seitenwänden des Kastens parallel auf die beiden Papierflächen G und H fallen, und ändert ihre Entfernungen von den beiden Papierflächen so lange ab, bis die letztern, durch die Oeffnung O betrachtet, genau gleich erleuchtet erscheinen. Dann hat man, wenn D und $\mathfrak{D}$ die horizontalen Entfernungen der beiden leuchtenden Punkte von den beiden Papierflächen bezeichnen, weil jetzt die Neigungswinkel der Strahlen gegen die erleuchteten Flächen augenscheinlich einander gleich sind, nach, den im vorhergehenden Paragraphen angestellten ganz ähnlichen Betrachtungen offenbar die Gleichung

$$\frac{L}{D^2} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{D}^2},$$

aus welcher man zur Vergleichung der beiden Lichtstärken L und $\mathfrak{L}$ sogleich die Proportion

$$L : \mathfrak{L} = D^2 : \mathfrak{D}^2$$

erhält.

Von einer mir zweckmäßig scheinenden Abänderung dieses Instruments wird im fünften Kapitel §. 28. die Rede sein. Die meisten der andern von verschiedenen Physikern angegebenen Photometer scheinen mir jedoch, so sinnreich dieselben auch zum Theil ausgedacht sein mögen, namentlich in mathematischer Rücksicht noch auf zu wenig sichern Grundsätzen zu beruhen, als daß ich in diesem Werke zu einer genaueren Beschreibung derselben besondere Veranlassung finden könnte.

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Von der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts im Allgemeinen.

§. 12.

Wenn man einen durch eine möglichst kleine Oeffnung in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers in das letztere tretenden Lichtstrahl auf eine möglichst glatt polirte ebene Fläche fallen läßt, so findet man, daß der geradlinige Weg des Strahls unterbrochen wird, und derselbe aus zwei auf derselben Seite der in Rede stehenden ebenen Fläche liegenden Strahlen, welche aber eigentlich nur als zwei Theile eines und desselben Strahls zu betrachten sind, zu bestehen scheint, die in dem Punkte, in welchem die polirte Ebene von dem auf sie fallenden Strahle getroffen wird, einen Winkel mit einander einschließen. Diese Erscheinung nennt man die Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts, und jede möglichst glatt polirte ebene oder krumme Fläche wird ein Spiegel genannt, wobei man jedoch, was für das Folgende von Wichtigkeit ist, schon hier nicht außer Acht zu lassen hat, daß man bei einem krummen Spiegel offenbar immer bloß den unendlich kleinen Theil oder das unendlich kleine Element desselben in der Nähe des Punktes, in welchem der Spiegel von dem auf ihn fallenden Strahle getroffen wird, oder, da ein jedes solches unendlich kleines Element als eben betrachtet werden kann, die den Spiegel in dem in Rede stehenden Punkte berührende Ebene als die spiegelnde Fläche zu betrachten braucht, wodurch also die Betrachtung eines jeden krummen Spiegels unmittelbar auf die Betrachtung eines ebenen Spiegels reducirt wird. Der Theil des Strahles von seinem Ausgangspunkte bis zu dem Punkte, in welchem der Spiegel von dem Strahle getroffen wird, heißt der einfallende Strahl, und der in Rede stehende Punkt wird der Einfallspunkt genannt; den anderen von dem Einfallspunkte ausgehenden Theil des Strahls nennt man den zurückgeworfenen Strahl oder auch den reflectirten Strahl. Das in dem Einfallspunkte auf den Spiegel auf der nämlichen Seite desselben, auf welcher der einfallende und zurückgeworfene Strahl liegen, errichtete Perpendikel, heißt das Einfallsloth, und die beiden 90^0 nicht übersteigenden Winkel, welche der einfallende und zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslothe einschließen, werden respective der Einfallswinkel und der Zurückwerfungswinkel oder der Reflexionswinkel genannt.

Digitized by Google

§. 13.

Um die Gesetze der Zurückwerfung des Lichts auf eine möglichst einfache Weise zu erforschen, nehme man eine etwa die Form eines Rechtecks habende ebene Fläche **ABCD** (Fig. 4.), auf welcher um einen Punkt **O** in der Seite **AB** als Mittelpunkt ein etwa in Viertelgrade eingetheilter Halbkreis beschrieben ist, und bringe diese Ebene in eine solche Lage, daß die Seite **AB** derselben in die bei dem in einem verfinsterten Zimmer anzustellenden Versuche gebrauchte spiegelnde Ebene, der Mittelpunkt **O** des eingetheilten Halbkreises mit dem Einfallspunkte zusammen fällt, und der einfallende und zurückgeworfene Strahl auf der Ebene **ABCD** als helle gerade Linien sich darstellen. Untersucht man unter diesen Voraussetzungen die Lage der Ebene **ABCD** gegen die spiegelnde Ebene etwa nur mit Hülfe eines gewöhnlichen rechtwinkligen Dreiecks von Holz, so wird man allemal, unter welchen Verhältnissen man den Versuch auch anstellen mag, finden, daß die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen, und folglich der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der zurückgeworfene Strahl jederzeit in einer und derselben Ebene liegen. Mißt man aber ferner an dem eingetheilten Kreise den Einfallswinkel und den Zurückwerfungswinkel oder Reflexionswinkel, so wird sich bei allen Versuchen auf völlig unzweideutige Weise die Gleichheit dieser beiden Winkel ergeben, woraus, weil der einfallende und zurückgeworfene Strahl wenigstens im Allgemeinen nicht zusammenfallen und immer auf einer und derselben Seite der spiegelnden Ebene liegen, zugleich auch von selbst folgt, daß das Einfallsloth immer zwischen dem einfallenden und dem zurückgeworfenen Strahle liegt. Hiernach läßt sich nun das Gesetz der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts im Allgemeinen auf folgende Art aussprechen:

Bei der Zurückwerfung oder Reflexion des Lichts liegen der einfallende und der zurückgeworfene Strahl jederzeit auf einer und derselben Seite der spiegelnden Fläche; in der durch diese beiden Strahlen bestimmten Ebene liegt zwischen denselben auch das Einfallsloth, und der Einfallswinkel ist immer dem Zurückwerfungswinkel oder dem Reflexionswinkel gleich.

Ein senkrecht auf einen Spiegel fallender Strahl muß also hiernach immer wieder nach derselben Richtung, nach welcher er auffiel, zurückgeworfen werden, unter der gemachten Voraussetzung folglich immer der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der reflectirte Strahl in eine und dieselbe gerade Linie zusammenfallen, was auch die Erfahrung vollkommen bestätigt.

Der Theil der Optik, welcher sich, von dem obigen allgemeinen Grundgesetze ausgehend, mit der genauen Entwickelung aller der Gesetze beschäftigt, nach welchen die von der Zurück-

Digitized by Google

werfung oder Reflexion des Lichts hervorgebrachten Erscheinungen erfolgen, heißt die Katoptrik.

Die Versuche, welche uns vorher zu dem obigen Grundgesetze der Zurückwerfung des Lichts geführt haben, sind ziemlich roh, aber absichtlich von uns gewählt worden, weil der durch sie dargebotene Weg jedenfalls der leichteste und unmittelbarste Weg ist, auf welchem man zu diesem Gesetze gelangen kann. Wir wollen nun aber noch andere Mittel angeben, durch welche man denselben Zweck auf genauere Weise zu erreichen im Stande ist, auch ohne eines verfinsterten Zimmers zu bedürfen, welches aber, wie wir uns späterhin noch oft zu überzeugen Gelegenheit haben werden, für viele optische Versuche ein sehr wichtiges, oft unentbehrliches Hülfsmittel ist.

Der berühmte französische Optiker Cauchoix hat folgenden in Fig. 5. abgebildeten Apparat zur Erläuterung der obigen Gesetze der Zurückwerfung des Lichts angegeben, welcher auch bei andern Untersuchungen zuweilen gute Dienste leisten kann. An einer auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Dreifuße aufgestellten Säule ist ein eingetheilter Kreis befestigt, dessen Ebene sich nach einem Bleilothe mit Hülfe der drei Schrauben vertikal stellen läßt. In dem Mittelpunkte C dieses Kreises ist in der Richtung dessen durch den Nullpunkt der Theilung gehenden Durchmessers AB ein ebener Spiegel angebracht, welcher sich, nachdem der Kreis vertikal gestellt worden, durch geeignete Schrauben mit Hülfe eines Niveaus genau horizontal, also senkrecht gegen die Ebene des vertikalen Kreises stellen läßt. An dem Umfange des Kreises lassen sich zwei auf seiner Ebene senkrecht stehende Läufer verschieben, in denen genau in gleicher Entfernung von der Ebene des Kreises die kleinen Löcher O und O′ angebracht sind, und auf dem Spiegel ist ein Metallstreifen befestigt, dessen eine geradlinige scharfe Kante vom Mittelpunkte des Kreises ausgeht und auf dem Durchmesser AB senkrecht steht. Auf dieser Kante des Metallstreifens ist eine Marke C′ angebracht, die vom Mittelpunkte C des Kreises genau eben so weit entfernt ist, wie von der Ebene desselben die Löcher O und O′, von denen aus auch noch auf den Läufern zwei auf der Ebene des Kreises senkrecht stehende gerade Linien gezogen werden müssen, welche zur Angabe der den Löchern O und O′ als deren Projectionen entsprechenden Punkte der Theilung des Limbus dienen. Führt man nun, nachdem die Ebene des Kreises genau vertikal, die Ebene des Spiegels genau horizontal gestellt worden ist, den Läufer O auf einen beliebigen Punkt der Theilung, stellt ihn in dieser Lage fest, verschiebt dann den Läufer O′ so lange, bis man, durch das Loch O′ sehend, das Loch O durch Reflexion von dem Spiegel erblickt, und stellt den Läufer O′ in dieser Lage fest; so wird man immer 1) das Loch O genau auf der oben durch C′ bezeichneten Marke wahrnehmen, so daß das Bild des Lochs O mit der Marke C′ zusammenzufallen scheint; und wenn man 2) die beiden spitzen Winkel auf dem eingetheilten Limbus des

Digitized by Google

Kreises ablieſt, welche die Projectionen der Linien C' O und C' O' auf der Ebene des Kreiſes mit dem Durchmeſſer AB einſchließen, ſo wird man jederzeit finden, daß dieſe beiden Winkel einander gleich ſind. Daß hierin die obigen Geſetze der Zurückwerfung des Lichts vollſtändig und ganz von ſelbſt ausgeſprochen ſind, geht aus der vorher beſchriebenen Einrichtung des Inſtruments unzweideutig hervor und bedarf keiner weitern Erläuterung.

Eine andere Methode, ſich von der Richtigkeit dieſer Geſetze zu verſichern, kommt auf das Folgende zurück. Eine mit den nöthigen Stellſchrauben verſehene ſpiegelnde Ebene MN (Fig. 6.) bringe man mit Hülfe eines Niveaus genau in eine horizontale Lage, und ſtelle die Ebene eines eingetheilten Kreiſes, um deſſen Mittelpunkt C eine Alhidade beweglich iſt, mit Hülfe der dazu nöthigen gehörig angebrachten Stellſchrauben und eines Lothes ſo, daß der auf dem durch den Nullpunkt A der Theilung gehenden Durchmeſſer AB ſenkrecht ſtehende Durchmeſſer A'B' genau vertikal, der Durchmeſſer AB alſo genau horizontal iſt. Die Alhidade trägt an ihren Enden zwei auf ihrer Ebene, und alſo auch auf der Ebene des Kreiſes ſenkrecht ſtehende Dioptern, von denen jede mit einem kleinen Loche verſehen iſt, welches ſo angebracht ſein muß, daß die beiden Löcher von der Ebene der Alhidade, und alſo auch von der Ebene des Kreiſes, gleich weit entfernt ſind, und die Projection der durch die Mittelpunkte der beiden Löcher beſtimmten geraden Linie auf der Ebene der Alhidade, welche durch eine auf dieſer Ebene eingeriſſene feine gerade Linie bezeichnet ſein muß, durch den Mittelpunkt des eingetheilten Kreiſes geht. Iſt nun S ein beliebiger Licht ausſendender Punkt, ſo gebe man, wozu die nöthigen Vorrichtungen angebracht ſein müſſen, der Ebene des Kreiſes durch Drehung um den vertikalen Durchmeſſer A'B', und der Alhidade durch Drehung um den Mittelpunkt C eine ſolche Lage, daß man, durch das eine der Löcher in den Dioptern hindurch ſehend, den Punkt S genau in der Mitte des andern Lochs erblickt, ſtelle in dieſer Lage die Ebene des Kreiſes und die Alhidade feſt, und leſe auf dem Limbus die Größe des Winkels ACS ab. Dann wird es immer möglich ſein, durch bloße Drehung der wieder gelöſten Alhidade um den Mittelpunkt C, ohne die Ebene des Kreiſes im Geringſten zu verrücken, indem man immer durch daſſelbe Loch wie vorher hindurch ſieht, das von der ſpiegelnden Ebene reflectirte Bild S'*) des Punktes S genau in die Mitte des Lochs in der andern Diopter zu bringen, woraus ſich in Folge der vorher beſchriebenen Einrichtung und Aufſtellung der Apparate ganz von ſelbſt ergiebt, daß der einfallende und zurückgeworfene Strahl in einer und derſelben auf der ſpiegelnden Ebene ſenkrecht ſtehenden Ebene liegen. Zugleich

*) Freilich iſt dies nicht das eigentliche Bild von S, worüber, ſo wie über den eigentlichen Begriff des Bildes, weiter unten mit Mehrerem. Für jetzt mag man ſich bei dem obigen unbeſtimmten Ausdrucke beruhigen.

Digitized by Google

wird man auch bei der zweiten Lage der Alhidade auf dem Limbus die Größe des Winkels ACS′ ablesen können. Denkt man sich nun den horizontalen Durchmesser AB über A hinaus verlängert, so erhellet aus den einfachsten geometrischen Sätzen auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichungen

$$\angle SS'M = \angle ACS + \angle CSS'$$

und

$$\angle CS'N = \angle ACS'.$$

Hat man aber den Punkt S′ auf der spiegelnden Ebene, und vor der gleich nachher in Anspruch zu nehmenden Entfernung des Winkelmessers aus seiner ursprünglichen Stelle auch die Lage seines Mittelpunkts C auf irgend eine möglichst kenntliche Weise bezeichnet, so wird man, indem man den Mittelpunkt des Winkelmessers in dem Punkte S aufstellt, immer auch den Winkel CSS′ zu messen im Stande sein. Man kann indeß auch der Bequemlichkeit wegen, um die Messung des Winkels CSS′ zu umgehen, den Punkt S so weit von dem Mittelpunkte C des Kreises bei seiner ersten Aufstellung entfernt annehmen, daß man den Winkel CSS′ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, wo dann eine zweite Aufstellung des Kreises Behufs der Messung des Winkels CSS′ nicht weiter nöthig ist. In jedem Falle wird es aber, wie man hieraus sieht, immer möglich sein, die Größe der beiden Winkel SS′M und CS′N zu bestimmen, und unter allen Verhältnissen wird sich aus solchen Messungen die Gleichheit dieser beiden Winkel stets auf die unzweideutigste Weise ergeben.

Anmerkung. Die so eben gegebene ganz einfache und elementare Darstellung war an diesem Orte nöthig, wenn dieselbe für sich ohne Voraussetzung aller anderweitigen Kenntnisse verständlich sein sollte. Ist man aber die Einrichtung des Theodoliten als bekannt vorauszusetzen berechtigt, so wird auch folgende Darstellung der unmittelbar vorhergehenden Methode, durch Messungen die Richtigkeit des katoptrischen Grundgesetzes in's Licht zu setzen, lehrreich und interessant sein.

Als spiegelnde Ebene bedient man sich, was zuerst vorläufig bemerkt werden mag, mit der größten Bequemlichkeit, und um bei den Versuchen eine möglichst große Genauigkeit zu erreichen, eines sogenannten angequickten Quecksilberhorizonts, nämlich einer flachen Kupferschaale, auf deren innere oder concave Seite mit Scheidewasser sorgfältig Quecksilber eingerieben ist. Gießt man in eine solche Schaale Quecksilber, so bildet dasselbe, weil es an der inneren Fläche der Schaale adhärirt, einen sehr schönen ebenen Spiegel, welcher nach bekannten hydrostatischen Gesetzen sich ganz von selbst horizontal stellt, und auch nicht leicht vom Luftzuge oder von anderen von Außen herrührenden leichten Erschütterungen in oscillatorische Bewegung versetzt wird, was ohne den Gebrauch solcher Kupferschaalen immer der Fall ist. Sollte sich, was allerdings nicht selten

Digitized by Google

geschieht, auf dem Quecksilber etwas oxydartiger Schmutz ansetzen, so kann man denselben leicht entfernen, wenn man mit der innern Fläche des Mittelfingers der rechten Hand einige Mal über die Spiegelfläche hinstreicht.

Mißt man nun am Höhenkreise des Theodoliten die beiden Winkel ACS und ACS', wobei die vorhergehende Figur (Fig. 6.) zu vergleichen ist, und bezeichnet deren vom Limbus abgelesene Maaße respective durch α und α', den Collimations- oder Inderfehler des Theodoliten aber durch i, so sind $\alpha + i$ und $\alpha' - i$ die wahren Maaße der Winkel ACS und ACS', d. h. es ist

$$\angle ACS = \alpha + i, \angle ACS' = \alpha' - i,$$

wie auf der Stelle erhellen wird, wenn man nur nicht außer Acht läßt, daß der Collimations- oder Inderfehler i, dessen Begriff, so wie überhaupt die Einrichtung und der Gebrauch des Theodoliten hier als bekannt vorausgesetzt wird, positiv und negativ sein kann. Mißt man am Höhenkreise des Theodoliten nun auch noch den Winkel CSS', wobei natürlich der Collimations- oder Inderfehler ganz ohne Einfluß ist, da es sich bei dieser Messung nur um die Bestimmung der Neigung zweier in einer Vertikalebene liegenden geraden Linien gegen einander ganz wie bei der Messung von Horizontalwinkeln mit dem Azimuthalkreise des Theodoliten handelt, und bezeichnet denselben durch β, so ist

$$\angle SS'M = \angle ACS + \angle CSS' = \alpha + \beta + i$$

und

$$\angle CS'N = \angle ACS' = \alpha' - i.$$

Soll nun, wie es das katoptrische Grundgesetz fordert, $\angle SS'M = \angle CS'N$ sein, so muß

$$\alpha + \beta + i = \alpha' - i,$$

d. i.

$$i = \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \beta)$$

sein, und es muß sich also, da natürlich i eine constante Größe ist, für die Größe $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \beta)$, wenigstens innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, immer ein und derselbe constante Werth ergeben, unter wie verschiedenartigen Verhältnissen und Bedingungen man auch die obigen Beobachtungen und Messungen anstellen mag, was auch durch die Erfahrung vollkommen bestätigt wird. Zugleich ist im Vorhergehenden eine sehr brauchbare Methode zur Bestimmung des Collimations- oder Inderfehlers eines Theodoliten enthalten, da nämlich nach dem Obigen dieser Fehler durch die Formel

$$i = \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \beta)$$

oder, wenn man β wegen der sehr großen Entfernung des Punktes S als verschwindend zu betrachten berechtigt ist, durch die Formel

$$i = \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$

bestimmt wird.

Digitized by Google

Auf diese für die Praxis sehr wichtige Anwendung des katoptrischen Grundgesetzes zur Bestimmung des Collimations- oder Inderfehlers des Höhenkreises eines Theodoliten gelegentlich aufmerksam zu machen, war der hauptsächlichste Zweck der vorhergehenden Anmerkung.

§. 14.

Die große Wichtigkeit der Reflexion des Lichts für die gesammte Natur fällt auf der Stelle in die Augen, indem offenbar bloß durch sie es möglich gemacht wird, daß auch dunkele Körper von uns gesehen werden können. Denn wir können uns das Sichtbarwerden dunkler Körper bloß auf die Art vorstellen, daß das auf dieselben von leuchtenden Körpern fallende Licht von ihren Oberflächen reflectirt wird, und dadurch in unser Auge gelangt und das Sichtbarwerden der dunkeln Körper bedingt, woher es denn auch kommt, daß solche Körper, wie die alltäglichste Erfahrung lehrt, in Abwesenheit aller leuchtenden Körper für uns völlig unsichtbar sind. Fände also keine Reflexion Statt, so würde bei Weitem der größte Theil der ganzen Natur für uns völlig unsichtbar, und für unsern Gesichtssinn so gut wie nicht vorhanden sein.

Viertes Kapitel.

Von den ebenen Spiegeln.

§. 15.

Wenn von einem leuchtenden Punkte, den wir **A** nennen wollen, auf einen ebenen Spiegel ein Lichtstrahl fällt, und den Spiegel in dem Punkte **B**, welcher also der Einfallspunkt ist, trifft, so kann man in Folge des im vorhergehenden Kapitel entwickelten Grundgesetzes der Reflexion den dem einfallenden Strahle **AB** entsprechenden reflectirten Strahl auf folgende Art construiren.

Weil nach dem Grundgesetze der Reflexion der einfallende und reflectirte Strahl in einer auf der spiegelnden Ebene senkrecht stehenden Ebene liegen, so muß man sich zuerst durch den einfallenden Strahl **AB** eine auf der spiegelnden Ebene senkrecht stehende Ebene gelegt denken, und hat dann die ganze fernere Construction nur in dieser Ebene auszuführen.

Ist aber in Fig. 7. die in Rede stehende Ebene die Ebene des Papiers und **MN** die Durchschnittslinie derselben mit der spiegelnden Ebene, so findet man nach dem Grundgesetze der

Digitized by Google

Reflexion den dem einfallenden Strahle AB entsprechenden reflectirten Strahl BC auf der Stelle, wenn man von dem Einfallspunkte B aus, mit AB auf derselben Seite von MN, die Linie BC so zieht, daß sie gegen MN unter demselben Winkel wie AB geneigt ist, so daß nämlich die beiden Winkel ABM und CBN einander gleich sind, oder wenn man, was offenbar ganz auf dasselbe hinauskommt und eigentlich dem Reflexionsgesetze in seiner ihm im vorhergehenden Kapitel gegebenen ursprünglichen Fassung noch unmittelbarer entspricht, in dem Punkte B auf MN das Perpendikel BE — das Einfallsloth — errichtet und dem Winkel ABE — dem Einfallswinkel — den Winkel CBE — den Reflexionswinkel oder Zurückwerfungswinkel — gleich macht.

Wenn der einfallende Strahl AB gegen die Linie MN unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist, so steht, wie sich aus dem Vorhergehenden durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle ergiebt, der reflectirte Strahl BC jederzeit auf dem einfallenden Strahle AB senkrecht, eine Bemerkung, aus welcher man bei der Construction verschiedener Instrumente mehrfachen Nutzen zu ziehen gewußt hat.

§. 16.

Denken wir uns jetzt in der vorhergehenden Figur von dem leuchtenden Punkte A auf MN ein Perpendikel AD gefällt, und sowohl dieses über den Punkt D, als auch den reflectirten Strahl BC über den Punkt B hinaus verlängert, bis die beiden entsprechenden geraden Linien sich in dem Punkte A′ schneiden, so ist, weil nach dem Vorhergehenden $\angle ABM = \angle CBN$, und als Scheitelwinkel $\angle A'BM = \angle CBN$ ist, auch $\angle ABM = \angle A'BM$, d. i. $\angle ABD = \angle A'BD$, woraus sich, weil auch noch $\angle ADB = \angle A'DB = 90^0$ und die Seite BD den beiden Dreiecken ABD und A′BD gemeinschaftlich ist, auf der Stelle ergiebt, daß diese beiden Dreiecke einander congruent sind, also $AD = A'D$, und natürlich auch $AB = A'B$ ist.

Anmerkung. Wenn A und C als zwei bestimmte Punkte gedacht werden, so kann ein von A ausgehender Strahl durch Reflexion bei MN nach C entweder auf dem von dem wirklich stattfindenden Reflexionsgesetze vorgeschriebenen Wege ABC oder, wenn ein anderes Reflexionsgesetz stattfände, auf einem andern durch dieses Reflexionsgesetz vorgeschriebenen Wege AB_1C (Fig. 8.) gelangen. Zieht man nun die Linie $A'B_1$, so ist in dem Dreiecke $A'B_1C$ nach einem bekannten geometrischen Satze

$$A'C < A'B_1 + B_1C,$$

d. i.

$$A'B + BC < A'B_1 + B_1C,$$

und folglich, weil offenbar

$$AB = A'B \text{ und } AB_1 = A'B_1$$

Digitized by Google

ist:

$$AB + BC < AB_1 + B_1C,$$

oder der Weg ABC kleiner als der Weg AB_1C.

Man sieht also hieraus, daß ein von dem Punkte A ausgehender Strahl durch Reflexion bei MN nach dem Punkte C auf dem kürzesten Wege gelangt, wenn er dem Reflexionsgesetze, so wie es in der Natur wirklich angeordnet ist, folgt, welches offenbar eine nicht uninteressante geometrische Beziehung ist; ob aber dadurch, wie allerdings öfters behauptet worden ist, in der Natur die Erreichung eines besondern Zwecks beabsichtigt worden ist, wollen wir für jetzt dahin gestellt sein lassen.

§. 17.

Wenn wir uns jetzt, wie Fig. 9. zeigt, beliebig viele von dem Punkte A ausgehende und bei MN reflectirt werdende Strahlen denken, so gehen nach dem, was im vorhergehenden Paragraphen bewiesen worden ist, alle reflectirten Strahlen, über MN hinaus verlängert gedacht, durch den Punkt A', welcher nach den im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Bestimmungen offenbar erhalten wird, wenn man von A auf MN das Perpendikel AD fällt, dasselbe über D hinaus verlängert, und $A'D = AD$ macht.

Wenn nun aber überhaupt A ein leuchtender Punkt ist, von welchem nach allen Seiten hin auf einen ebenen Spiegel Lichtstrahlen fallen und von demselben reflectirt werden, so kann man sich durch das von A auf den Spiegel gefällte Perpendikel und jeden einfallenden Strahl eine auf dem Spiegel senkrecht stehende Ebene gelegt, und in jeder dieser Ebenen die vorhergehende Construction ausgeführt denken, woraus mittelst des Vorhergehenden auf der Stelle erhellen wird, daß alle von dem Punkte A auf den Spiegel fallende Strahlen von demselben so reflectirt werden, daß die reflectirten Strahlen, über den Spiegel hinaus rückwärts verlängert gedacht, sich sämmtlich in einem und demselben Punkte A' schneiden, welcher erhalten wird, wenn man das von dem Punkte A auf den Spiegel gefällte Perpendikel AD über den Punkt D hinaus verlängert und $A'D = AD$ macht.

Wenn also ein Auge von den von dem Spiegel reflectirten Strahlen getroffen wird, so muß dasselbe von diesen Strahlen offenbar ganz eben so afficirt werden, als wenn dieselben sämmtlich von dem Punkte A' herkämen oder von diesem Punkte ausgegangen wären, und man wird also vermöge der Reflexion den Punkt A selbst in dem Punkte A' zu erblicken glauben, weshalb der Punkt A' das durch Reflexion entstandene, oder das reflectirte Bild des Punktes A genannt wird; und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich unmittelbar, daß bei'm ebenen Spiegel ein Punkt als Object mit seinem Bilde immer in derselben auf dem Spiegel senkrecht stehenden geraden Linie, das

Digitized by Google

Bild aber immer in einer eben so großen Entfernung von dem Spiegel hinter demselben, als das Object vor dem Spiegel liegt.

Durch die Gesammtheit der Bilder aller einzelnen Punkte eines körperlichen Objects entsteht das Bild dieses körperlichen Objects selbst, und aus dem Vorhergehenden ergiebt sich durch ganz einfache geometrische Betrachtungen auf der Stelle, daß auch in diesem Falle Object und Bild auf entgegengesetzten Seiten des Spiegels liegen, eine völlig symmetrische Lage gegen denselben haben, und rücksichtlich ihrer Größe und Gestalt vollkommen mit einander übereinstimmen, wodurch auch leicht und ganz von selbst die Möglichkeit dargeboten wird, in jedem einzelnen Falle zu einem gegebenen Objecte sein Bild durch bekannte geometrische Hülfsmittel zu construiren, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen wird.

§. 18.

Wir wollen jetzt annehmen, daß zwei sich schneidende ebene Spiegel unter einem Winkel i, der kleiner als 180^0 ist, gegen einander geneigt seien, und zwischen diesen beiden Spiegeln sich ein strahlender Punkt O befinde. Legen wir nun durch diesen Punkt eine auf der Durchschnittslinie der beiden Spiegel, also auch auf den Spiegeln selbst senkrecht stehende Ebene, und bezeichnen deren Durchschnittspunkt mit der Durchschnittslinie der beiden Spiegel durch C, ihre Durchschnittslinien mit den beiden Spiegeln aber durch CA und CB, welche Durchschnittslinien im Folgenden zugleich auch in der Kürze zur Bezeichnung der beiden Spiegel selbst gebraucht werden sollen, so wird aus dem Vorhergehenden sehr leicht erhellen, daß die den beiden Spiegeln entsprechenden Bilder des Punktes O in der in Rede stehenden Ebene liegen, und wir daher im Folgenden alle ferneren Constructionen bloß in dieser Ebene auszuführen berechtigt sind, was daher von nun an auch ohne besondere Bemerkung stets geschehen soll.

Um jetzt zuvörderst das Bild des Punktes O in dem Spiegel CA zu construiren, fällen wir von O auf CA oder deren Verlängerung über C hinaus ein Perpendikel, verlängern dasselbe über CA hinaus, und bestimmen in der Verlängerung einen Punkt A_1, welcher von CA eben so weit als O entfernt ist, und daher bekanntlich das gesuchte Bild von O in CA sein wird. Insofern nun die von CA reflectirten, gehörig verlängert in dem Punkte A_1 convergirenden Strahlen den Spiegel CB treffen, wird man offenbar den Punkt A_1 in Bezug auf den Spiegel CB als ein Object betrachten können, von dem in diesem Spiegel CB wieder ein Bild entsteht, welches man erhält, wenn man von A_1 auf CB oder dessen Verlängerung über C hinaus ein Perpendikel fällt, und in der Verlängerung desselben über CB hinaus einen Punkt B_1 bestimmt, welcher von CB eben so weit als A_1 entfernt ist, und daher bekanntlich das ge-

Digitized by Google

suchte Bild von A_1 in CB sein wird. Insofern jetzt wieder die von CB reflectirten, gehörig verlängert in B_1 convergirenden Strahlen den Spiegel CA treffen, wird man offenbar den Punkt B_1 in Bezug auf den Spiegel CA als ein Object betrachten können, von dem in diesem Spiegel CA ein Bild entsteht, welches man erhält, wenn man von B_1 auf CA oder dessen Verlängerung über C hinaus, ein Perpendikel fällt, und in der Verlängerung desselben über CA hinaus einen Punkt A_2 bestimmt, welcher von CA eben so weit wie B_1 entfernt ist, und daher bekanntlich das gesuchte Bild von B_1 in CA sein wird. Treffen nun auch die von CA reflectirten, gehörig verlängert in A_2 convergirenden Strahlen den Spiegel CB, so wird man den Punkt A_2 in Bezug auf den Spiegel CB als ein Object betrachten können, von dem in diesem Spiegel CB ein Bild entsteht, welches man erhält, wenn man von A_2 auf CB oder dessen Verlängerung über C hinaus ein Perpendikel fällt, und in der Verlängerung desselben über CB hinaus einen Punkt B_2 bestimmt, welcher von CB eben so weit wie A_2 entfernt ist, und daher bekanntlich das gesuchte Bild von A_2 in CB sein wird. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und zugleich ist klar, daß alle im Vorhergehenden construirten Bilder als nach und nach durch Reflexion entstehende Bilder des zwischen den beiden Spiegeln liegenden Punktes O betrachtet werden können. Ueberhaupt entsteht von dem Punkte O eine Reihe von Bildern

$$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots.$$

respective in den Spiegeln

$$CA, CB, CA, CB, CA, CB, \ldots.$$

welche aber dann, wie aus dem Obigen von selbst hervorgeht, jederzeit abbricht, wenn die von einem der beiden Spiegel reflectirten, gehörig verlängert in einem diesem Spiegel entsprechenden Bilde des Punktes O convergirenden Strahlen den andern Spiegel nicht mehr treffen.

Sehr vereinfacht werden die ferneren Betrachtungen über diesen Gegenstand, wenn man überlegt, daß, wie aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle hervorgeht, der Punkt O und seine sämmtlichen Bilder in allen Fällen nothwendig in einer mit dem Halbmesser CO um C als Mittelpunkt beschriebenen Kreislinie liegen müssen. Diese sich auf der Stelle ganz von selbst darbietende Bemerkung im Folgenden stets festhaltend, wollen wir nun immer die Entfernungen des Punktes O und seiner Bilder von den betreffenden Spiegeln durch die zwischen ihnen und den Spiegeln liegenden Bogen der in Rede stehenden Kreislinie bestimmen, und uns hierbei nur auch erinnern, daß natürlich alle dem Spiegel CA entsprechenden Bilder als hinter diesem Spiegel, alle dem Spiegel CB entsprechenden Bilder als hinter diesem Spiegel liegend betrachtet werden müssen, wovon der eigentliche Sinn

Digitized by Google

bei einiger Ueberlegung ohne alle weitere Erläuterung sogleich ganz von selbst erhellen wird.

Bezeichnen wir nun die Entfernungen des Punktes O von den beiden Spiegeln CA und CB respective durch α und β, wo natürlich $\alpha + \beta = i$ ist, und nehmen alle Bogen oder Entfernungen im Folgenden in Graden ausgedrückt an, so sind die Entfernungen der im Vorhergehenden der Reihe nach durch

$$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots.$$

bezeichneten Bilder von den Spiegeln

$$CA, CB, CA, CB, CA, CB, \ldots..$$

offenbar respective

$$\begin{aligned}
&\alpha,\\
&\alpha + i = i + \alpha,\\
&(i + \alpha) + i = 2i + \alpha,\\
&(2i + \alpha) + i = 3i + \alpha,\\
&(3i + \alpha) + i = 4i + \alpha,\\
&(4i + \alpha) + i = 5i + \alpha,
\end{aligned}$$

u. s. w.

in welchen Ausdrücken den Bildern für den Spiegel CA stets gerade, den Bildern für den Spiegel CB stets ungerade Coefficienten von i entsprechen.

Da nun aber wegen der aus dem Obigen sich ergebenden Gründe die Reihe

$$\alpha, i + \alpha, 2i + \alpha, 3i + \alpha, 4i + \alpha, 5i + \alpha, \ldots.$$

nicht in's Unendliche fortgehen kann, so kommt es jetzt darauf an, ein Kriterium zu finden, an dem man erkennen kann, wann und wo die vorstehende Reihe abbricht, und durch welches sich also die Anzahl der im Obigen durch

$$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots.$$

bezeichneten Bilder des Punktes O bestimmen läßt.

Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung, die ein Jeder leicht selbst anzustellen im Stande sein wird, ergiebt sich aber sogleich auf völlig unzweideutige Weise, daß von keinem Bilde eines der beiden Spiegel, welches innerhalb des Scheitelwinkels des Winkels ACB liegt, als von einem Objecte in Bezug auf den andern Spiegel in diesem letzteren ein neues Bild entstehen kann, und jenes also jederzeit das letzte sein wird, weil offenbar in diesem Falle die von dem ersteren Spiegel reflectirten, rückwärts nach dem innerhalb des Scheitelwinkels des Winkels ACB liegenden Bilde convergirenden Strahlen den letzteren Spiegel nicht mehr treffen können, was unbedingt erforderlich sein würde, wenn in diesem Spiegel ein neues Bild entstehen sollte. Hieraus sieht man also, daß, wenn wir die Ordnungszahl des letzten Bildes durch n bezeichnen, da nach dem Obigen $(n - 1)i + \alpha$ die Entfernung dieses Bildes

Digitized by Google

von dem betreffenden Spiegel ist, die ganze Zahl n der Bedingung

$$180 - i \gtreqless (n - 1)\, i + \alpha < 180,$$

d. i. der Bedingung

$$\frac{180}{i} - 1 \gtreqless n - 1 + \frac{\alpha}{i} < \frac{180}{i},$$

also der Bedingung

$$\frac{180 - \alpha}{i} \gtreqless n < \frac{180 - \alpha}{i} + 1$$

genügen muß. Weil nun der Unterschied zwischen den beiden die ganze Zahl n einschließenden Gränzen

$$\frac{180 - \alpha}{i} \text{ und } \frac{180 - \alpha}{i} + 1$$

die Einheit ist, also zwischen diesen beiden Gränzen nur eine ganze Zahl liegt, und n kleiner als die obere, d. i. größere Gränze ist, so ist n offenbar die ganze Zahl, welche zunächst kleiner als

$$\frac{180 - \alpha}{i} + 1$$

ist, folglich, wenn wir der Kürze wegen diese ganze Zahl durch

$$G\left(\frac{180 - \alpha}{i} + 1\right)$$

bezeichnen,

$$n = G\left(\frac{180 - \alpha}{i} + 1\right).$$

Da sich eine ganz ähnliche Betrachtung wie die vorher von dem Spiegel CA ausgehende auch anstellen läßt, wenn man von dem Spiegel CB ausgeht, so ist die Anzahl der Bilder des Punktes O überhaupt

$$G\left(\frac{180 - \alpha}{i} + 1\right) + G\left(\frac{180 - \beta}{i} + 1\right),$$

und, wenn man den Punkt O selbst mit hinzurechnet,

$$1 + G\left(\frac{180 - \alpha}{i} + 1\right) + G\left(\frac{180 - \beta}{i} + 1\right)$$

oder, weil $\alpha + \beta = i$ ist,

$$1 + G\left(\frac{180 - \alpha}{i} + 1\right) + G\left(\frac{180 + \alpha}{i}\right),$$

wobei man nur aber auch bedacht sein muß, in jedem einzelnen Falle noch besonders zu untersuchen, ob auch diese Bilder sämmtlich wirklich von einander verschieden sind und nicht etwa einige derselben mit einander zusammenfallen, was wir, so wie die ganze obige allgemeine Untersuchung, durch die Betrachtung

Digitized by Google

des Falls, wenn i ein aliquoter Theil von 360 ist, jetzt etwas näher erläutern wollen.

Setzen wir zu dem Ende, indem k eine ganze Zahl bezeichnet,

$$i = \frac{360}{k},$$

so ist nach dem Vorhergehenden die Zahl der Bilder

$$1 + G\left(\frac{180 - \alpha}{\frac{360}{k}} + 1\right) + G\left(\frac{180 - \beta}{\frac{360}{k}} + 1\right),$$

d. i.

$$1 + G\left(\frac{k(180 - \alpha)}{360} + 1\right) + G\left(\frac{k(180 - \beta)}{360} + 1\right),$$

oder

$$1 + G\left(\tfrac{1}{2}k + 1 - \frac{k\alpha}{360}\right) + G\left(\tfrac{1}{2}k + 1 - \frac{k\beta}{360}\right).$$

Weil $ki = 360$ und $\alpha < i$, $\beta < i$, also $k\alpha < ki$, $k\beta < ki$ ist, so ist

$$\frac{k\alpha}{360} < 1, \quad \frac{k\beta}{360} < 1;$$

und die Größen

$$1 - \frac{k\alpha}{360} \text{ und } 1 - \frac{k\beta}{360},$$

welche wir der Kürze wegen durch α' und β' bezeichnen, also

$$\alpha' = 1 - \frac{k\alpha}{360} \text{ und } \beta' = 1 - \frac{k\beta}{360}$$

setzen wollen, sind folglich positive ächte Brüche. Die Anzahl der Bilder ist aber nach dem Obigen mit Anwendung dieser Bezeichnung

$$1 + G(\tfrac{1}{2}k + \alpha') + G(\tfrac{1}{2}k + \beta').$$

Wenn nun zuvörderst k eine gerade Zahl, also $\frac{1}{2}k$ eine ganze Zahl ist, so ist nach der aus dem Obigen bekannten Bedeutung der durch das Symbol G bezeichneten Größen offenbar

$$G(\tfrac{1}{2}k + \alpha') = \tfrac{1}{2}k, \quad G(\tfrac{1}{2}k + \beta') = \tfrac{1}{2}k$$

und folglich nach dem Vorhergehenden $k + 1$ die Anzahl der Bilder, wo es nun aber noch darauf ankommt, zu untersuchen, ob diese Bilder auch sämmtlich wirklich von einander verschieden sind, wobei man sich auf folgende Art verhalten kann. Bezeichnet man in der Kürze die Bilder bloß durch ihre Entfernungen von den betreffenden Spiegeln, so erhält man, von dem Spiegel CA ausgehend, die Bilder

$$\alpha,\ i + \alpha,\ 2i + \alpha,\ 3i + \alpha,\ \ldots.\ (\tfrac{1}{2}k - 1)\,i + \alpha;$$

Digitized by Google

welche den Spiegeln

CA, CB, CA, CB, CA, CB, ...

entsprechen, und von dem Spiegel CB ausgehend, die Bilder

$$\beta,\ i+\beta,\ 2i+\beta,\ 3i+\beta,\ \ldots\ (\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\beta;$$

welche den Spiegeln

CB, CA, CB, CA, CB, CA, ...

entsprechen. Die letzten Bilder in den beiden vorhergehenden aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehenden Reihen entsprechen also offenbar verschiedenen Spiegeln, und weil nun

$$((\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\alpha)+((\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\beta)=(k-2)\,i+\alpha+\beta,$$

d. i.

$$((\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\alpha)+((\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\beta)=(k-2)\,i+i=ki-i,$$

folglich nach dem Obigen

$$((\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\alpha)+((\tfrac{1}{2}k-1)\,i+\beta)=360-i$$

ist, so fallen die letzten Bilder in den beiden obigen Reihen offenbar mit einander zusammen. Von den übrigen Bildern entsprechen dem Spiegel CA nach der Reihe die Bilder

$$\alpha,\ i+\beta,\ 2i+\alpha,\ 3i+\beta,\ 4i+\alpha,\ 5i+\beta,\ \ldots.$$

und dem Spiegel CB nach der Reihe die Bilder

$$\beta,\ i+\alpha,\ 2i+\beta,\ 3i+\alpha,\ 4i+\beta,\ 5i+\alpha,\ \ldots.$$

von welchen beiden Reihen ohne Beziehung immer die eine bis $(\frac{1}{2}k-2)i+\alpha$, die andere bis $(\frac{1}{2}k-2)i+\beta$ fortläuft. Ueberlegt man nun, daß, weil $\alpha<i$ und $\beta<i$ ist, sowohl die Glieder der ersten, als auch die Glieder der zweiten Reihe offenbar vom Anfange an in stetem Wachsen fortschreiten; daß ferner, weil

$$(\tfrac{1}{2}k-2)\,i+\alpha=\tfrac{1}{2}ki-i-(i-\alpha)=180-i-(i-\alpha),$$
$$(\tfrac{1}{2}k-2)\,i+\beta=\tfrac{1}{2}ki-i-(i-\beta)=180-i-(i-\beta)$$

ist,

$$(\tfrac{1}{2}k-2)\,i+\alpha<180-i,\ (\tfrac{1}{2}k-2)\,i+\beta<180-i$$

ist; so wie endlich, daß alle Bilder hinter den entsprechenden Spiegeln liegen; so wird auf der Stelle erhellen, daß die in Rede stehenden Bilder sämmtlich unter einander, und, wie aus dem Obigen ebenfalls sogleich hervorgeht, natürlich auch von den beiden letzten zusammenfallenden Bildern verschieden sind, also die Anzahl der sämmtlich von einander verschiedenen Bilder, mit Einschluß des Punktes O selbst, nach dem Vorhergehenden offenbar $(k+1)-1$, d. i. k ist. Zur Erläuterung dieser allgemeinen Betrachtung sind in Fig. 10. die beiden Fälle, wenn $k=6$ und wenn $k=8$ ist, dargestellt worden. Die dem Spiegel CA entsprechenden Bilder des Punktes O sind in diesen Figuren durch Sternchen, die dem Spiegel CB entsprechenden Bilder dieses Punktes durch kleine Kreise bezeichnet wor-

Digitized by Google

den. Zugleich wird aus diesen Figuren auf der Stelle, auch ohne dies im Allgemeinen weiter zu erläutern, die symmetrische Lage der sämmtlichen Bilder auf den um den Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CO beschriebenen Kreislinien auf der Stelle in die Augen fallen, was zu der Erfindung des unter dem Namen Kaleidoscop jetzt so allgemein, daß eine besondere Beschreibung desselben hier als völlig überflüssig betrachtet werden kann, bekannten Instruments Veranlassung gegeben hat.

Wenn ferner

$$k = 2\,\frac{k-1}{2} + 1$$

eine ungerade, also $\frac{1}{2}(k-1)$ eine ganze Zahl ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}k + \alpha' = \tfrac{1}{2}(k-1) + \tfrac{1}{2} + \alpha',\ \tfrac{1}{2}k + \beta' = \tfrac{1}{2}(k-1) + \tfrac{1}{2} + \beta'.$$

Nun ist entweder

$$\alpha = \tfrac{1}{2}i,\ \beta = \tfrac{1}{2}i;$$

oder

$$\alpha < \tfrac{1}{2}i,\ \beta > \tfrac{1}{2}i;$$

oder

$$\alpha > \tfrac{1}{2}i,\ \beta < \tfrac{1}{2}i.$$

Im ersten Falle, wo O gerade in der Mitte zwischen den beiden Spiegeln liegt oder vielmehr die Linie CO den Winkel ACB halbirt, ist

$$\alpha' = 1 - \frac{k\alpha}{360} = 1 - \frac{ki}{2.360} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

$$\beta' = 1 - \frac{k\beta}{360} = 1 - \frac{ki}{2.360} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2};$$

also

$$\tfrac{1}{2}k + \alpha' = \tfrac{1}{2}(k+1),\ \tfrac{1}{2}k + \beta' = \tfrac{1}{2}(k+1)$$

und folglich

$$G(\tfrac{1}{2}k+\alpha') = \tfrac{1}{2}(k-1),\ G(\tfrac{1}{2}k+\beta') = \tfrac{1}{2}(k-1).$$

Daher ist nach dem Obigen in diesem Falle k die Anzahl der Bilder, natürlich wieder mit Einschluß des Punktes O selbst.

In dem zweiten der drei obigen Fälle ist

$$\alpha' > 1 - \frac{ki}{2.360},\ \alpha' > 1 - \tfrac{1}{2},\ \alpha' > \tfrac{1}{2};$$

$$\beta' < 1 - \frac{ki}{2.360},\ \beta' < 1 - \tfrac{1}{2},\ \beta' < \tfrac{1}{2}.$$

Folglich ist

$$1 < \tfrac{1}{2} + \alpha' < 1\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} + \beta' < 1$$

und daher nach dem Obigen offenbar

$$G(\tfrac{1}{2}k+\alpha') = \tfrac{1}{2}(k-1) + 1 = \tfrac{1}{2}(k+1),\ G(\tfrac{1}{2}k+\beta') = \tfrac{1}{2}(k-1);$$

Digitized by Google

also die Anzahl der Bilder, immer mit Einschluß des Punktes O selbst,

$$1 + \tfrac{1}{2}(k+1) + \tfrac{1}{2}(k-1) = k + 1.$$

In dem dritten der drei obigen Fälle ist auf ganz ähnliche Weise

$$\alpha' < 1 - \frac{ki}{2.360},\ \alpha' < 1 - \tfrac{1}{2},\ \alpha' < \tfrac{1}{2};$$

$$\beta' > 1 - \frac{ki}{2.360},\ \beta' > 1 - \tfrac{1}{2},\ \beta' > \tfrac{1}{2};$$

folglich

$$\tfrac{1}{2} + \alpha' < 1,\ 1 < \tfrac{1}{2} + \beta' < 1\tfrac{1}{2}$$

und daher nach dem Obigen offenbar

$$G(\tfrac{1}{2}k+\alpha') = \tfrac{1}{2}(k-1),\ G(\tfrac{1}{2}k+\beta') = \tfrac{1}{2}(k-1) + 1 = \tfrac{1}{2}(k+1);$$

also die Anzahl der Bilder, wieder mit Einschluß des Punktes O selbst,

$$1 + \tfrac{1}{2}(k-1) + \tfrac{1}{2}(k+1) = k + 1,$$

ganz wie im zweiten Falle, was sich im Voraus erwarten ließ.

Im ersten der drei obigen Fälle erhält man, von dem Spiegel CA ausgehend, die Bilder

$$\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{3}{2}i,\ \tfrac{5}{2}i,\ \tfrac{7}{2}i,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-2)i$$

welche den Spiegeln

$$CA,\ CB,\ CA,\ CB,\ CA,\ CB,\ \ldots.$$

entsprechen, und, von dem Spiegel CB ausgehend, die Bilder

$$\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{3}{2}i,\ \tfrac{5}{2}i,\ \tfrac{7}{2}i,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-2)i$$

welche den Spiegeln

$$CB,\ CA,\ CB,\ CA,\ CB,\ CA,\ \ldots.$$

entsprechen. Also entsprechen dem Spiegel CA die Bilder

$$\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{3}{2}i,\ \tfrac{5}{2}i,\ \tfrac{7}{2}i,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-2)i$$

und eben so dem Spiegel CB die Bilder

$$\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{3}{2}i,\ \tfrac{5}{2}i,\ \tfrac{7}{2}i,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-2)i.$$

Weil nun $\frac{1}{2}(k-2)\,i = \frac{1}{2}ki - i = 180 - i$ ist, so fällt auf der Stelle in die Augen, daß sowohl diese Bilder sämmtlich unter sich, als auch natürlich von dem Punkte O selbst verschieden, und daher in diesem Falle mit Einschluß des Punktes O selbst immer wirklich k Bilder vorhanden sind. In dem zweiten der drei obigen Fälle erhält man, von dem Spiegel CA ausgehend, die Bilder

$$\alpha,\ i + \alpha,\ 2i + \alpha,\ 3i + \alpha,\ \ldots.\ \tfrac{1}{2}(k-1)\,i + \alpha$$

welche den Spiegeln

$$CA,\ CB,\ CA,\ CB,\ CA,\ CB,\ \ldots.$$

entsprechen, und, von dem Spiegel CB ausgehend, die Bilder

$$\beta,\ i + \beta,\ 2i + \beta,\ 3i + \beta,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-3)\,i + \beta$$

Digitized by Google

welche den Spiegeln

CB, CA, CB, CA, CB, CA, ...

entsprechen. Ist nun $\frac{1}{2}(k-1)$ eine gerade, also $\frac{1}{2}(k-3)$ eine ungerade Zahl, so entsprechen dem Spiegel CA die Bilder

$$\alpha,\ i+\beta,\ 2i+\alpha,\ 3i+\beta,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-1)\,i+\alpha$$

und dem Spiegel CB die Bilder

$$\beta,\ i+\alpha,\ 2i+\beta,\ 3i+\alpha,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-3)\,i+\alpha;$$

ist dagegen $\frac{1}{2}(k-1)$ eine ungerade, also $\frac{1}{2}(k-3)$ eine gerade Zahl, so entsprechen dem Spiegel CA die Bilder

$$\alpha,\ i+\beta,\ 2i+\alpha,\ 3i+\beta,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-3)\,i+\alpha$$

und dem Spiegel CB die Bilder

$$\beta,\ i+\alpha,\ 2i+\beta,\ 3i+\alpha,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(k-1)\,i+\alpha.$$

Ueberlegt man nun, daß

$$\tfrac{1}{2}(k-3)\,i+\alpha=\tfrac{1}{2}ki-i-(\tfrac{1}{2}i-\alpha)=180-i-(\tfrac{1}{2}i-\alpha),$$
$$\tfrac{1}{2}(k-1)\,i+\alpha=\tfrac{1}{2}ki-(\tfrac{1}{2}i-\alpha)=180-(\tfrac{1}{2}i-\alpha)$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $\alpha<\frac{1}{2}i$, also $\frac{1}{2}i-\alpha$ positiv ist, immer

$$\tfrac{1}{2}(k-3)\,i+\alpha<180-i,\ \tfrac{1}{2}(k-1)\,i+\alpha<180$$

ist, so wird leicht erhellen, daß wieder die sämmtlichen Bilder unter einander und von dem Punkte O selbst verschieden sind, also in diesem Falle mit Einschluß des Punktes O selbst nach dem Obigen wirklich $k+1$ Bilder vorhanden sind. Eine ganz ähnliche Betrachtung läßt sich für den dritten der obigen Fälle anstellen. Zur Erläuterung des Vorhergehenden sind in Fig. 11. die beiden Fälle, wenn $k=7$ und $\alpha=\beta=\frac{1}{7}i$, und wenn $k=7$ und $\alpha<\frac{1}{7}i$, $\beta>\frac{1}{7}i$ ist, dargestellt worden.

Im Allgemeinen ergiebt sich aus dem Vorhergehenden das folgende Resultat:

Wenn der Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander, indem k eine ganze Zahl bezeichnet, der kte Theil von 360° oder vier rechten Winkeln ist, so giebt es, mit Einschluß des strahlenden Punktes selbst, k Bilder, wenn k eine gerade Zahl ist, und wenn k eine ungerade Zahl ist und der strahlende Punkt in der Mitte zwischen den beiden Spiegeln liegt; dagegen giebt es $k+1$ Bilder, wenn k eine ungerade Zahl ist und der strahlende Punkt nicht in der Mitte zwischen den beiden Spiegeln liegt.

Je kleiner also der Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander ist, desto größer ist die Anzahl der Bilder. Wird k unendlich groß, d. h. werden die beiden Spiegel einander parallel, so giebt es jederzeit eine unendlich große Menge von Bildern, was man sich auch leicht unabhängig von den

Digitized by Google

vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen zu erläutern im Stande sein wird.

Anmerkung. Mittelst des Vorhergehenden wird man sich auch leicht die Wirkung der Spiegelkasten, wie dieselben namentlich in ältern physikalischen Kabinetten sich finden, der Spiegelzimmer, u. s. w. erklären können.

Fünftes Kapitel.

Von einigen auf der Anwendung ebener Spiegel beruhenden Instrumenten.

§. 19.

Bei vielen optischen Versuchen wird das Licht, welches man bei denselben gebraucht, durch einen in ein verfinstertes Zimmer fallenden Sonnenstrahl dargeboten, wobei es aber eines Theils immer sehr hinderlich ist, daß wegen des veränderlichen Standes der Sonne am Himmel der Strahl seine Lage fortwährend verändert, andern Theils die Strahlen oft in einer für die Versuche unbequemen Lage einfallen, und häufig, weil sie besonders bei hohem Stande der Sonne sehr bald nach ihrem Eintritt den Fußboden des Zimmers treffen, dem Experimentator nur eine sehr geringe Länge darbieten, oft auch gar nicht mehr in das Zimmer gelangen können und die Dauer der Versuche auf eine nicht hinreichend lange Zeit beschränken. Daher sind für viele optische Versuche gewisse Instrumente von der größten Wichtigkeit, durch welche ein Sonnenstrahl eine längere Zeit hindurch, am besten einen ganzen Tag lang, so lange wenigstens die Sonne sich über dem Horizonte befindet, in jeder beliebigen Lage festgehalten oder fixirt werden kann. Alle Instrumente dieser Art werden Heliostaten genannt, und man hat mehrere Arten derselben, die sich aber sämmtlich füglich in zwei Klassen theilen lassen. Entweder kann man nämlich bei denselben durch Reflexion einen Sonnenstrahl bloß mittelst eines Spiegels in jeder beliebigen Lage fixiren, oder es kann bei denselben durch Reflexion ein Sonnenstrahl mittelst eines Spiegels nur in einer gewissen bestimmten Lage, etwa immer in der Richtung der Weltaxe oder einer andern ähnlichen unveränderlichen geraden Linie, fixirt, und die Fixirung des Strahls in jeder andern beliebigen Lage muß dann durch Reflexion von einem zweiten dem ersten reflectirten Strahle dargebotenen Spiegel bewirkt werden.

Digitized by Google

§. 20.

Das Princip, auf welchem die Helioſtaten der erſten der beiden vorher erwähnten Klaſſen, die, wenn auch etwas complicirt, doch jedenfalls die wichtigſten ſind, und bei den Verſuchen die meiſte Bequemlichkeit darbieten, beruhen, läßt ſich, wie es mir ſcheint, im Allgemeinen am beſten auf folgende Art darſtellen.

In Fig. 12. ſeien A und B zwei beliebige Punkte im Raume von gegebener Lage. AA ſei eine beliebige durch den Punkt A gehende gerade Linie, und MN ſei die Durchſchnittslinie eines durch den Punkt B gelegten, auf der durch die beiden Linien AA und AB beſtimmten Ebene ſenkrecht ſtehenden ebenen Spiegels mit dieſer Ebene, deſſen ſpiegelnde Fläche als von dem Punkte A abwärts gekehrt angenommen wird. Die gleichfalls in der durch die Linien AA und AB beſtimmten Ebene liegende, von dem Punkte B ausgehende gerade Linie BE ſtehe auf der Linie MN, alſo nach dem Vorhergehenden natürlich auch auf der Spiegelebene ſenkrecht. Endlich ſei BB ein parallel mit AA in B. auf den Spiegel fallender Strahl, deſſen bekanntlich auch in der durch die Linien AA und AB beſtimmten Ebene liegender reflectirter Strahl BC ſein mag, ſo daß alſo nach dem katoptriſchen Grundgeſetze $\angle BBM = \angle CBN$ iſt. Dies vorausgeſetzt, wollen wir nun annehmen, daß der reflectirte Strahl BC mit der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus zuſammenfalle, ſo daß alſo ABC eine gerade Linie ſei, und die Bedingung aufſuchen, welche, wenn dies der Fall ſein ſoll, erfüllt ſein muß.

Da aber, wenn ABC eine gerade Linie iſt, als Scheitelwinkel $\angle ABM = \angle CBN$, und nach dem Vorhergehenden $\angle BBM = \angle CBN$ iſt, ſo iſt $\angle ABM = \angle BBM$, alſo $\angle ABB = 2\angle ABM$. Weil nun nach der Vorausſetzung die Linien AA und BB, oder, wenn man ſich AA über den Punkt A hinaus bis zu ihrem Durchſchnittspunkte D mit der Linie BE verlängert denkt, die Linien AD und BB einander parallel ſind, ſo iſt

$$\angle ADB + \angle BBD = 180°$$

oder

$$\angle ADB + \angle ABD + \angle ABB = 180°,$$

alſo nach dem Vorhergehenden

$$\angle ADB + \angle ABD + 2\angle ABM = 180°.$$

Weil nun aber nach der Vorausſetzung BE auf MN ſenkrecht ſteht, ſo iſt

$$\angle ABM = 90° - \angle ABD,$$

und folglich, wenn man dies für $\angle ABM$ in die vorhergehende Gleichung einführt:

$$\angle ADB + \angle ABD + 180° - 2\angle ABD = 180°,$$

Digitized by Google

woraus nach einigen leichten Verwandlungen sogleich

$$\angle ADB = \angle ABD \text{ oder } \angle ADB = \angle ABD,$$

also $AB = AD$ folgt, und demnach hierdurch die gesuchte Bedingung gefunden ist. Daß sich diese ganze Betrachtung auch umkehren läßt, fällt auf der Stelle in die Augen, und wir gelangen daher jetzt zu einem Satze, welcher sich, indem wir uns immer auf die vorhergehende Figur beziehen, auf folgende Art aussprechen läßt:

Wenn A und B zwei beliebige Punkte im Raume sind, und AA eine gegebene durch den Punkt A gehende gerade Linie von beliebiger Lage im Raume ist, so wird jeder auf einen durch den Punkt B gelegten ebenen Spiegel in dem Punkte B parallel mit AA fallender Strahl BB jederzeit von dem Spiegel nach der Verlängerung der durch die beiden gegebenen Punkte A und B bestimmten geraden Linie AB über den Punkt B hinaus reflectirt, wenn die in dem Punkte B auf dem Spiegel senkrecht stehende gerade Linie BE von der über A hinaus verlängerten geraden Linie AA in einem Punkte D geschnitten wird, welcher von dem Punkte A eben so weit als der Punkt B von dem Punkte A entfernt ist, so daß also AB = AD ist, worin auch zugleich und ganz von selbst die Bedingung ausgesprochen ist, daß die auf der Ebene des Spiegels in dem Punkte B senkrecht stehende gerade Linie BE immer in die durch die beiden geraden Linien AA und AB bestimmte Ebene fallen muß, worauf denn auch auf dieser Ebene die Spiegelebene von selbst senkrecht stehen wird.

Denken wir uns nun die beiden Punkte A und B als zwei feste Punkte im Raume, ferner die Verlängerung AD = AB der Linie AA über den Punkt A hinaus als einen festen um A nach allen Seiten hin drehbaren Stab, welcher in dem Punkte D ein Loch hat, endlich auch den Spiegel um den festen Punkt B nach allen Seiten hin drehbar, und die Linie BE als einen an der hintern Seite des Spiegels senkrecht gegen dessen Ebene in dem Punkte B befestigten und mit dem Spiegel zugleich drehbaren Stab, welcher durch das bei D befindliche Loch des Stabes AD frei hindurch geschoben ist; so wird, wenn man den Stab AD auf beliebige Weise um den Punkt A herumdreht, dadurch auch eine Bewegung des Spiegels um den Punkt B vermittelt werden, bei welcher sich der Punkt D des Stabes AD auf dem Stabe BE von selbst hinschiebt, aber offenbar immer BE von AD geschnitten wird und AB = AD bleibt, überdies auch natürlich die Ebene des Spiegels stets auf der Ebene des Dreiecks ABD senkrecht steht. Für alle mit AD oder AA parallel auf den Spiegel in B fallende Strahlen sind also, wie man auch AD um A herumdrehen mag, die Bedingungen des vorhergehenden Satzes offenbar

Digitized by Google

immer vollständig erfüllt, und alle diese Strahlen werden also nach dem vorhergehenden Satze von dem Spiegel nach der durch die Verlängerung der gegebenen unveränderlichen Linie AB über den Punkt B hinaus bestimmten constanten Richtung BC reflectirt.

Wenn nun im Vorhergehenden dem Stabe AD eine solche Drehung um den Punkt A gegeben wird, daß dieser Stab an einem gewissen Tage dem Laufe der Sonne folgt, d. h. an diesem Tage die Verlängerung des Stabes AD über den Punkt A hinaus stets durch den Mittelpunkt der Sonne geht, so werden an diesem Tage, da wegen der großen Entfernung der Sonne von der Erde die gleichzeitig auf den um den Punkt B drehbaren Spiegel in diesem Punkte fallenden Sonnenstrahlen ohne allen merklichen Fehler stets als parallel mit AA betrachtet werden können, die Sonnenstrahlen von dem Spiegel stets nach der durch die Verlängerung der gegebenen unveränderlichen Linie AB über den Punkt B hinaus bestimmten constanten Richtung BC reflectirt werden.

Hieraus sieht man nun, daß, um einen Heliostaten der ersten Klasse herzustellen, unter Voraussetzung der aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden mechanischen Einrichtungen, nur noch ein besonderer Mechanismus vorhanden sein muß, durch welchen dem Stabe AD an jedem beliebigen Tage an jedem beliebigen Orte, also bei jeder Declination der Sonne und unter jeder Polhöhe, — wobei jedoch, was wir hier des Folgenden wegen ein für alle Mal bemerken, an jedem einzelnen Tage auf die Veränderung der Declination der Sonne keine Rücksicht genommen, sondern dieselbe als unveränderlich betrachtet wird, — eine solche Bewegung um den Punkt A herum gegeben werden kann, daß derselbe bei dieser Bewegung stets der Sonne folgt, d. h. seine Verlängerung über den Punkt A hinaus continuirlich durch den Mittelpunkt der Sonne geht, wozu denn außerdem noch gewisse leicht zu erdenkende Einrichtungen kommen müssen, mittelst welcher man die gegenseitige Lage der Punkte A und B im Raume, und somit auch die Lage der durch dieselben bestimmten geraden Linie AB im Raume beliebig verändern kann, ohne die Entfernung der Punkte A und B von einander zu verändern, insofern man nämlich die Länge des Stabes AD als unveränderlich annimmt, und nicht noch besondere, eine Veränderung der Länge dieses Stabes leicht möglich machende Einrichtungen, durch welche immer ohne Unbequemlichkeit die aus dem Obigen bekannte Bedingungsgleichung AB = AD erfüllt werden kann, anbringen will, was übrigens auch nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegen würde.

§. 21.

Unmittelbar ist das im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Princip zur Anwendung gebracht bei dem von Pietro Prandi angegebenen Heliostaten, welcher mir einfacher und

Digitized by Google

weniger kostspielig als der weiter unten zu beschreibende ältere Heliostat von Gravesande zu sein, und hier um so mehr eine genauere Beschreibung seiner Einrichtung und seines Gebrauchs zu verdienen scheint, weil ich in keinem mir bekannten deutschen oder französischen Lehrbuche der Physik, selbst nicht in der neuen Ausgabe des Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs, denselben beschrieben oder auch nur erwähnt gefunden habe *), seine allgemeinere Bekanntwerdung und Einführung aber gewiß wünschenswerth ist. Ich folge dabei hauptsächlich einer von Santini in seiner Teorica degli stromenti ottici. Volume I. Padova. 1828. p. 242. und Tav. IV. gegebenen Beschreibung und Zeichnung, und bemerke, daß Santini wegen der von dem Erfinder selbst gegebenen Beschreibung auf die Opuscoli scientifici di Bologna. an. 1824. p. 244. verweiset.

Dieser Heliostat ist seinen wesentlichen Theilen nach in Fig. 13. dargestellt, und besteht, wie man sogleich erkennen wird, aus zwei Haupttheilen, von denen wir im Folgenden den einen in der Figur rechts liegenden den ersten, den andern in der Figur links liegenden den zweiten Theil nennen wollen.

Der erste Theil besteht zuvörderst aus der auf dem ein gleichseitiges Dreieck bildenden Fußgestell XYZ, welches durch die drei Schrauben X, Y, Z mittelst eines aufgesetzten Niveaus horizontal gestellt werden kann, so, daß ihre Längenaxe auf der Ebene XYZ senkrecht steht, aufgestellten Säule S. Auf dem Fußgestell ist von der Spitze X aus die auf der Seite YZ senkrecht stehende und dieselbe halbirende Höhe XX des Dreiecks XYZ durch eine eingerissene feine Linie kenntlich gemacht, welche von der auf XYZ senkrecht stehenden Längenaxe der Säule S getroffen werden muß. Die Säule S trägt an ihrem obern Ende eine aus der Figur ersichtliche nach oben hin concave sphärische Calotte, welche den in der Figur durch ACDHI bezeichneten Theil in sich aufnimmt. Dieser Theil besteht wieder aus zwei Theilen: nämlich aus dem in fester Verbindung mit dem, einen eingetheilten Limbus tragenden Kreisbogen HI stehenden Stabe AC, und dem in seiner Verlängerung über A hinaus sich in den Zeiger AK, welcher an seinem durch K bezeichneten Endpunkte einen der Theilung des Limbus des Kreisbogens HI entsprechenden Nonius trägt, fortsetzenden Stabe AL. Der Stab AC und der Sector HAI liegen in einer Ebene, und der Nullpunkt M der Theilung des Limbus ist so gelegt, daß der von A nach demselben gezogene Halbmesser des Kreisbogens auf AC senkrecht steht. Der Stab AL ist aber mit seinem Zeiger AK um A so beweglich, daß der bei K angebrachte Nonius in der Ebene des Sectors HAI fortgeführt wird, was

*) Nur Dove erwähnt in der im Repertorium der Physik Band II. Berlin. 1838. gelieferten Literatur der Optik S. VIII. die gleich nachher anzuführende Abhandlung von Prandi, aber mit einem wenigstens nicht mit Santini (s. nachher) übereinstimmenden Citat.

Digitized by Google

man sich etwa wie ein Zirkelgewinde vorstellen kann, wodurch eine in A ihren Mittelpunkt habende Kugel gebildet wird, die genau in die vorher erwähnte sphärische Calotte paßt. Letztere hat einen in die durch die Längenaxe der Säule S und die Linie XX gelegte, auf XYZ senkrecht stehende Ebene fallenden Einschnitt, durch welchen der Stab AC hindurch tritt, und sich dann sowohl in der so eben erwähnten auf XYZ senkrecht stehenden Ebene, als auch um seine Längenaxe bewegen läßt, wobei ihm natürlich die andern vorher beschriebenen Theile müssen frei folgen können. Die erste dieser beiden Bewegungen wird durch Fortrückung des mit dem Stabe AC verbundenen Kreisbogens CG bewirkt, welcher durch die Längenaxe der Säule S geht und einen eingetheilten Limbus trägt, dem bei F ein Nonius entspricht, dessen Nullpunkt in der Längenaxe der Säule S liegt. Die andere der beiden in Rede stehenden Bewegungen, nämlich die Drehung des Stabs AC um seine Längenaxe, wird durch ein in der Figur nicht verzeichnetes Uhrwerk bewirkt, dessen Gang so regulirt sein muß, daß der Stab AC einen Umlauf um seine Längenaxe genau in 24 Stunden vollendet. In dem Stabe AL ist an seinem Endpunkte L das Stäbchen a beweglich, welches sich in einen Halbkreis erweitert, um dessen auf AL senkrecht stehenden Durchmesser ein Ring D beweglich, und zur Aufnahme des dem zweiten, gleich näher zu beschreibenden Theile des Instruments angehörenden Stabs BE bestimmt ist.

Der Kreissector X′ Y′ Z′ ist in der Ebene XYZ um den in die Längenaxe der Säule S fallenden Punkt X′ als seinen Mittelpunkt beweglich, und trägt die beiden senkrecht gegen seine Ebene aufgestellten Säulen S′, S′, welche wieder die beiden kreisbogenförmigen Stücke N, N tragen, die so verfertigt und auf den Säulen S′, S′ aufgestellt sein müssen, daß sie als zwei Parallelkreisen einer aus A als Mittelpunkt beschriebenen Kugel, in gleichen Entfernungen von deren Mittelpunkte auf beiden Seiten desselben, angehörend betrachtet werden können. An diesen kreisbogenförmigen Stücken ist mittelst in dieselben eingeschnittener Rinnen oder Nuthen das Gestell OO verschiebbar, und in dem Loche b ist ein in einen gabelförmigen Ansatz, zwischen welchem der ebene kreisförmige Metallspiegel PQ frei drehbar ist, sich erweiternder Stab, dem noch durch einen von c ausgehenden Arm größere Haltung verschafft wird, beweglich. An der hintern Seite des Spiegels ist endlich in seinem Mittelpunkte B senkrecht gegen seine Ebene der Stab BE befestigt, welcher, wie schon vorher erwähnt worden ist, von dem Ringe D aufgenommen wird. Daß mittelst dieser Einrichtungen der Mittelpunkt B des Spiegels, *ohne seine Entfernung von dem Punkte A zu ändern* (was man vorzüglich zu beachten hat), in jede beliebige Lage im Raume gebracht, also auch der Linie AB jede beliebige Lage im Raume gegeben werden kann, wird auf der Stelle erhellen, so daß folglich, wenn, wie wir im Folgenden annehmen wollen, einmal die Einrichtung so getroffen ist, daß AB = AD ist, die Erfüllung dieser Bedingung

Digitized by Google

immer gesichert bleibt, wie man auch mittelst der beschriebenen Einrichtungen die Lage des Punktes B und dadurch die Lage der Linie AB im Raume verändern mag.

Daß endlich überall an dem Instrumente die nöthigen Schrauben zur feinen Bewegung und zur Feststellung aller derjenigen Theile, bei welchen dies erforderlich ist, angebracht sein müssen, versteht sich von selbst; und gewiß werden die obigen freilich nur allgemeinen Andeutungen hinreichend sein, um einem geschickten Künstler die nöthige Anleitung zur Construction dieses Instruments zu geben, wobei wir nur noch bemerken wollen, daß Santini erwähnt, daß eine Anfertigung desselben bloß aus Holz sehr wohl zulässig sei, was jedoch gewiß nur auf die größeren und gröberen Theile Anwendung finden kann, und bei den feineren Theilen jedenfalls zu vermeiden sein dürfte, wenn auch dadurch der Preis allerdings erhöhet werden wird.

Was nun die Aufstellung und den Gebrauch des Instruments betrifft, so ergiebt sich alles in diesen Beziehungen zu wissen Nöthige aus dem Vorhergehenden so leicht von selbst, daß darüber gewiß die folgenden Andeutungen völlig genügen werden. Man stellt die Ebene XYZ mittelst eines aufgesetzten Niveaus horizontal, bringt die Linie XX, den Punkt X nach Süden gekehrt, in die Mittagslinie des Beobachtungsorts, und giebt durch die aus dem Vorhergehenden bekannten geeigneten Verschiebungen des Punktes B der Linie AB die Richtung im Raume, in welcher die Strahlen fixirt werden sollen. Dann giebt man dem Bogen CG in der Säule S, und hiermit zugleich dem Stabe AC, eine solche Lage, daß das Maaß des Bogens CF dem Complement der Polhöhe des Beobachtungsorts gleich ist, so fällt offenbar AC in die Weltaxe und AM in die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der Ebene des Meridians. Hierauf giebt man dem Stabe AL durch Drehung um A eine solche Lage, daß der Nonius K auf dem eingetheilten Limbus des Kreisbogens HI die nördliche oder südliche Declination MK der Sonne am Beobachtungstage, die man aus den astronomischen Ephemeriden zu nehmen hat, angiebt, und bringt denselben Stab dann ferner durch geeignete Drehungen des Stabes AC um seine Längenaxe in eine solche Lage, daß er nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist, was man schon daran erkennen kann, daß der auf einer beliebigen Ebene aufgefangene Schatten des Stabes AL als ein bloßer Punkt sich darstellt, was sich aber natürlich auch, wenn man die Zeit der Beobachtung kennt, durch gehörige Stellung des Zeigers auf dem vorher sorgfältig nach dem Aequator und Meridian orientirten Zifferblatte der Uhr bewerkstelligen läßt, worauf dann die fernere Drehung des Stabes AC um seine Längenaxe so von dem Uhrwerke bewirkt werden wird, daß der Stab AL fortwährend nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist, und folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen die Strahlen von dem Spiegel immer nach der Verlängerung

Digitized by Google

der festen Linie AB über den Punkt B hinaus reflectirt werden, der durch den Heliostaten zu erreichende Zweck also in der That vollständig erreicht ist.

§. 22.

Der in Fig. 14. abgebildete Heliostat von Gravesande beruhet auch ganz auf dem in §. 20. entwickelten allgemeinen Principe, wenn dasselbe auch bei diesem Instrumente nicht so unmittelbar wie bei dem im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Heliostaten von Prandi in Anwendung gebracht worden ist. Eine ausführliche Beschreibung dieses älteren Heliostaten wird hier nicht mehr nöthig sein, da nach der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen ausführlichen Beschreibung des Heliostaten von Prandi die Bedeutung aller seiner einzelnen Theile gewiß aus einer bloßen Ansicht der Figur sogleich völlig verständlich sein wird, weshalb wir jetzt unmittelbar zu seiner Aufstellung und seinem Gebrauche übergehen, und dabei die über die Bedeutung der einzelnen Theile uns noch nöthig scheinenden Bemerkungen anschließen wollen.

Zuerst wird das Fußgestell mittelst der dazu an dem Instrumente angebrachten Schrauben und eines Niveaus horizontal gestellt, und die auf dem Fußgestell gezogene Linie **MM**, mit welcher, wenn die Uhr horizontal gestellt wird, die Linie zwischen VI^h und XII^h auf dem Zifferblatte parallel sein muß, in die Lage der Mittagslinie des Beobachtungsorts, die Uhr nach Süden und der Spiegel nach Norden, gebracht, worauf man mittelst des dazu angebrachten Gradbogens der Uhr eine der Aequatorhöhe des Beobachtungsorts, worunter man bekanntlich die Ergänzung der Polhöhe zu neunzig Graden oder das Complement der Polhöhe versteht, gleiche Neigung gegen den Horizont giebt. Dann wird die Uhr richtig orientirt sein und die Zeigerstange **A'D'** sich in der Ebene des Aequators bewegen, auch der auf dem Zifferblatte senkrecht gegen dessen Ebene aufgestellte Stift **AA'** in der Richtung der Weltaxe liegen. Dieser Stift muß sich verlängern und verkürzen lassen und mit einer Scale versehen sein. Bezeichnen wir nun die Länge der Zeigerstange **A'D'** durch **R**, die Höhe **DD'** des Drehpunktes **D** von **BE** über der Zeigerstange **A'D'** durch **a**, und die Declination der Sonne am Beobachtungstage, welche, jenachdem sie nördlich oder südlich ist, positiv oder negativ genommen wird, durch Δ; so wird man, wenn man der Endspitze **A** des Stifts **AA'** die Höhe

$$a + R \tang \Delta$$

über der Zeigerstange giebt, letztere offenbar jederzeit durch Drehung um den Mittelpunkt der Uhr in eine solche Lage bringen können, daß der Schatten der Spitze **A** genau auf den Punkt **D** fällt, welches hierauf, wenn nur der Gang der Uhr richtig, d. h. so regulirt ist, daß die Zeigerstange in 24 Stunden

Digitized by Google

genau einen ganzen Umlauf vollendet, bei der Bewegung der Zeigerstange durch das Uhrwerk fortwährend der Fall sein wird, woran man eben auch erkennen kann, ob der Gang der Uhr richtig regulirt ist. Die Höhe a muß mindestens so groß angenommen werden, daß die Größe

$$a + R \tan \Delta$$

für alle Werthe von Δ, also auch dann noch, wenn man Δ gleich der negativ genommenen Schiefe der Ekliptik, d. h. näherungsweise $\Delta = -23\frac{1}{2}^0$ setzt, positiv bleibt, wird aber immer noch etwas größer angenommen werden müssen, damit für $\Delta = -23\frac{1}{2}^0$ die Höhe der Spitze A über der Zeigerstange nicht zu klein ausfällt. Nach diesen Vorbereitungen muß man nun in Folge des in §. 20. entwickelten Princips den Spiegel in eine solche Lage gegen das Uhrwerk bringen, daß AB = AD, d. h., wie leicht erhellet,

$$AB = R \sec \Delta = \frac{R}{\cos \Delta}$$

ist, und zugleich die Linie AB mit der Richtung zusammenfällt, in welcher man die Strahlen zu fixiren beabsichtigt. Zu dem Ende ist auf dem Fußgestell die orthogonale Projection der Spitze A bezeichnet, wenn der Stift AA' die Höhe a über der Zeigerstange hat, was für $\Delta = 0$, d. h. zur Zeit der Aequinoctien, stattfindet. Diese orthogonale Projection wird als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen, dessen Axen der x, y, z respective mit der Mittagslinie, der Linie zwischen Osten und Westen, und der Vertikale des Beobachtungsorts zusammenfallen. Der positive Theil der Axe der x soll nach Norden gerichtet sein, den positiven Theil der Axe der y wollen wir immer auf der Seite des Meridians annehmen, auf welcher, von A ausgehend, die Richtung liegt, in welcher die Strahlen fixirt werden sollen, und der positive Theil der Axe der z sei nach dem Zenith des Beobachtungsorts gerichtet. Der seinem absoluten Werthe nach 90^0 nicht übersteigende Neigungswinkel der von A ausgehenden Richtung, in welcher die Strahlen fixirt werden sollen, gegen den Horizont, indem man denselben als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem diese Richtung über oder unter der durch A gelegten Horizontalebene liegt, sei J, und der nach Norden hin genommene Neigungswinkel der Projection dieser Richtung auf dem Horizont gegen die Mittagslinie, welcher 180^0 nicht übersteigt und immer als positiv betrachtet wird, sei Ω. Denken wir uns nun durch den Punkt A ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der x_1 y_1 z_1 gelegt, und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunktes B des Spiegels in diesem Systeme durch X_1, Y_1, Z_1; so ist offenbar, weil AB. cos J die horizontale Projection von AB ist:

$$X_1 = AB \cdot \cos J \cdot \cos \Omega,$$
$$Y_1 = AB \cdot \cos J \cdot \sin \Omega,$$
$$Z_1 = AB \cdot \sin J;$$

Digitized by Google

und folglich, weil nach dem Obigen $AB = R \sec \Delta$ sein muß:

$$X_1 = R \sec \Delta \cos J \cos \Omega,$$
$$Y_1 = R \sec \Delta \cos J \sin \Omega,$$
$$Z_1 = R \sec \Delta \sin J.$$

Legen wir ferner durch den Punkt des Stifts, welcher über der Zeigerstange die Höhe a hat, ein dem primitiven Systeme der xyz, also auch dem Systeme der $x_1 y_1 z_1$ paralleles Coordinatensystem der $x_2 y_2 z_2$, und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunkts B des Spiegels in diesem Systeme durch X_2, Y_2, Z_2; so ist, weil offenbar, wenn P die Polhöhe bezeichnet, die Coordinaten des Punktes A in diesem neuen Systeme

$$R \operatorname{tang} \Delta \cos P,\ 0,\ -R \operatorname{tang} \Delta \sin P$$

sind, in völliger Allgemeinheit, wie sogleich erhellen wird:

$$X_2 = R \operatorname{tang} \Delta \cos P + X_1,$$
$$Y_2 = Y_1,$$
$$Z_2 = R \operatorname{tang} \Delta \sin P + Z_1;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$X_2 = R \operatorname{tang} \Delta \cos P + R \sec \Delta \cos J \cos \Omega,$$
$$Y_2 = R \sec \Delta \cos J \sin \Omega,$$
$$Z_2 = R \operatorname{tang} \Delta \sin P + R \sec \Delta \sin J;$$

oder

$$X_2 = R (\operatorname{tang} \Delta \cos P + \sec \Delta \cos J \cos \Omega),$$
$$Y_2 = R \sec \Delta \cos J \sin \Omega,$$
$$Z_2 = R (\operatorname{tang} \Delta \sin P + \sec \Delta \sin J).$$

Bezeichnen wir nun endlich die primitiven Coordinaten des Mittelpunkts B des Spiegels in dem Systeme der xyz durch X, Y, Z, und die Höhe der Spitze des Stifts zur Zeit der Aequinoctien über dem Fußgestelle des Instruments durch H; so ist offenbar

$$X = X_2,\ Y = Y_2,\ Z = H + Z_2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$X = R (\operatorname{tang} \Delta \cos P + \sec \Delta \cos J \cos \Omega),$$
$$Y = R \sec \Delta \cos J \sin \Omega,$$
$$Z = H + R (\operatorname{tang} \Delta \sin P + \sec \Delta \sin J);$$

durch welche Coordinaten folglich die gesuchte Lage des Mittelpunkts des Spiegels vollkommen bestimmt ist. Um aber diese Lage auch wirklich herbeiführen zu können, dazu dienen die an dem Instrumente angebrachten, aus der Figur ersichtlichen Verschiebungsvorrichtungen und Scalen, deren in's Einzelne gehende Beschreibung hier nicht weiter nöthig sein wird, indem insbesondere eine genauere Besichtigung des Instruments selbst immer die leichteste und beste Belehrung über den Zweck und den Gebrauch aller dieser Theile gewähren wird.

Digitized by Google

Man kann die vorhergehenden Formeln auch auf folgende Art ausdrücken:

$$X = R\frac{\cos J \cos \Omega + \sin \Delta \cos P}{\cos \Delta},$$

$$Y = R\frac{\cos J \sin \Omega}{\cos \Delta},$$

$$Z = H + R\frac{\sin J + \sin \Delta \sin P}{\cos \Delta}.$$

Für $\Omega = 0$, d. h. wenn die Strahlen im Meridian fixirt werden sollen, wird:

$$X = R\frac{\cos J + \sin \Delta \cos P}{\cos \Delta},$$

$$Y = 0,$$

$$Z = H + R\frac{\sin J + \sin \Delta \sin P}{\cos \Delta}.$$

Für $\Omega = 0$ und $J = 0$, d. h. wenn die Strahlen in der Richtung der Mittagslinie fixirt werden sollen, wird:

$$X = R\frac{1 + \sin \Delta \cos P}{\cos \Delta}, \quad Y = 0, \quad Z = H + R \operatorname{tang} \Delta \sin P.$$

Um die vorhergehende Berechnung der Coordinaten zu vermeiden, bedient sich Gravesande einer einfachen mechanischen Vorrichtung, welche er Positor, die Stellregel, nennt. Diese in Fig. 15. besonders dargestellte Vorrichtung besteht aus dem um F beweglichen Lineale GH, welches man durch Heraus- und Hineinschieben des Arms HJ verlängern und verkürzen kann. Macht man nun dadurch und mittelst einer angebrachten Scale $FJ = R \sec \Delta$, und setzt die Stellregel an die Stelle des Spiegels, so wird man leicht durch geeignete Verschiebungen derselben in der Horizontalebene und nach vertikaler Richtung, und durch geeignete Bewegungen ihres Lineals um seinen Drehpunkt bewirken können, daß eines Theils das Lineal der Stellregel in die Richtung fällt, in welcher man die Strahlen zu fixiren beabsichtigt, und andern Theils zugleich der Punkt J (Fig. 15.) mit dem Punkte A (Fig. 14.) zusammentrifft, worauf man die Stellregel entfernt, den Mittelpunkt B (Fig. 14.) des Spiegels an dieselbe Stelle versetzt, wo sich vorher der Drehpunkt F (Fig. 15.) der Stellregel befand, und den Stab BE (Fig. 14.) wieder gehörig in die an A'D' (Fig. 14.) befindliche Gabel einlegt. Alles was diese einfache Operation etwa sonst noch erfordert und zur Abkürzung und Erleichterung derselben dienen kann, wird sich einem Jeden bei der wirklichen Ausführung derselben sogleich ganz von selbst ergeben, und einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen. Daß dieses einfache mechanische Verfahren wenigstens zur annähernden Bestimmung des richtigen Orts des Mittelpunkts des Spiegels ganz geeignet ist, und selbst mit der genauen Berechnung der

Digitized by Google

Coordinaten dieses zu bestimmenden Orts zur vorläufigen annähernden Ermittelung desselben zweckmäßig in Verbindung zu bringen sein dürfte, kann nicht in Abrede gestellt werden, weshalb desselben hier auch besonders Erwähnung gethan worden ist.

§. 23.

Von der zweiten Klasse der Heliostaten, bei denen durch einen Spiegel die Fixirung der Strahlen nur in einer bestimmten Richtung bewirkt werden kann, wollen wir hier nur den folgenden erwähnen, durch welchen die Strahlen sich in der Richtung der Weltaxe fixiren lassen.

Derselbe besteht aus einer Uhr, deren Zifferblatt sich in eine solche Lage bringen läßt, daß seine Ebene auf der Ebene des Meridians senkrecht steht und gegen den Horizont unter einem der Aequatorhöhe des Beobachtungsorts gleichen Winkel geneigt ist, so daß also das Zifferblatt sich in der Ebene des Aequators befindet, und die auf dem Zifferblatte senkrecht stehende Zeigeraxe mit der Richtung der Weltaxe zusammenfällt. Der Gang dieser Uhr ist so regulirt, daß der Zeiger in 24 Stunden genau einen Umlauf auf dem Zifferblatte vollendet. Der Zeiger wird jederzeit so gestellt, daß der Schatten der Zeigeraxe auf dem Zifferblatte mit dem Zeiger zusammenfällt. Um diese Operation zu jeder Zeit des Jahrs verrichten zu können, muß die Zeigeraxe über das Zifferblatt nach beiden Seiten hin verlängert, und die Uhr mit zwei einander parallelen Zeigern oberhalb und unterhalb des Zifferblatts versehen sein. Kennt man übrigens die Zeit, so kann man auch unmittelbar nach derselben, wenn nur das Zifferblatt gehörig nach dem Meridian orientirt ist, dem Zeiger seine richtige Stellung auf dem Zifferblatte geben. Die Zeigeraxe trägt einen Spiegel, dessen Ebene auf der durch die Zeigeraxe und den Zeiger gehenden Ebene senkrecht steht und gegen die Ebene des Zifferblatts unter jedem beliebigen Winkel geneigt werden kann. Um diesen Winkel und überhaupt die richtige Lage des Spiegels, natürlich unter der Voraussetzung, daß alle vorhergehenden Bedingungen erfüllt sind, zu finden, dienen die folgenden Betrachtungen.

In Fig. 16. und Fig. 17. sei ANBS der Meridian, NS die Weltaxe, N der Nordpol und S der Südpol, ADBE der Aequator, und Σ die in dem Declinationskreise DNES stehende Sonne. Da nach allem Vorhergehenden die Ebene des Spiegels auf dem Declinationskreise DNES senkrecht steht, so läßt sich die ganze folgende Construction in der Ebene dieses Declinationskreises ausführen, und es kommt bloß darauf an, die Lage der Durchschnittslinie der Ebene des Spiegels mit derselben zu bestimmen. Weil nun der Sonnenstrahl ΣC nach CN reflectirt werden soll, so ist, wenn man NΣ in P halbirt und sich CP gezogen denkt, diese Linie offenbar das Einfallsloth,

Digitized by Google

also die auf derselben senkrecht stehende Linie FG die gesuchte Durchschnittslinie der Ebene des Spiegels mit der Ebene des Declinationskreises. Weil aber

$$\angle DCF + \angle FCN = \angle DCN = 90°$$

und auch

$$\angle NCP + \angle FCN = \angle FCP = 90°$$

ist, so ist $\angle DCF = \angle NCP$, also nach dem Vorhergehenden

$$\angle DCF = \tfrac{1}{2} \angle NC\Sigma = \tfrac{1}{2} (\angle ECN \mp \angle EC\Sigma),$$

wo das obere Zeichen einer nördlichen, das untere einer südlichen Declination der Sonne entspricht. Bezeichnen wir also die im ersten Falle als positiv, im zweiten Falle als negativ betrachtete Declination der Sonne durch Δ, so ist offenbar völlig allgemein

$$\angle DCF = \tfrac{1}{2} (90° - \Delta)$$

oder

$$\angle DCF = 45° - \tfrac{1}{2} \Delta,$$

wodurch jetzt augenscheinlich die Lage, welche man dem Spiegel zu geben hat, vollkommen bestimmt ist.

Daß, wenn man mittelst eines solchen Heliostaten die Strahlen nach einer andern beliebigen Richtung hin fixiren will, dies nur durch Reflexion von einem zweiten denselben dargebotenen Spiegel bewirkt werden kann, ist schon in §. 19. bemerkt worden. Auch wird das Vorhergehende gewiß hinreichend sein, um einen Jeden zum gehörigen Gebrauche anderer Heliostaten, welche die Strahlen in von der Weltaxe verschiedenen bestimmten Richtungen fixiren, vollkommen in den Stand zu setzen.

§. 24.

Eins der sinnreichsten winkelmessenden Instrumente ist der Spiegelsextant, welcher ganz auf der Wirkung ebener Spiegel beruhet und besonders auch deshalb von Wichtigkeit ist, weil sich mittelst desselben Winkel in allen Lagen gegen den Horizont, selbst ohne eines Stativs zu bedürfen, mit gleicher Leichtigkeit messen lassen, was bei den meisten andern winkelmessenden Instrumenten, z. B. bei dem sonst so wichtigen Theodoliten, welcher bekanntlich nur zur Messung von Horizontalwinkeln mittelst eines, und zur Messung von Vertikalwinkeln mittelst eines zweiten eingetheilten Kreises geeignet ist, nicht der Fall ist. Wir wollen daher das Princip dieses auch für die Physik nicht unwichtigen höchst interessanten Instruments ausführlich entwickeln, und dabei zugleich seine wesentlichen Einrichtungen erläutern.

Zwei ebene Glasspiegel, von denen der eine, meistens der kleinere, jedoch nur zur Hälfte belegt ist, stehen auf der Ebene

Digitized by Google

eines eingetheilten, etwas mehr als sechszig Grade fassenden Kreissectors senkrecht. Der kleinere nur halb belegte Spiegel ist auf dieser Ebene in unveränderlicher Lage befestigt; der andere größere ganz belegte Spiegel ist dagegen um den Mittelpunkt des eingetheilten Kreissectors als seinen Drehpunkt mittelst einer zugleich den Nonius, zu dessen Ablesung ein Mikroskop dient, tragenden Alhidade beweglich. Parallel mit der Ebene des Limbus ist in unveränderlicher Lage ein Fernrohr an dem Instrumente befestigt, dessen Axe nach dem Mittelpunkte des kleinern nur halb belegten Spiegels gerichtet ist, und an der untern Seite des Instruments ist ein Handgriff angebracht, mittelst welches man das Instrument bequem in der Hand halten und seine Ebene in jede beliebige Lage bringen kann. Der Nullpunkt der Theilung des Limbus liegt, wenn man sich den Mittelpunkt des Instruments nach oben, den Limbus nach unten gekehrt denkt, auf der rechten Seite des Limbus nahe bei dessen Endpunkte. Jedoch befindet sich rechts vom Nullpunkte immer noch ein kleiner eingetheilter Theil des Limbus, welcher der Excedens genannt, und nachher weiter besprochen werden wird.

Wenn nun A und B in Fig. 18. zwei Objecte sind, die wir uns im Folgenden als bloße Punkte denken, so sehe man, den Handgriff des Instruments mit der rechten Hand fassend, durch das Fernrohr und den unbelegten (obern) Theil des kleinen Spiegels A_1 nach dem links von dem Beobachter liegenden Objecte A, und gebe der Ebene des Instruments durch geeignete Drehungen desselben um seinen Handgriff und dem größern ganz belegten Spiegel B_1 durch sanfte stetige Drehung der mit der linken Hand zu fassenden Alhidade eine solche Lage, daß ein von dem rechts von dem Beobachter liegenden Objecte B auf den größern Spiegel fallender Strahl BB_1, nachdem er von diesem Spiegel nach B_1A_1 auf den kleinern Spiegel reflectirt worden ist, und an dem belegten (untern) Theile des letztern Spiegels eine zweite Reflexion nach A_1C erfahren hat, auf diesem Wege durch das Fernrohr in das Auge gelangt, so daß also der directe von A kommende Strahl AC, und der nach zweimaliger Reflexion von B kommende Strahl A_1C mit einander zusammenfallen, was man daran erkennt, daß dem durch das Fernrohr sehenden Auge die beiden Objecte A und B sich genau zu decken scheinen.

Alles dieses vorausgesetzt, ergiebt sich nun mittelst einer einfachen Betrachtung der Figur nach dem katoptrischen Grundgesetze und einem bekannten geometrischen Satze auf der Stelle die Gleichung

$$2\varphi + (180° - 2\psi) + \omega = 180°,$$

in welcher die Bedeutung der Symbole sogleich aus der Figur selbst erhellen wird, oder, wie daraus leicht folgt, die Gleichung

$$\omega = 2(\psi - \varphi).$$

Digitized by Google

Weil aber nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie

$$\psi = \varphi + \Theta, \text{ also } \Theta = \psi - \varphi$$

ist, so ist nach der vorhergehenden Gleichung

$$\omega = 2\Theta,$$

in welcher letztern Gleichung das ganze Grundprincip des Sextanten enthalten ist, wie wir sogleich sehen werden, wenn wir uns nur die eigentliche Bedeutung der Winkel ω und Θ etwas genauer vergegenwärtigen.

Der Winkel $\omega = ACB$ ist nämlich zuvörderst der von den aus dem Punkte **C** nach den beiden Objecten **A** und **B** gezogenen Linien **AC** und **BC** eingeschlossene Winkel, und da man nun diesen Winkel, wenn nur, was bei dem Gebrauche des Sextanten immer vorausgesetzt wird und jederzeit wohl zu beachten ist, die Objecte **A** und **B** sehr weit von dem Standpunkte des Beobachters entfernt sind, immer ohne merklichen Fehler als mit dem von den aus dem Standpunkte des Beobachters nach den beiden Objecten gezogenen Gesichtslinien eingeschlossenen Winkel übereinstimmend zu betrachten berechtigt sein wird, so ist ω ein diesem letzteren Winkel, welchen zu messen eben die Absicht bei dem Gebrauche des Instruments ist, wenigstens sehr nahe und unter Voraussetzung sehr großer Entfernungen der Objecte **A** und **B** ohne allen merklichen Fehler gleicher Winkel. Ferner ist der Winkel Θ offenbar der Neigungswinkel der beiden auf der Ebene des Instruments nach der Voraussetzung senkrecht stehenden Spiegelebenen gegen einander; und ist also das Instrument zur Messung dieses Winkels eingerichtet, so gelangt man mittelst der oben bewiesenen Gleichung $\omega = 2\Theta$ auch auf der Stelle zur Kenntniß des zu bestimmenden Winkels ω, den die aus dem Standpunkte des Beobachters nach den beiden Objecten **A** und **B** gezogenen Gesichtslinien mit einander einschließen.

Die Messung des gesuchten Winkels ω mittelst des Sextanten reducirt sich also, wie man hieraus sieht, lediglich auf die Messung des Neigungswinkels Θ der beiden Spiegelebenen gegen einander. Denken wir uns nun zuerst durch Drehung der Alhidade den großen Spiegel genau in eine mit dem kleinen Spiegel parallele Lage gebracht, so kann, wenn dann der Nullpunkt des Nonius nicht genau mit dem Nullpunkte der Theilung des Limbus coincidirt — die genaue Coincidenz wird gewiß höchst selten und fast nie stattfinden — der Nullpunkt des Nonius entweder auf den Limbus selbst, d. h. links von dem Nullpunkte der Theilung desselben, oder auf den Excedens, d. h. rechts von dem Nullpunkte der Theilung des Limbus, fallen. Bezeichnen wir den unter dieser Voraussetzung zwischen dem Nullpunkte der Theilung des Limbus und dem Nullpunkte des Nonius liegenden Bogen durch i, und denken uns mittelst der Alhidade den großen Spiegel gedreht, bis die genaue Coincidenz der Bilder der beiden Objecte bewirkt worden ist, worauf der No-

Digitized by Google

nius abgelesen wird, so ist, wenn man das Resultat dieser Ablesung als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem dieselbe auf dem Limbus selbst oder auf dem Excedens gemacht worden ist, und unter dieser Voraussetzung durch α bezeichnet, offenbar im ersten der beiden vorher namhaft gemachten Fälle $\alpha - i$, im zweiten dieser beiden Fälle dagegen $\alpha + i$ das genaue Maaß des von dem Nullpunkte des Nonius auf dem Limbus durchlaufenen Bogens. Da nun aber dieser Bogen augenscheinlich das Maaß des Winkels ist, um welchen sich der große Spiegel aus seiner ersten dem kleinen Spiegel parallelen Lage gedreht hat, welcher offenbar dem Neigungswinkel der beiden Spiegelebenen gegen einander bei der zweiten Lage des großen Spiegels gleich ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Theta = \alpha \mp i,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem bei der parallelen Lage der beiden Spiegel der Nullpunkt des Nonius auf den Limbus selbst oder auf den Excedens fällt. Betrachten wir aber die Größe i nicht mehr wie bisher stets als positiv, sondern als positiv oder als negativ, je nachdem bei der parallelen Lage der beiden Spiegel der Nullpunkt des Nonius auf den Limbus selbst oder auf den Excedens fällt, so können wir nach dem Vorhergehenden in völliger Allgemeinheit offenbar

$$\Theta = \alpha - i$$

setzen. Weil nun nach dem Obigen $\omega = 2\Theta$ ist, so ist

$$\omega = 2(\alpha - i),$$

mittelst welcher Gleichung der zu messende Winkel ω aus dem auf dem Limbus unmittelbar abgelesenen Bogen α und dem Bogen i, welcher letztere der Collimationsfehler oder der Inderfehler des Sextanten genannt wird, bestimmt werden muß. Um aber bei dieser Bestimmung die etwas lästige Multiplication mit 2 zu umgehen und gewissermaßen gleich durch das Instrument selbst verrichten zu lassen, sind auf dem Limbus, was wohl zu beachten und jedenfalls eine höchst zweckmäßige Einrichtung ist, die Zahlen der Grade u. s. w. so aufgeschrieben, daß halbe Grade u. s. w. für ganze Grade u. s. w. gerechnet sind. Bezeichnen wir also unter dieser Voraussetzung das nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder als negativ zu betrachtende Resultat der gemachten Ablesung durch α, und den nach dem Vorhergehenden ebenfalls wieder gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Collimationsfehler oder Inderfehler durch i, so ist nach dem Obigen die Größe des zu messenden Winkels ω offenbar mittelst der Gleichung

$$\omega = \alpha - i$$

zu bestimmen.

Von vorzüglicher Wichtigkeit ist es hiernach für den Gebrauch des Sextanten, den Collimationsfehler oder Inderfehler

Digitized by Google

desselben genau zu kennen, und die Bestimmung dieses Fehlers macht daher vor der Anwendung des Instruments selbst jederzeit ein besonderes Geschäft des Beobachters aus, weshalb auch hier eine kurze Anleitung dazu erforderlich ist. Eine Methode den Collimationsfehler zu bestimmen, die eigentlich durch seinen vorher entwickelten allgemeinen Begriff sogleich ganz von selbst gegeben wird, ist folgende.

Durch geeignete Drehungen des Instruments und der Alhidade bringe man das direct und das nach doppelter Reflexion gesehene Bild eines und desselben Fixsterns, oder überhaupt eines und desselben nur möglichst weit entfernten und hell leuchtenden Objects, z. B. auch der Sonne, mit einander genau zur Deckung, und lese dann den Nonius ab, wobei man wie gewöhnlich nach dem Vorhergehenden auf dem Limbus selbst gemachte Ablesungen als positiv, auf dem Excedens gemachte Ablesungen dagegen als negativ betrachtet. Bezeichnet man dann das Resultat dieser Ablesung durch α, so ist, weil unter den gemachten Voraussetzungen der gemessene Winkel offenbar verschwindet, $\omega = 0$, und folglich nach dem Obigen $\alpha - i = 0$, also $i = \alpha$, wodurch demnach der Collimationsfehler oder Inderfehler bestimmt ist. Eine andere vor der so eben entwickelten den Vorzug verdienende Methode ist aber folgende.

Man messe den scheinbaren Durchmesser d der Sonne, d. h. den Winkel, unter welchem die Sonne von der Erde aus gesehen erscheint, auf gewöhnliche aus dem Vorhergehenden hinreichend bekannte Weise, indem man nämlich den direct gesehenen links liegenden Sonnenrand mit dem durch doppelte Reflexion gesehenen rechts liegenden Sonnenrande zur Berührung bringt, welchem Falle Fig. 19. entspricht, so ist nach dem Vorhergehenden, wenn wieder α die mit ihrem gehörigen Vorzeichen genommene Ablesung des Nonius, und i den ebenfalls mit seinem gehörigen Vorzeichen genommenen Collimationsfehler oder Inderfehler bezeichnet,

$$d = \alpha - i.$$

Nun bringe man aber ferner den direct gesehenen rechts liegenden Sonnenrand mit dem durch doppelte Reflexion gesehenen links liegenden Sonnenrande zur Berührung, welchem Falle Fig. 20. entspricht, so ist, wie man aus der Figur leicht ersieht,

$$(180° - 2\varphi) + 2\psi + \omega = 180°,$$

also

$$\omega = 2(\varphi - \psi),$$

und folglich, weil

$$\varphi = \psi + \Theta, \text{ also } \Theta = \varphi - \psi$$

ist, wieder

$$\omega = 2\Theta.$$

Bezeichnet man daher jetzt die auf dieselbe Weise wie vorher

Digitized by Google

positiv oder negativ genommene Ablesung des Nonius durch α', und den eben so wie vorher positiv oder negativ genommenen Collimationsfehler oder Inderfehler natürlich wieder durch i, so wird mittelst einer unsern früheren Betrachtung ganz ähnlichen Betrachtung auf der Stelle erhellen, daß jetzt in völliger Allgemeinheit

$$d = i - \alpha'$$

ist. Aus den beiden Gleichungen

$$d = \alpha - i \text{ und } d = i - \alpha'$$

folgt aber

$$\alpha - i = i - \alpha',$$

also

$$2i = \alpha + \alpha',$$

und folglich

$$i = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),$$

wodurch der Collimationsfehler oder Inderfehler i gefunden ist.

Auch erhält man durch Addition der beiden Gleichungen

$$d = \alpha - i \text{ und } d = i - \alpha'$$

auf der Stelle

$$2d = \alpha - \alpha',$$

also

$$d = \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha'),$$

und kann folglich auch den scheinbaren Sonnendurchmesser d finden. Zu erinnern hat man sich bei dieser von der gewöhnlichen etwas abweichenden, hier aber absichtlich gewählten, Darstellung nur immer, daß auf dem Limbus selbst gemachte Ablesungen stets als positiv, auf dem Excedens gemachte Ablesungen als negativ zu betrachten sind, und daß der Collimationsfehler oder Inderfehler als positiv oder negativ betrachtet wird, jenachdem bei der parallelen Stellung beider Spiegelebenen der Nullpunkt des Nonius der Alhidade auf den Limbus selbst oder auf den Excedens fällt. Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Obigen auch der Collimationsfehler oder Inderfehler von allen auf gewöhnliche Weise, d. h. so, daß man das direct gesehene links liegende Object mit dem durch doppelte Reflexion gesehenen rechts liegenden Objecte zur Coincidenz bringt, gemessenen Winkeln, oder vielmehr von den bei diesen Messungen auf dem Limbus gemachten Ablesungen, zu subtrahiren. Schlüge man den entgegengesetzten Weg ein, so würde vielmehr von dem Collimationsfehler oder Inderfehler die auf dem Limbus gemachte Ablesung zu subtrahiren sein.

Bei allen Sonnenbeobachtungen muß man jederzeit ein gefärbtes Glas, welches gewöhnlich dem Sextanten beigegeben wird, vor das Oculargläs des Fernrohrs schrauben, oder auch die an dem Sextanten befestigten, zu diesem Zwecke bestimmten

Digitized by Google

gefärbten Gläser vor das Objectivglas schlagen, um sich nicht die Augen zu verderben.

Bei der Messung von Vertikalwinkeln bedient man sich des angequickten Quecksilberhorizonts (§. 13. Anmerkung). Ist nämlich A in Fig. 21. ein Object, dessen Elevationswinkel ACH in dem Standpunkte C über der durch diesen Punkt gezogenen Horizontalen CH gemessen werden soll, so stelle man einen angequickten Quecksilberhorizont MN auf, und messe in C mit dem Sextanten den Winkel ACA′ zwischen dem Objecte A und seinem Bilde A′ in dem ebenen Spiegel MN, wobei man das Bild A′ als das links liegende, das Object A als das rechts liegende Object (m. s. das Vorhergehende) betrachtet. Wird dann der Kürze wegen der gemessene Winkel ACA′ durch E, der zu bestimmende Elevationswinkel ACH durch E′, und der Winkel BAC, welcher wohl die Parallaxe genannt zu werden pflegt, durch P bezeichnet, so ist nach dem katoptrischen Grundgesetze und bekannten geometrischen Elementarsätzen, wie leicht erhellen wird:

$$2 \angle ABM = E + P$$

und

$$\angle ABM = \angle CBN = \angle BCH = E - E',$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$2(E - E') = E + P,$$

woraus sogleich

$$2E' = E - P, \text{ also } E' = \tfrac{1}{2}(E - P)$$

folgt. Ist nun, was bei praktischen Anwendungen meistens der Fall sein wird, die Entfernung AC des Objects A von dem Standpunkte C des Beobachters so groß, daß man den Winkel P, und noch mehr seine Hälfte $\frac{1}{2}P$ ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten kann, so ist $E' = \frac{1}{2}E$, und der gesuchte Elevationswinkel E′ wird also auf der Stelle gefunden, wenn man von dem gemessenen Winkel E die Hälfte nimmt. Dürfte man sich nicht für berechtigt halten, geradezu $\frac{1}{2}P$ als verschwindend zu betrachten, so müßte man $\frac{1}{2}E$ als einen ersten Näherungswerth des gesuchten Elevationswinkels betrachten, und durch Messung einer horizontalen Standlinie und eines zweiten Elevationswinkels auf die vorhergehende Weise, die Größe der Entfernung AC wenigstens näherungsweise bestimmen, wozu die einfachsten Sätze der ebenen Trigonometrie hinreichend sind, auch die Entfernung BC des Punktes C von dem Spiegel unmittelbar messen. Dann kann man, weil bei allen solchen Messungen doch immer BC im Verhältniß zu AC nur von sehr geringer Größe sein wird, mit hinreichender Annäherung BC als einen aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AC beschriebenen Kreisbogen betrachten, und hat also, wenn P in Secunden ausgedrückt angenommen wird, die Proportion:

$$2.AC.\pi : BC = 360.60.60 : P,$$

Digitized by Google

d. i.

$$2 . AC . \pi : BC = 1296000 : P,$$

oder

$$AC . \pi : BC = 648000 : P,$$

also

$$P = \frac{648000}{\pi} \cdot \frac{BC}{AC}$$

oder

$$P = 206264{,}8 \cdot \frac{BC}{AC},$$

mittelst welcher Formel die Parallaxe P, und dann auch der gesuchte Elevationswinkel

$$E' = \tfrac{1}{2} (E - P)$$

gefunden werden kann.

Bevor man mit dem Sextanten sicher beobachten kann, sind immer noch einige Berichtigungen mit demselben vorzunehmen, über die hier in der Kürze nur Folgendes bemerkt werden kann.

Nach dem Vorhergehenden ist es bekanntlich eine nothwendige Bedingung, daß beide Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen, was man also vor dem Gebrauche desselben sorgfältig untersuchen muß.

Man beginnt diese Untersuchung mit dem großen Spiegel. Zu dem Ende stelle man den Nonius auf die Mitte des Gradbogens, halte das Instrument horizontal, den großen Spiegel dem Auge zugewendet, und vergleiche den direct gesehenen Theil des Gradbogens mit seinem im Spiegel gesehenen Bilde. Wenn beide Gradbogen ein ununterbrochenes Ganzes bilden, so steht der große Spiegel senkrecht auf der Ebene des Sextanten, aber er neigt sich vorwärts, wenn der reflectirte Bogen höher erscheint, und rückwärts, wenn derselbe niedriger erscheint als der direct gesehene Bogen. Die in dieser Beziehung nöthigen Correctionen lassen sich mittelst einer auf der Rückseite des großen Spiegels befindlichen Schraube bewirken.

Nachdem man auf die vorhergehende Weise die Lage des großen Spiegels gehörig berichtigt hat, untersuche man, ob sich das direct und das durch doppelte Reflexion gesehene Bild eines hellen Gegenstandes, z. B. eines hellen Fixsterns oder der Sonne, durch geeignete Bewegungen der Alhidade genau zur Coincidenz bringen lassen. Ist dies der Fall, so hat der kleine Spiegel die richtige Lage. Findet das Gegentheil statt, so muß man die Lage des kleinen Spiegels gegen die Ebene des Sextanten mittelst der dazu an demselben angebrachten Schraube so lange verändern, bis die vorher erwähnte Bedingung erfüllt ist. Bei einigen Sextanten findet man an dem kleinen Spiegel

Digitized by Google

noch eine zweite Schraube, mittelst welcher man demselben eine geringe Drehung um eine auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehende Axe geben kann; diese Schraube dient zur Wegschaffung des Inderfehlers, wird aber besser weggelassen, weil sie das Instrument nur wandelbar macht, und der Inderfehler doch vor jeder Beobachtung nach der oben gegebenen Anleitung bestimmt und dann bei den abgelesenen Winkeln in Rechnung gebracht werden muß, was nicht die mindeste Schwierigkeit hat.

Das der Ebene des Sextanten parallele Fernrohr, oder vielmehr der Ring, in welchen dasselbe eingeschraubt ist, läßt sich mittelst einer auf der hintern Fläche des Sextanten befindlichen Schraube etwas höher oder niedriger stellen, welches nöthig ist, um den Bildern der Objecte den erforderlichen Grad der Helligkeit zu geben.

Im Fernrohre sind zwei nicht zu feine einander parallele Fäden ausgespannt, zwischen denen in der Mitte die Bilder der Objecte zur Deckung oder Berührung gebracht werden.

In Fig. 22. ist ein Spiegelsextant seiner äußern Gestalt nach abgebildet, in welcher Zeichnung man leicht die sämmtlichen vorher erwähnten einzelnen Theile erkennen wird.

Insbesondere für den Seemann, dem das unaufhörlich schwankende Schiff nie einen völlig sichern Standort bei seinen zu nautischen Zwecken fortwährend, so oft es nur die Witterung erlaubt, anzustellenden astronomischen Beobachtungen darbietet, ist der Sextant ein ganz unentbehrliches Instrument, und sein Gebrauch auf der See daher auch der wichtigste.

Eine sehr deutliche Beschreibung des Spiegelsextanten und Anleitung zu seinem Gebrauche enthält noch immer: Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten. Von J. G. F. Bohnenberger. Göttingen. 1795. 8., ein Buch, welches vielen Astronomen der erste Leiter bei ihren praktischen Studien gewesen ist, und auch jetzt mit Recht häufig noch zu diesem Zwecke gebraucht wird. Eine sehr vollständig durchgeführte ausführliche analytische Theorie dieses wichtigen und interessanten Instruments habe ich in einer in meinen Beiträgen zur reinen und angewandten Mathematik. Erster Theil. Brandenburg. 1838. 4. befindlichen Abhandlung zu liefern und in dieser Abhandlung zugleich zu zeigen gesucht, daß die in Bohnenbergers vorher angeführtem viel gebrauchten und in vielen Rücksichten allerdings immer noch sehr empfehlenswerthen Buche gegebene Theorie des Sextanten auf einer zum Theil ganz falschen Ansicht der Sache beruhet, und die von ihm gegebenen Correctionsformeln keineswegs strenge theoretische Richtigkeit besitzen, sondern höchstens als Näherungsformeln betrachtet werden dürfen.

Digitized by Google

§. 25.

Alle Instrumente, welche zur Messung der Neigungswinkel der Seitenflächen der Krystalle gegen einander gebraucht werden, pflegt man vorzugsweise Goniometer zu nennen. Eins dieser Instrumente ist das in Fig. 23. abgebildete Goniometer von Charles oder Gambey, dessen wesentliche Theile die folgenden sind *).

Um den Mittelpunkt eines eingetheilten Kreises, dessen Ebene sich mittelst der nöthigen Stellschrauben horizontal stellen läßt, ist eine mit einem Nonius und einer Mikrometerschraube versehene Alhidade beweglich. Auf dieser Alhidade über ihrem Drehpunkte wird mit etwas Wachs der Krystall so befestigt, daß, nachdem die Ebene des Kreises horizontal gestellt worden ist, die Kante, an welcher der zu messende Flächenwinkel liegt, sich in vertikaler Lage befindet, also auf der Ebene des Kreises senkrecht steht. Neben dem Kreise ist, wie die Figur zeigt, ein Fernrohr aufgestellt, in welchem ein Fadenkreuz mit einem vertikalen und einem horizontalen Faden ausgespannt ist, wobei wir nämlich voraussetzen, daß sich die Axe des Fernrohrs in horizontaler Lage befinde, in welche dieselbe mittelst eines an dem Fernrohr befestigten Niveaus gebracht werden kann.

Der Gebrauch dieses Instruments reducirt sich auf zwei Operationen, indem man nämlich erstens den Krystall, nachdem die Ebene des Kreises horizontal gestellt worden ist, auf der Alhidade so befestigen muß, daß die Kante, an welcher der zu messende Flächenwinkel liegt, vertikal steht; und dann zweitens diesen Winkel messen muß, nachdem man vorher die Axe des Fernrohrs horizontal gestellt hat. Zur Ausführung beider Operationen wollen wir jetzt die nöthige Anleitung geben, indem wir damit zugleich die erforderlichen theoretischen Erläuterungen verbinden.

Wenn eine Seitenfläche des Krystalls vertikal steht, und eine vertikal stehende gerade Linie sich in derselben spiegelt, so wird auch, wie aus der Lehre von den ebenen Spiegeln auf der Stelle erhellet, das Bild dieser geraden Linie vertikal stehen, und sich also mit dem in dem horizontal gestellten Fernrohre ausgespannten vertikalen Faden zur Coincidenz bringen lassen, welcher Schluß natürlich auch umgekehrt werden kann. Wenn man also nach und nach den beiden Seitenflächen des Krystalls, welche den zu messenden Winkel einschließen, eine solche Lage giebt, daß die Bilder einer vertikal stehenden geraden Linie, etwa der scharfen Kante einer vertikal stehenden Mauer oder eines entfernten Blitzableiters, mit dem vertikalen Faden in

*) Biot, auch Lamé, legt die Erfindung Charles bei; in der deutschen Bearbeitung der Physik von Pouillet wird Gambey als Erfinder genannt.

Digitized by Google

dem horizontal gestellten Fernrohre genau coincidiren, so werden die beiden in Rede stehenden Seitenflächen, und also auch die Kante des Krystalls, in welcher dieselben sich schneiden, vertikal stehen, wie verlangt wurde.

Nach Vollendung dieser vorbereitenden Operation kann man zur Winkelmessung selbst schreiten. Ist nun in Fig. 24. der zu messende Winkel der Winkel BAC in dem die Grundfläche des auf der um den Punkt O drehbaren Alhidade MN befestigten Krystalls darstellenden Dreiecke ABC, so gebe man dem Krystalle durch Drehung der Alhidade MN um den Punkt O eine solche Lage, daß das von AB in D reflectirte Bild eines sehr weit entfernten leuchtenden Punktes S auf der horizontal gestellten Axe des Fernrohrs F, d. h. im Mittelpunkte des Fadenkreuzes, erscheint, und lese den Nonius ab. Dann bringe man den Krystall durch Drehung der Alhidade um den Punkt O in eine solche Lage, daß das von AC reflectirte Bild desselben entfernten leuchtenden Punktes S wieder auf der Axe oder in dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes des völlig unverrückt stehen gebliebenen Fernrohrs erscheint, wodurch die Alhidade MN in die Lage M'N', das Dreieck ABC in die Lage A'B'C' kommen mag; die Reflexion von AC soll aber in dem Punkte E stattfinden. Liest man nun auch bei dieser zweiten Lage der Alhidade den Nonius ab, so wird man leicht die Größe des Winkels MOM', um welchen sich die Alhidade gedreht hat, ermitteln können; und es wird daher jetzt ferner darauf ankommen, die Beziehung, in welcher dieser abgelesene Winkel zu dem zu messenden Winkel BAC steht, zu finden, wozu uns die folgenden einfachen geometrischen Betrachtungen führen werden.

Den von den Strahlen SD und SE bei dem Punkte S eingeschlossenen Winkel DSE wollen wir der Kürze wegen durch Σ, die von den einfallenden und reflectirten Strahlen SD, SE und DF, EF bei D und E mit AB und A'C' eingeschlossenen, nach dem katoptrischen Grundgesetze einander gleichen Winkel ADS = BDF und C'ES = A'EF aber respective durch Θ und Ω bezeichnen. Ferner werde der zu messende Winkel BAC durch A, der abgelesene Winkel MOM' durch $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Weil nun offenbar $\angle$ SDE $= 2\Theta$, $\angle$ SED $= 180^0 - 2\Omega$ ist, so ist in dem Dreiecke SDE:

$$\Sigma + 2\Theta + (180^0 - 2\Omega) = 180^0,$$

also

$$\Sigma = 2(\Omega - \Theta).$$

Im dem Dreiecke DEJ ist aber offenbar $\Omega - \Theta = \angle$ DJE, also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma = 2 \angle \text{DJE}.$$

In dem Dreiecke AKJ ist ferner

$$\mathfrak{A} = \angle \text{DJE} + \angle \text{HKH}'.$$

Digitized by Google

Weil nun bei den beiden Lagen des Krystalls oder der Alhidade der Winkel AHM oder A′H′M′ offenbar ganz derselbe constante Winkel, und folglich $\angle AHM = \angle A'H'M'$, in dem Vierecke KHOH′ aber nach einem bekannten Satze

$$\angle HKH' + \angle AHM + (180° - \angle A'H'M') + \mathfrak{A} = 360°$$

ist, so ist

$$\angle HKH' + \mathfrak{A} = 180°, \quad \angle HKH' = 180° - \mathfrak{A};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$A = 180° - \mathfrak{A} + \angle DJE,$$

d. i. nach dem Obigen

$$A = 180° - \mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}\Sigma.$$

Kann der leuchtende Punkt S als unendlich weit entfernt und folglich der Winkel Σ ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachtet werden, so ist

$$A = 180° - \mathfrak{A},$$

woraus sich die einfache Regel ergiebt, daß der zu messende Winkel immer das Supplement des abgelesenen Winkels, d. h. die Ergänzung des abgelesenen Winkels zu 180° ist, und daher aus dem letztern immer leicht der erstere berechnet werden kann.

Wenn es die Umstände irgend gestatten, wird man natürlich jederzeit alle drei Winkel des Dreiecks ABC oder A′B′C′ messen, und hat dann, wenn diese Winkel durch A, B, C, die entsprechenden abgelesenen Winkel durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden, nach dem Vorhergehenden die drei Gleichungen:

$$A = 180° - \mathfrak{A},$$
$$B = 180° - \mathfrak{B},$$
$$C = 180° - \mathfrak{C};$$

durch deren Addition sich

$$A + B + C = 540° - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}),$$

d. i.

$$180° = 540° - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}),$$

also

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 360°$$

ergiebt, welche Gleichung eine sehr zu beachtende Kontrole für die Richtigkeit der Messungen abgiebt, welche man sich überall, wo es nur irgend angeht, zu verschaffen suchen sollte.

Was in den physikalischen Lehrbüchern, z. B. selbst in dem sonst so vortrefflichen größern Werke von Biot (Traité de Physique expérimentale et mathématique), zur Erläuterung der Theorie der mit dem obigen Goniometer anzustellenden Messungen gewöhnlich beigebracht wird, scheint mir nicht so deutlich wie die obige ganz aus der Natur der Sache geschöpfte Darstellung zu sein.

Digitized by Google

Daß man übrigens bei diesen Messungen, wenn nur auch der eingetheilte Kreis mit einer Vorrichtung zur groben und feinen Horizontalbewegung auf seinem Stative, die natürlich von der Bewegung der Alhidade um ihren Drehpunkt ganz unabhängig sein muß, versehen wird, das Princip der Repetition in Anwendung bringen, und dadurch eine größere Genauigkeit in den Resultaten als durch einzelne Messungen erreichen kann, fällt einem Jeden, der mit dem Wesen dieses Verfahrens überhaupt gehörig vertraut ist, auf der Stelle in die Augen. Nachdem man nämlich die erste Messung des Winkels, ohne den Nonius bei dem zweiten Stande der Alhidade abzulesen, vollendet hat, führt man, die Alhidade ganz unverrückt stehen lassend, durch Drehung des Kreises die erste Seitenfläche des Krystalls wieder in ihre erste Lage zurück, stellt den Kreis fest, und macht nun wie vorher durch Drehung der Alhidade eine zweite Messung, worauf man ganz eben so eine dritte, vierte, u. s. w. Messung des zu bestimmenden Winkels machen kann. Am Ende der ganzen Operation liest man ab, und dividirt den abgelesenen Bogen, welcher immer dem ganzen von der Alhidade auf dem Limbus durchlaufenen Bogen, der auch 360^0 übersteigen kann, gleich sein muß, durch die Anzahl der gemachten Messungen, so erhält man das Supplement des zu messenden Flächenwinkels, d. h. dessen Ergänzung zu 180^0, aus welcher dann der gesuchte Winkel selbst leicht abgeleitet werden kann. Diese Andeutungen werden gewiß hinreichend sein, um dieses Repetitionsverfahren in allen Fällen mit Sicherheit und Präcision in Ausführung bringen zu können. Eine völlig sichere Aufstellung des Instruments und größte Solidität aller seiner einzelnen Theile sind ein Haupterforderniß, wenn dieses Verfahren dem Zwecke, welchen man durch dasselbe zu erreichen beabsichtigt, nämlich möglichste Beseitigung des Einflusses der Theilungsfehler des Limbus, gehörig entsprechen soll.

§. 26.

Ein anderes Goniometer, welches gleichfalls auf der Reflexion des Lichts beruhet und gewöhnlich vorzugsweise das Reflexionsgoniometer genannt wird, ist das Goniometer von Wollaston. Dasselbe beruhet auf einem ganz ähnlichen Princip wie das vorhergehende Goniometer.

Wir wollen annehmen, daß die Kante des Krystalls, in welcher die beiden Seitenflächen desselben, deren Neigungswinkel gegen einander gemessen werden soll, sich schneiden, horizontal sei, und daß sich der Krystall um diese horizontale Kante drehen lasse. Bringt man nun den Krystall in eine solche Lage, daß man das Bild einer horizontal liegenden geraden Linie, etwa einer horizontalen Fenstersprosse, durch Reflexion von der einen der beiden Krystallflächen erblickt, so kann man sich die Stelle des horizontalen Fußbodens des Zimmers, in welchem man die Messung anstellt, wo das Bild erscheint, genau merken.

Digitized by Google

Dreht man nun den Krystall um seine horizontale Kante so lange, bis durch Reflexion von der andern der beiden Krystallflächen das Bild desselben Gegenstandes genau an derselben Stelle des Fußbodens wie vorher erscheint, so wird jetzt natürlich die zweite Krystallfläche genau dieselbe Lage im Raume haben, welche vorher die erste Krystallfläche hatte, und der Winkel, um welchen man den Krystall um seine horizontale Kante gedreht hat, ist offenbar der Nebenwinkel oder die Ergänzung zu 180° des zu messenden Neigungswinkels der beiden Krystallflächen gegen einander. Ist man also in Besitz einer Vorrichtung, jenen Drehungswinkel zu messen, so ergiebt sich auch der zu messende Neigungswinkel der beiden Krystallflächen gegen einander auf der Stelle, wenn man den gemessenen Drehungswinkel von 180° abzieht. Das Wollaston'sche Goniometer ist nun auch weiter nichts, als eine im Ganzen sehr einfache Vorrichtung, den in Rede stehenden Drehungswinkel zu messen.

Eine Abbildung des Instruments nach seinen Haupttheilen liefert Fig. 25. Die mit einem Nonius N versehene eingetheilte Kreisscheibe AA sitzt an einer horizontalen Axe fest, welche mittelst der daran befestigten, mit einem gerieften Rande versehenen Scheibe BB herumgedreht werden kann. Eine zweite an der Drehungsaxe der eingetheilten Kreisscheibe AA befestigte Scheibe ist CC, welche mittelst der Schraube L in der Klemme M festgestellt, und dann in Verbindung mit der die Theilung tragenden Scheibe AA mittelst der Mikrometerschraube O auf bekannte Weise noch sehr fein bewegt werden kann. Die Drehungsaxe der eingetheilten Kreisscheibe ist aber hohl und nimmt eine zweite mittelst der Scheibe DD in ihr drehbare Axe in sich auf, an welcher der rechtwinklige Arm EFG befestigt ist, mit welchem bei G ein ähnlicher um G drehbarer Arm GHJ in Verbindung steht, durch welchen bei J ein Stäbchen gesteckt ist, an welches der Krystall bei K mit etwas Wachs so befestigt wird, daß er durch geeignete Drehung des Arms GHJ um G in eine gegen die Ebene der eingetheilten Kreisscheibe AA senkrechte Lage gebracht werden kann. Ist dies geschehen, so stellt man das Instrument so auf, daß seine Ebene auf der Ebene des Fensters, dessen horizontale Sprossen man bei der Messung benutzen will, senkrecht steht, und stellt mittelst der Scheibe BB und der Schrauben L und O die Theilung genau auf Null. Dann dreht man mittelst der Scheibe DD den Krystall so lange, bis das Bild der Fenstersprosse durch Reflexion von der einen Krystallfläche an einer bestimmten Stelle des Fußbodens erscheint, worauf man die Schraube L löst, und mittelst der Scheibe BB und der Mikrometerschraube O den Krystall in eine solche Lage bringt, daß das Bild derselben Fenstersprosse durch Reflexion von der andern Krystallfläche wieder genau an derselben Stelle des Fußbodens erscheint, worauf man den Drehungswinkel des Krystalls auf der Stelle an dem Nonius ablesen kann, und dann durch Subtraction desselben von 180° den

Digitized by Google

zu messenden Neigungswinkel der beiden Krystallflächen gegen einander erhält. Ob der Krystall gegen die Ebene der eingetheilten Kreisscheibe und diese gegen die Ebene des Fensters die richtige Lage hat, erkennt man bei der Messung selbst daran, daß es möglich ist, bei beiden Beobachtungen der Bilder der horizontalen Fenstersprosse dieselben mit derselben geraden Linie auf dem horizontalen Fußboden des Zimmers zur Coincidenz zu bringen.

Diese kurze Beschreibung und Anleitung zum Gebrauche des Instruments wird hier gewiß hinreichend sein, um eine möglichst deutliche Anschauung von demselben zu geben.

§. 27.

Bei größeren geodätischen Messungen wird zur genauen Bezeichnung sehr weit entfernter Punkte statt der früher üblichen hölzernen und anderer Signale ein eignes zu diesem Zweck bestimmtes sehr sinnreiches, von Gauß erfundenes und mit dem Namen Heliotrop belegtes Instrument in Anwendung gebracht, welches ebenfalls auf der Lehre von den ebenen Spiegeln beruhet, und daher hier noch in der Kürze beschrieben werden soll.

Der in Fig. 26. abgebildete Heliotrop kann als aus drei größeren Hauptheilen bestehend betrachtet werden, nämlich:

1) aus dem Stativ ABCDE mit den Trägern AC und BD;

2) aus dem auf den Trägern AC und BD frei liegenden und um seine Axe mit der Hand drehbaren Fernrohre ABH;

3) aus dem an dem Objectivende *) AC des Fernrohrs befestigten und aus mehreren einzelnen Theilen bestehenden Spiegelsysteme.

Die Einrichtung des Stativs ist sehr einfach, und aus der Figur ohne weitere Beschreibung leicht mit hinreichender Deutlichkeit ersichtlich. Mittelst der Fußschraube F kann das Fernrohr in vertikaler Richtung etwas bewegt werden. Das kleine Untergestell G, welches in Fig. 27. noch besonders abgebildet ist, dient dagegen dazu, dem Fernrohre eine sanfte horizontale Bewegung zu geben. In dem Rahmen uvwx ist nämlich der Theil i, auf welchem in dem darin befindlichen Loche die Fußschraube F in Fig. 26. ruhet, mittelst der Schrauben p und q beweglich, und dann drehet sich das ganze Instrument um die fest stehende Spitze G′ als um seinen Mittelpunkt, wobei es nöthig sein dürfte, zu bemerken, daß, wenn diese Drehung mit Sanftheit und Leichtigkeit vor sich gehen soll, G″ nicht auch eine Spitze wie G′ sein darf, sondern vielmehr etwas abgerundet sein muß, weil hiergegen von den Künstlern zuweilen gefehlt wird.

*) Man vergleiche das 17te Kapitel.

Digitized by Google

Das Fernrohr ist ein astronomisches Fernrohr*), wie immer bei geodätischen Instrumenten mit einem Fadenkreuze versehen, und letzteres ist mittelst vier Schrauben, von denen in der Figur drei in a, b, c sichtbar sind, nach zwei auf einander senkrechten Richtungen beweglich. Die durch den Mittelpunkt des Oculars **) und den Mittelpunkt des Fadenkreuzes bestimmte optische Axe des Fernrohrs muß genau mit der Drehungsaxe desselben zusammenfallen. Um dies zu bewirken, richtet man das Fernrohr auf einen recht kenntlichen, bestimmten Punkt, so daß derselbe von dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes genau gedeckt wird; dreht man nun das Fernrohr auf seinen Trägern mit der Hand herum, so muß, wenn die optische Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt, der in Rede stehende Punkt fortwährend von dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes genau gedeckt werden, und ist dies also nicht der Fall, so muß mittelst der oben namhaft gemachten vier Schrauben die Lage des Fadenkreuzes so lange nach und nach verändert werden, bis sich die in Rede stehende Bedingung als genau erfüllt zeigt, wonach die optische Axe gehörig rectificirt sein wird, wie es erforderlich ist. Vor das Ocular läßt sich ein gefärbtes Glas H schlagen, und muß beim Gebrauche des Instruments jederzeit vor dasselbe geschlagen werden, worüber nachher das Weitere vorkommen wird.

Was nun endlich das Spiegelsystem betrifft, so besteht dasselbe aus einem größeren gewöhnlichen Glasspiegel, der aber in der Mitte durchbrochen ist, und eigentlich aus zwei Spiegeln JKLM und NOPQ besteht, die beide genau mit einander parallel sein müssen. Senkrecht gegen die Ebene dieses großen Spiegels ist ein zweiter kleinerer, gewöhnlich schwarzer Spiegel RST befestigt. Diese beiden Spiegel sind in der an dem Objectivende des Fernrohrs befestigten Gabel UVWX um die gegen die Drehungsaxe des Fernrohrs senkrechte und mit den Ebenen der beiden Spiegel parallele Axe UX mittelst des Hebels YZ drehbar. Drei Correctionsschrauben, von denen in der Figur bei m und n zwei sichtbar sind, dienen zur Veränderung der Lage der Drehungsaxe der Spiegel, um dieselbe gehörig rectificiren, nämlich senkrecht gegen die Drehungsaxe des Fernrohrs stellen zu können, wobei übrigens natürlich vorausgesetzt wird, daß dieselbe durch den Künstler schon nahe in die erforderliche Lage gebracht worden, und also nur noch kleinen Fehlern zu begegnen ist, weshalb auch mittelst der vorher namhaft gemachten drei Schrauben die Lage der Drehungsaxe der Spiegel nur wenig verändert werden kann. Die Correctionsschrauben e, h, f sind bestimmt, die Ebenen der beiden Theile des großen Spiegels und die Ebene des kleinen Spiegels mit der Drehungsaxe der Spiegel parallel zu machen.

*) Ueber das astronomische Fernrohr s. m. das 17te Kapitel.

**) Man vergleiche das 17te Kapitel.

Digitized by Google

Mittelst der Correctionsschraube d wird der Theil des großen Spiegels, an welchem sich dieselbe befindet, mit dem andern Theile dieses Spiegels parallel gestellt, und die Correctionsschraube g dient endlich, dem kleinen Spiegel mittelst eines an seiner Rückseite befestigten Arms eine kleine Drehung zu geben und senkrecht gegen den großen Spiegel zu stellen.

Bei dem Gebrauche wird der Heliotrop auf ein recht solides hölzernes Stativ gestellt. Ob die Säule des messingenen Heliotropenstativs, d. i. die Mitte des Fernrohrs, genau vertikal über einem bestimmten Punkte des Erdbodens steht, prüft man durch ein von dem Punkte E herabhängendes Loth, und läßt zu dem Ende die Kopfplatte des den Heliotropen tragenden hölzernen Stativs mit einem runden Loche versehen, durch welches man das Loth hindurch hängen läßt.

Das so eben beschriebene Instrument ist nun bestimmt, das Sonnenlicht in der Form eines hellen Sterns von einem Punkte, wo das Instrument aufgestellt ist, nach einem andern Punkte, wo ein Theodolit oder ein anderes winkelmessendes Instrument aufgestellt ist, hin zu werfen, und seine Einrichtung beruhet lediglich auf dem folgenden ganz einfachen Satze.

In Fig. 28. seien MN und KL zwei auf einander genau senkrecht stehende ebene Spiegel. Auf den Spiegel KL falle von einem leuchtenden Punkte der Strahl AC, und werde von demselben nach CB reflectirt. Ist nun CB' die Richtung, nach welcher der Strahl AC von dem Spiegel MN reflectirt wird, so liegen CB und CB' genau in einer und derselben geraden Linie. Denn nach den Gesetzen der Reflexion des Lichts ist $\angle ACK = \angle BCL$, und, weil die Spiegel auf einander senkrecht stehen, auch $\angle ACK = \angle B'CK$, folglich $\angle BCL = \angle B'CK$, woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

Soll nun das Sonnenlicht von einem Punkte O, wo der Heliotrop aufgestellt ist, nach einem andern Punkte O' hin geworfen werden, so richten wir zuerst das Fernrohr auf O', so daß O' von dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes gedeckt wird. Hierauf geben wir, nachdem wir das gefärbte Glas vor das Ocular geschlagen haben, durch Drehung des Fernrohrs auf seinen Lagern mit der linken, und durch gleichzeitige Drehung der Spiegel um ihre Drehungsaxe mit Hülfe des an derselben angebrachten Hebels mit der rechten Hand dem kleinen Spiegel eine solche Lage, daß von ihm das Sonnenbild in das Fernrohr reflectirt wird und mit dessen Mittelpunkte der Mittelpunkt des Fadenkreuzes zusammenfällt; dann wird dem vorher bewiesenen Satze zufolge von dem großen Spiegel das Sonnenlicht genau nach dem Punkte O' reflectirt werden, wie verlangt wurde. Auch wird Letzteres ungeachtet der Bewegung der Sonne überhaupt so lange der Fall sein, so lange wir durch fortgesetzte sanfte Drehung des Fernrohrs und des Spiegelsystems auf die angegebene Weise den Mittelpunkt des Sonnenbildes genau auf dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes festhalten, und eben so lange wird also ein Beobachter in O' den Punkt O als einen

Digitized by Google

hell leuchtenden Punkt erblicken, und das Fernrohr seines Winkelmessers genau auf denselben richten, oder, wie man zu sagen pflegt, auf denselben pointiren können.

Rücksichtlich des Erfolgs, mit welchem der Heliotrop angewandt worden ist, führt Gauß die folgenden Beispiele an. Die Entfernung vom Lichtenberge bis zum Berge Hill beträgt 39952 Meter; die des Deisters vom Hill 40605; die des Lichtenberges vom Brocken 42437 Meter; der Hill ist vom Brocken 55122 Meter entfernt. Auf den drei ersten Entfernungen sah man das reflectirte Licht immer mit bloßem Auge; auf der letzten Distanz war es, wenn die Umstände die Beobachtung irgend begünstigten, gleichfalls sichtbar, und einmal, unter besonders günstigen Umständen, sah man das vom Brocken aus reflectirte Licht sogar auf dem Hohenhagen in einer Entfernung von 69194 Metern. Im Fernrohre konnte man das Licht vom Inselsberge auf dem Brocken in einer Entfernung von 105986 Meter noch sehen, und gegen Sonnen-Untergang sehr gut darauf pointiren.

Ueber die verschiedenen Berichtigungen des Heliotropen, welche sich hier ohne eine unserm Zwecke nicht entsprechende Weitläufigkeit nicht behandeln lassen, enthält meine Geodäsie. Leipzig. 1842. S. 96. alles Erforderliche, worauf ich mir daher hier zu verweisen erlaube.

§. 28.

Eine zweckmäßige Abänderung des in §. 11. beschriebenen Photometers von Ritchie ist folgende.

In Fig. 29. ist ABCD ein hölzerner, inwendig geschwärzter, bei AB und CD offener, sonst überall verschlossener, auf einem einfachen Stative MN aufgestellter viereckiger Kasten, in welchem zwei unter einem Winkel von 90^0 gegen einander, unter Winkeln von 45^0 gegen die parallelen Seitenwände AD und BC des Kastens geneigte Planspiegel GE und GF aufgestellt sind. Die obere Seitenwand AD ist durchbrochen, so daß sich in derselben zwei mit einer Seitenlinie in der Mitte G des Kastens zusammenstoßende gleich große viereckige Oeffnungen GH und GJ befinden, über welche feines in Oel getränktes Papier, statt dessen man auch eine matt geschliffene Glastafel wählen kann, geklebt ist.

Bei dem Gebrauche entfernt man auf ähnliche Art wie in §. 11. die beiden leuchtenden Punkte, deren Lichtstärken man mit einander vergleichen will, auf beiden Seiten des Kastens so weit von den beiden Spiegeln, bis die beiden Papierflächen sich ganz gleichförmig erleuchtet zeigen, was sich, weil die beiden Papierflächen in der Mitte der obern Wand des Kastens mit einander zusammenstoßen, mit ziemlicher Sicherheit und Genauigkeit beurtheilen läßt. Sind dann L, L die Lichtstärken der beiden leuchtenden Punkte, und D, D ihre horizontalen

Digitized by Google

Entfernungen von den beiden Spiegeln, so ist auf ganz ähnliche Art wie in §. 11.

$$\frac{L}{D^2} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{D}^2},$$

also

$$L : \mathfrak{L} = D^2 : \mathfrak{D}^2,$$

wobei man nur zu beachten hat, daß die auf die beiden Spiegel fallenden Strahlen offenbar unter gleichen Winkeln gegen dieselben geneigt sind, wenn nämlich, was sich von selbst versteht, der Kasten auf seinem Stativ so aufgestellt ist, daß seine Seitenwände AB und CD bei dem Gebrauche des Instruments horizontal sind.

Anmerkung. Ueber verschiedene, auf der Lehre von den ebenen Spiegeln beruhende optische Spielwerke, z. B. über die in Fig. 30. abgebildete sogenannte Vorrichtung durch ein Brett zu sehen, wird sich ein Jeder leicht selbst Rechenschaft ablegen können, und wir halten es nicht für nöthig und zweckmäßig, uns über solche Dinge hier weiter zu verbreiten.

Sechstes Kapitel.

Von den sphärischen Spiegeln.

§. 29.

Jeder durch ein Segment einer Kugelfläche dargestellte Spiegel wird ein sphärischer Spiegel genannt, und zwar ein concaver oder ein convexer sphärischer Spiegel, jenachdem die concave oder die convexe Seite dieser Kugelfläche als die spiegelnde Fläche betrachtet wird.

Wenn ein sphärischer Spiegel von einem Strahle, der von dem strahlenden Punkte S ausgeht, in dem Punkte E getroffen wird, so kann man immer den diesem einfallenden Strahle SE entsprechenden reflectirten Strahl leicht auf folgende Art construiren. Von dem Einfallspunkte E aus ziehe man auf derselben Seite des Spiegels, auf welcher der einfallende Strahl liegt, eine gerade Linie, die entweder selbst oder über den Einfallspunkt E hinaus verlängert gedacht durch den Mittelpunkt C der Kugelfläche geht, von welcher der Spiegel ein Segment ist. Diese gerade Linie ist offenbar das Einfallsloth. Legt man nun durch dasselbe und den einfallenden Strahl eine Ebene, und zieht in dieser Ebene von dem Einfallspunkte aus auf der-

Digitized by Google

selben Seite des Spiegels, auf welcher das Einfallsloth und der einfallende Strahl liegen, eine gerade Linie, welche, natürlich ohne mit dem einfallenden Strahle zusammen zu fallen, mit dem Einfallslothe einen dem mit demselben von dem einfallenden Strahle eingeschlossenen gleichen Winkel einschließt, so erhält man den gesuchten reflectirten Strahl, wie aus dem Grundgesetze der Reflexion des Lichts und den einfachsten Sätzen von der Kugel auf der Stelle hervorgeht.

Auch erhellet auf der Stelle, daß in allen den Ebenen, welche sich durch den strahlenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugelfläche legen lassen, von welcher der Spiegel ein Segment ist, die Reflexion auf völlig gleiche Weise vor sich geht, weshalb es verstattet ist, im Folgenden immer nur eine dieser Ebenen zu betrachten, wodurch die Untersuchung wesentlich abgekürzt und vereinfacht wird. Der strahlende Punkt soll bei dieser Untersuchung immer durch S; der Mittelpunkt der Kugelfläche, von welcher der Spiegel ein Segment ist, durch C; der Einfallspunkt durch E, also der einfallende Strahl durch SE; der Punkt, in welchem der Spiegel von der durch die Punkte C und S der Lage nach bestimmten geraden Linie geschnitten wird, durch A; endlich der Durchschnittspunkt des nöthigenfalls gehörig verlängert gedachten reflectirten Strahls mit der durch die Punkte C und S der Lage nach bestimmten geraden Linie durch S_1, der reflectirte Strahl also durch S_1E bezeichnet werden; was hier der Kürze wegen ein für alle Mal bemerkt wird, und im Folgenden nicht wiederholt werden soll.

§. 30.

Zuerst betrachten wir den concaven sphärischen Spiegel.

Den Halbmesser der Kugelfläche, von welcher der Spiegel ein Segment ist, bezeichnen wir durch r, und setzen in Fig. 31. der Kürze wegen $AS = a$, $AS_1 = x$. Ferner bezeichnen wir den Winkel ASE durch i, und jeden der beiden einander gleichen von dem einfallenden und von dem reflectirten Strahle mit dem Einfallslothe eingeschlossenen Winkel durch ω, wie auch schon aus der Figur selbst ersichtlich ist.

In dem ersten der drei in der Figur dargestellten, überhaupt nur möglichen Fälle hat man nach einem bekannten trigonometrischen Satze die Proportionen:

$$CE : CS = \sin i : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(i+2\omega) : \sin\omega;$$

oder

$$r : a - r = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : r - x = \sin(i+2\omega) : \sin\omega.$$

Aus diesen beiden Proportionen erhält man die Gleichungen:

$$r\sin\omega = (a-r)\sin i,$$
$$r\sin\omega = (r-x)\sin(i+2\omega);$$

Digitized by Google

also

$$(a-r)\sin i = (r-x)\sin(i+2\omega).$$

Weil nun aber wegen der ersten dieser drei Gleichungen

$$\sin\omega = -\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin i,$$

und folglich

$$\cos\omega = \sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2},$$

ist; so ist

$$\sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega = -2\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2},$$

$$\cos 2\omega = \cos\omega^2 - \sin\omega^2 = 1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2;$$

folglich

$$\sin(i+2\omega) = \sin i\cos 2\omega + \cos i\sin 2\omega$$

$$= \sin i\left\{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\};$$

also, wenn man dies in die aus dem Vorhergehenden bekannte Gleichung

$$(a-r)\sin i = (r-x)\sin(i+2\omega)$$

einführt, und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$r-x = \frac{a-r}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}$$

oder, wie man leicht findet:

$$x = \frac{2r\left\{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\} - a}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

woraus sich endlich auch leicht

$$a-x = 2(a-r)\frac{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}$$

ergiebt.

In dem zweiten der drei in der Figur dargestellten, überhaupt nur möglichen Fälle hat man die Proportionen:

$$CE : CS = \sin i : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(i-2\omega) : \sin\omega;$$

Digitized by Google

oder

$$r : r - a = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : x - r = \sin(i - 2\omega) : \sin\omega.$$

Aus diesen beiden Proportionen erhält man die Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r-a)\sin i,$$
$$r\sin\omega = (x-r)\sin(i-2\omega);$$

also

$$(r-a)\sin i = (x-r)\sin(i-2\omega).$$

Weil nun aber wegen der ersten dieser drei Gleichungen

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i,$$

und folglich

$$\cos\omega = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

ist; so ist

$$\sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega = 2\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2\sin i^2},$$

$$\cos 2\omega = \cos\omega^2 - \sin\omega^2 = 1 - 2\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2;$$

folglich

$$\sin(i-2\omega) = \sin i\cos 2\omega - \cos i\sin 2\omega$$
$$= \sin i\left\{1 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\};$$

also, wenn man dies in die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$(r-a)\sin i = (x-r)\sin(i-2\omega)$$

oder

$$(a-r)\sin i = (r-x)\sin(i-2\omega)$$

einführt, und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$r - x = \frac{a-r}{1 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$x = \frac{2r\left\{1 - \left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\} - a}{1 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

Digitized by Google

woraus sich endlich auch leicht

$$a-x=2(a-r)\frac{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}$$

ergiebt, welche Formeln sämmtlich mit den im vorhergehenden Falle gefundenen Formeln vollkommen übereinstimmen.

In dem dritten der drei in der Figur dargestellten überhaupt nur möglichen Fälle hat man die Proportionen:

$$CE : CS = \sin i : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(2\omega - i) : \sin\omega;$$

oder

$$r : r - a = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : r + x = \sin(2\omega - i) : \sin\omega.$$

Aus diesen beiden Proportionen erhält man die Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r-a)\sin i,$$
$$r\sin\omega = (r+x)\sin(2\omega - i);$$

also

$$(r-a)\sin i = (r+x)\sin(2\omega - i).$$

Weil nun aber wegen der ersten dieser drei Gleichungen

$$\sin\omega = \left(1-\frac{a}{r}\right)\sin i,$$

und folglich

$$\cos\omega = \sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}$$

ist; so ist

$$\sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega = 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2},$$

$$\cos 2\omega = \cos\omega^2 - \sin\omega^2 = 1 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2;$$

folglich

$$\sin(2\omega - i) = -(\sin i\cos 2\omega - \cos i\sin 2\omega)$$
$$= -\sin i\left\{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\};$$

also, wenn man dies in die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$(r-a)\sin i = (r+x)\sin(2\omega - i)$$

Digitized by Google

oder

$$-(a-r)\sin i = (r+x)\sin(2\omega - i)$$

einführt, und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$r+x = \frac{a-r}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$x = -\frac{2r\left\{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\} - a}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

woraus sich endlich auch leicht

$$a+x = 2(a-r)\frac{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}$$

ergiebt. Diese Formeln stimmen mit den in den beiden vorhergehenden Fällen gefundenen Formeln nicht überein, werden aber, wie sogleich in die Augen fällt, mit denselben in vollkommene Uebereinstimmung gebracht, wenn man $-x$ für x, d. i. nicht wie im Vorhergehenden $x = AS_1$, sondern $x = -AS_1$ setzt, wozu man auch gleich vom Anfange an darin hätte Anleitung finden können, daß die Punkte S und S_1 in diesem dritten Falle nicht wie in den beiden ersten Fällen auf einer, sondern auf entgegengesetzten Seiten des Punktes A liegen. Nehmen wir nun hierauf gehörig Rücksicht, so ergiebt sich aus allem Vorhergehenden überhaupt das folgende allgemeine Resultat.

Wenn man unter Beibehaltung aller im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen die Entfernung des strahlenden Punktes S von dem Punkte A stets als positiv, die Entfernung des Punktes S_1 von dem Punkte A aber als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die Punkte S und S_1 auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Punktes A liegen, so ist in völliger Allgemeinheit:

$$x = \frac{2r\left\{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\} - a}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2 - 2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

Digitized by Google

so wie auch

$$r-x=\frac{a-r}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

$$a-x=2(a-r)\frac{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}.$$

Ueberlegt man jedoch, daß diese Formeln, wie auf der Stelle in die Augen fällt, völlig ungeändert bleiben, wenn man für r, a, x respective — r, — a, — x setzt, so wird man sogleich übersehen, daß das vorhergehende Resultat unter noch etwas allgemeinerer Form auch auf folgende Art ausgesprochen werden kann.

Wenn man unter Beibehaltung aller im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen die Entfernungen der Punkte C, S, S_1 von dem Punkte A stets als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem dieselben auf der einen oder auf der andern Seite des Punktes A liegen, so ist in völliger Allgemeinheit

$$x=\frac{2r\left\{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\}-a}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

so wie

$$r-x=\frac{a-r}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

$$a-x=2(a-r)\frac{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}.$$

§. 31.

Auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen den concaven sphärischen Spiegel wollen wir nun auch den convexen sphärischen Spiegel betrachten. Diese Betrachtung ist aber weit einfacher als jene, weil jetzt offenbar nur der eine in Fig. 32. dargestellte Fall eintreten kann.

Bezeichnen wir wieder den Halbmesser der Kugelfläche, von welcher der Spiegel ein Segment ist, durch r, und setzen gleichfalls analog den im vorhergehenden Paragraphen zuerst eingeführten Bezeichnungen $AS=a$, $AS_1=x$; so haben wir

Digitized by Google

nach dem schon im vorhergehenden Paragraphen immer angewandten trigonometrischen Satze die Proportionen:

$$CE : CS = \sin i : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(2\omega - i) : \sin\omega;$$

oder

$$r : a + r = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : r - x = \sin(2\omega - i) : \sin\omega.$$

Aus diesen Proportionen erhält man die Gleichungen:

$$r\sin\omega = (a+r)\sin i,$$
$$r\sin\omega = (r-x)\sin(2\omega - i);$$

also

$$(a+r)\sin i = (r-x)\sin(2\omega - i).$$

Weil nun aber wegen der ersten dieser drei Gleichungen

$$\sin\omega = \left(1 + \frac{a}{r}\right)\sin i,$$

und folglich

$$\cos\omega = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

ist; so ist

$$\sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega = 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)\sin i\sqrt{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$\cos 2\omega = \cos\omega^2 - \sin\omega^2 = 1 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2;$$

folglich

$$\sin(2\omega - i) = -(\sin i\cos 2\omega - \cos i\sin 2\omega)$$
$$= -\sin i\left\{1 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\right\};$$

also, wenn man dies in die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$(a+r)\sin i = (r-x)\sin(2\omega - i)$$

einführt, und aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$r - x = \frac{a + r}{1 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$x = \frac{2r\left\{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\right\} + a}{1 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2 - 2\left(1 + \frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1 - \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}},$$

Digitized by Google

woraus sich endlich auch leicht

$$a+x=2(a+r)\frac{1-\left(1+\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1+\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1+\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1+\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1+\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1+\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}$$

ergiebt.

§. 32.

Es wäre jedenfalls sehr vortheilhaft, wenn die im vorhergehenden Paragraphen für den converen sphärischen Spiegel entwickelten Formeln mit den früher für den concaven sphärischen Spiegel entwickelten Formeln in Uebereinstimmung gebracht werden könnten, weil man dadurch in den Besitz ganz allgemein für beide Klassen sphärischer Spiegel geltender Formeln gesetzt und die Möglichkeit herbeigeführt werden würde, die Theorie der sphärischen Spiegel unter ganz allgemeine Gesichtspunkte zu fassen. Diese Uebereinstimmung wird aber, wie aus den beiden vorhergehenden Paragraphen sogleich erhellen wird, sehr leicht dadurch herbeigeführt, daß man in den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln für r, x respective $-r$, $-x$ setzt, oder auch bloß dadurch, daß man $-a$ für a setzt. Nimmt man nun nur stets auf die Lage der Punkte C, S, S_1 gegen den Punkt A gehörig Rücksicht, so wird sehr leicht die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes, bei welchem die Bedeutung der gebrauchten Symbole aus dem Vorhergehenden ganz von selbst ersichtlich ist, erhellen:

Wenn man die Entfernungen der Punkte C, S, S_1 von dem Punkte A stets als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem dieselben auf der einen oder auf der andern Seite des Punktes A liegen, so ist in völliger Allgemeinheit

$$x=\frac{2r\left\{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}\right\}-a}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

so wie

$$r-x=\frac{a-r}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

$$a-x=2(a-r)\frac{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}{1-2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2-2\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos i\sqrt{1-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}.$$

Digitized by Google

§. 33.

Läßt man in den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen ganz allgemeinen Formeln, indem a ungeändert bleibt, den Winkel i sich der Null nähern, d. h. läßt man sich den einfallenden Strahl SE um den Punkt S drehen und dabei der Linie SA nähern, so nähern sin i und cos i sich respective den Gränzen 0 und 1, und nach dem vorhergehenden Paragraphen nähern sich also offenbar die Größen x, $r - x$, $a - x$ respective den Gränzen

$$\frac{2r\left\{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)\right\} - a}{1 - 2\left(1 - \frac{a}{r}\right)} = \frac{ar}{2a - r},$$

$$\frac{a - r}{1 - 2\left(1 - \frac{a}{r}\right)} = \frac{r(a-r)}{2a - r},$$

$$2(a-r)\,\frac{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)}{1 - 2\left(1 - \frac{a}{r}\right)} = \frac{2a(a-r)}{2a - r};$$

und können denselben auch beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur den Winkel i der Null, d. h. den Strahl SE der Linie SA nahe genug kommen läßt. Bezeichnen wir also die Gränze, welcher sich unter den gemachten Voraussetzungen die Größe x nähert, durch a_1, so haben wir nach dem Vorhergehenden die folgenden Formeln:

$$a_1 = \frac{ar}{2a - r},\quad r - a_1 = \frac{r(a-r)}{2a - r},\quad a - a_1 = \frac{2a(a-r)}{2a - r};$$

von denen sich die erste auch leicht unter der eleganten Form

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{r}$$

darstellen läßt.

Denkt man sich jetzt die Figuren, an welche vorher die Betrachtung der concaven und convexen sphärischen Spiegel angeschlossen worden ist, nur um die durch den strahlenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugelfläche, von welcher der Spiegel ein Segment ist, gehende gerade Linie wie um eine Axe gedreht, so wird auf der Stelle erhellen, daß es, so wie nach dem Obigen für jeden ebenen Spiegel, auch für jeden sphärischen Spiegel ein durch Reflexion entstandenes Bild eines jeden strahlenden Punktes, von welchem Strahlen auf den Spiegel fallen, giebt. Dieses Bild liegt nach dem Vorhergehenden immer in der durch den strahlenden Punkt und den

Digitized by Google

Mittelpunkt der Kugelfläche, von welcher der Spiegel ein Segment ist, gehenden geraden Linie, und seine Lage in dieser geraden Linie muß jederzeit mit Hülfe der im Vorhergehenden bewiesenen allgemein gültigen Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{r}$$

ermittelt werden. Zugleich ergiebt sich aber aus den vorhergehenden Betrachtungen auch unmittelbar, daß dieses Bild nicht ganz in demselben Sinne wie bei dem ebenen Spiegel aufzufassen ist, d. h. daß sich in demselben nicht wie bei dem ebenen Spiegel alle von dem strahlenden Punkte auf den Spiegel fallenden Strahlen nach der Reflexion als in einem bloßen Punkte wieder mit einander vereinigen, indem dies nur näherungsweise für die ganz nahe bei der durch den strahlenden Punkt und den Mittelpunkt der dem Spiegel entsprechenden Kugelfläche gehenden geraden Linie auf den Spiegel fallenden Strahlen, und zwar desto genauer, je näher bei der in Rede stehenden geraden Linie die Strahlen auffallen, gilt. Streng genommen hat man nach den obigen Entwickelungen bei dem sphärischen Spiegel das Bild nur als eine ihrer Lage nach übrigens völlig bestimmte Gränze zu betrachten, welcher sich die Durchschnittspunkte der reflectirten Strahlen mit der durch den strahlenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugelfläche, von welcher der Spiegel ein Segment ist, gehenden geraden Linie desto mehr nähern, je näher bei dieser geraden Linie die von dem strahlenden Punkte ausgehenden einfallenden Strahlen auf den Spiegel fallen. Daher können natürlich auch die Bilder sphärischer Spiegel nie mit solcher Bestimmtheit und Schärfe wie die Bilder ebener Spiegel sich darstellen, weil letztere in der That sämmtliche von einem Punkte ausgehende Strahlen nach der Reflexion auch wieder mit geometrischer Genauigkeit in einem Punkte, welcher eben das Bild des strahlenden Punktes ist, mit einander vereinigen, was hier übrigens natürlich nur so zu verstehen ist, daß die Strahlen so von dem Spiegel sämmtlich reflectirt werden, als wenn sie von einem und demselben hinter dem Spiegel liegenden Punkte kämen.

§. 34.

In Fig. 31. und Fig. 32. wollen wir uns nun durch den Punkt C eine beliebige gerade Linie gelegt denken, und diese gerade Linie als die erste Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems annehmen, dessen Anfangspunkt C ist. Die positiven ersten Coordinaten in diesem Systeme nehmen wir so an, daß die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der ersten Coordinatenaxe mit dem um C als Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogen nach der dem Symbole r im Vorhergehenden beigelegten Bedeutung $-r$ ist. Die Coordinaten der Punkte S und S_1, wo jetzt S_1 das Bild von S sein soll, seien respective p, q und p_1, q_1.

Digitized by Google

Weil offenbar die Entfernungen der Punkte S und S_1 von dem Punkte C durch $a - r$ und $a_1 - r$ dargestellt werden können, und unter dieser Form jederzeit gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, jenachdem p, p_1 oder q, q_1 gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung ähnlicher Dreiecke auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Proportionen:

$$a - r : a_1 - r = p : p_1 = q : q_1;$$

also, weil nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$r - a_1 = \frac{r(a-r)}{2a-r} \text{ oder } a_1 - r = \frac{r(a-r)}{r-2a}$$

ist:

$$a - r : \frac{r(a-r)}{r-2a} = p : p_1 = q : q_1,$$

also

$$r - 2a : r = p : p_1 = q : q_1.$$

Bei dem concaven sphärischen Spiegel ist nun, wenn r positiv ist, auch a positiv, und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$a = r + \sqrt{p^2 + q^2} \text{ oder } a = r - \sqrt{p^2 + q^2},$$

jenachdem p positiv oder negativ ist, also

$$a = r + (+p)\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \text{ oder } a = r - (-p)\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2},$$

d. i. immer

$$a = r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

Bei dem concaven sphärischen Spiegel ist ferner, wenn r negativ ist, auch a negativ, und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$a = r - \sqrt{p^2 + q^2} \text{ oder } a = r + \sqrt{p^2 + q^2},$$

jenachdem p negativ oder positiv ist, also

$$a = r - (-p)\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \text{ oder } a = r + (+p)\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2},$$

d. i. immer

$$a = r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

Bei dem convexen sphärischen Spiegel ist, wenn r positiv ist, a negativ, und folglich, wie leicht erhellen wird,

$$a = -(\sqrt{p^2 + q^2} - r) = r - \sqrt{p^2 + q^2},$$

Digitized by Google

also, weil hier p negativ ist,

$$a = r - (-p)\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} = r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

Bei dem convexen sphärischen Spiegel ist, wenn r negativ ist, a positiv, und folglich

$$a = \sqrt{p^2 + q^2} - (-r) = r + \sqrt{p^2 + q^2},$$

also, weil jetzt p positiv ist,

$$a = r + (+p)\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} = r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

Daher ist in allen Fällen

$$a = r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}$$

und folglich

$$r - 2a = -\left\{r + 2p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}\right\}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$p_1 = \frac{r}{r - 2a}\,p, \quad q_1 = \frac{r}{r - 2a}\,q$$

ist, so ist

$$p_1 = -\frac{r}{r + 2p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}}\,p, \quad q_1 = -\frac{r}{r + 2p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}}\,q$$

oder

$$p_1 = -\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}}\,p, \quad q_1 = -\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r + p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}}\,q.$$

Nehmen wir jetzt den Durchschnittspunkt der ersten Axe des zum Grunde gelegten Coordinatensystems mit dem um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreisbogen als den Anfangspunkt eines neuen dem vorhergehenden parallelen Coordinatensystems an, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte S und S_1 in Bezug auf dieses neue Coordinatensystem respective durch P, Q und P_1, Q_1; so ist offenbar

$$p = P - r, \quad q = Q$$

und ganz eben so

$$p_1 = P_1 - r, \quad q_1 = Q_1;$$

Digitized by Google

also nach dem Vorhergehenden

$$P_1 - r = -\frac{r}{r + 2(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}(P-r),$$

$$Q_1 = -\frac{r}{r + 2(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}Q;$$

woraus sich leicht

$$P_2 = -\frac{r(P-2r) - 2r(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}{r + 2(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}},$$

$$Q_2 = -\frac{r}{r + 2(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}Q$$

ergiebt. Auch ist

$$P_2 - r = -\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r + (P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}(P-r),$$

$$Q_2 = -\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r + (P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}Q$$

und

$$P_2 = -\frac{\frac{1}{2}r(P-2r) - r(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}{\frac{1}{2}r + (P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}},$$

$$Q_2 = -\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r + (P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}Q.$$

Die vorhergehenden Formeln für p_1 und $P_1 - r$ lassen sich, wie man leicht findet, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$p_2 = -\frac{rp}{r+2p} + \frac{2r\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} - 1\right\}}{\left(2 + \frac{r}{p}\right)\left\{2\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} + \frac{r}{p}\right\}}$$

und

Digitized by Google

$$P_1 - r = -\frac{r(P-r)}{2P-r} + \frac{2r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}-1\right\}}{\left(2+\frac{r}{P-r}\right)\left\{2\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}+\frac{r}{P-r}\right\}}.$$

Kommen nun die Brüche

$$\frac{q}{p} \text{ und } \frac{Q}{P-r}$$

der Null sehr nahe, so sind offenbar in Bezug auf diese Größen die Größen

$$\frac{2r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}-\right\}}{\left(2+\frac{r}{p}\right)\left\{2\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}+\frac{r}{p}\right\}}$$

und

$$\frac{2r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}-1\right\}}{\left(2+\frac{r}{P-r}\right)\left\{2\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}+\frac{r}{P-r}\right\}}$$

kleine Größen von der zweiten Ordnung, und erst mit Vernachlässigung solcher kleinen Größen ist also nach dem Vorhergehenden

$$p_1 = -\frac{rp}{r+2p},\ P_1 - r = -\frac{r(P-r)}{2P-r}.$$

Weil aber nach dem Obigen mit völliger Genauigkeit

$$p : p_1 = q : q_1$$

oder

$$P - r : P_1 - r = Q : Q_1$$

ist, so ist auch mit demselben Grade der Genauigkeit wie vorher:

$$q_1 = -\frac{rq}{r+p},\ Q_1 = -\frac{rQ}{2P-r};$$

und man hat daher jetzt unter der gemachten Voraussetzung die folgenden Näherungsformeln:

$$p_1 = -\frac{rp}{r+2p},\ q_1 = -\frac{rq}{r+2p}$$

und

$$P_1 - r = \frac{r(P-r)}{r-2P},\ Q_1 = \frac{rQ}{r-2P};$$

Digitized by Google

oder

$$P_1 = -\frac{\frac{1}{2}rp}{\frac{1}{2}r + p}, \quad q_1 = -\frac{\frac{1}{2}rq}{\frac{1}{2}r + p}$$

und

$$P_1 - r = \frac{\frac{1}{2}r(P-r)}{\frac{1}{2}r - P}, \quad Q_1 = \frac{\frac{1}{2}rQ}{\frac{1}{2}r - P}.$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$P_1 = \frac{rP}{2P - r}, \quad Q_1 = -\frac{rQ}{2P - r}$$

oder

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2}rP}{P - \frac{1}{2}r}, \quad Q_1 = -\frac{\frac{1}{2}rQ}{P - \frac{1}{2}r}.$$

Endlich erhält man auch leicht die folgenden, freilich auch nur näherungsweise richtigen Relationen:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P_1} = -\frac{2}{r} \text{ und } \frac{1}{P} + \frac{1}{P_1} = \frac{2}{r};$$

so wie

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = -\frac{2p}{rq} \text{ und } \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1} = \frac{2P}{rQ}.$$

Man übersehe nicht, daß in allen vorhergehenden Formeln $-r$ die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der ersten Coordinatenaxe mit dem um C beschriebenen Kreisbogen in Bezug auf C als Anfang, also r die erste Coordinate von C in Bezug auf den Durchschnittspunkt der ersten Coordinatenaxe mit dem um C beschriebenen Kreisbogen als Anfang ist, natürlich in den beiden vorher betrachteten einander parallelen Coordinatensystemen.

§. 35.

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln lassen sich alle Erscheinungen, welche sphärische Spiegel in den verschiedenen möglichen Fällen hervorbringen müssen, auf das Genügendste und Vollkommenste bestimmen. Es wird jedoch hinreichend sein, dieser Untersuchung im Folgenden größerer Einfachheit und Deutlichkeit wegen nur die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Näherungsformeln

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2}rP}{P - \frac{1}{2}r}, \quad Q_1 = -\frac{\frac{1}{2}rQ}{P - \frac{1}{2}r}$$

zum Grunde zu legen.

Zuerst betrachten wir den concaven sphärischen Spiegel, und nehmen dabei die aus dem Vorhergehenden bekannte Größe r,

Digitized by Google

was offenbar verstattet ist, als positiv an, so ist, wie sogleich in die Augen fallen wird, im vorliegenden Falle auch P stets positiv; und es sind nun die beiden Fälle

$$P < \tfrac{1}{2}r \text{ und } P > \tfrac{1}{2}r$$

von einander zu unterscheiden.

Wenn $P < \frac{1}{2}r$ ist, wobei wir jedoch den Fall $P = 0$ ausschließen wollen, so ist

$$\frac{\frac{1}{2}r}{P - \frac{1}{2}r} \text{ negativ und } \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r - P} > 1;$$

also hat P_1 mit P entgegengesetztes, Q_1 mit Q gleiches Vorzeichen, und den absoluten Werthen nach ist

$$P_1 > P \text{ und } Q_1 > Q.$$

Auch erhellet auf der Stelle, daß, wenn P sich wachsend der Größe $\frac{1}{2}r$ nähert, die absoluten Werthe der Größen P_1 und Q_1 sich wachsend dem Unendlichen nähern.

Wenn

$$P > \tfrac{1}{2}r$$

ist, so ist

$$\frac{\frac{1}{2}r}{P - \frac{1}{2}r}$$

positiv, und es hat folglich P_1 mit P gleiches, Q_1 mit Q entgegengesetztes Vorzeichen. Für

$$P < r \text{ ist } P - \tfrac{1}{2}r < r - \tfrac{1}{2}r,$$

d. i.

$$P - \tfrac{1}{2}r < \tfrac{1}{2}r,$$

und folglich

$$\frac{\frac{1}{2}r}{P - \frac{1}{2}r} > 1;$$

also den absoluten Werthen nach

$$P_1 > P \text{ und } Q_1 > Q.$$

Für

$$P = r \text{ ist } P - \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}r,$$

also

$$\frac{\frac{1}{2}r}{P - \frac{1}{2}r} = 1,$$

und folglich den absoluten Werthen nach

$$P_1 = P \text{ und } Q_1 = Q.$$

Für

$$P > r \text{ ist } P - \tfrac{1}{2}r > r - \tfrac{1}{2}r,$$

Digitized by Google

d. i.

$$P - \tfrac{1}{2}r > \tfrac{1}{2}r,$$

und folglich

$$\frac{\frac{1}{2}r}{P - \frac{1}{2}r} < 1;$$

also den absoluten Werthen nach

$$P_1 < P \text{ und } Q_1 < Q.$$

Weil

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2}rP}{P - \frac{1}{2}r} = \frac{\frac{1}{2}r}{1 - \frac{r}{2P}}$$

ist, so nähert sich, wenn P sich abnehmend $\frac{1}{2}r$ oder wachsend dem Unendlichen nähert, offenbar P_1 respective wachsend dem Unendlichen und abnehmend $\frac{1}{2}r$; und unter derselben Voraussetzung rücksichtlich der Veränderung von P nähert sich nach dem Obigen offenbar der absolute Werth von Q_1 respective wachsend dem Unendlichen und abnehmend der Null.

Wenn wir bei dem converen sphärischen Spiegel, wie es offenbar verstattet ist, die aus dem Vorhergehenden bekannte Größe r negativ nehmen, so ist auch in diesem Falle P positiv, und die Größe

$$\frac{\frac{1}{2}r}{P - \frac{1}{2}r} = -\frac{(-\frac{1}{2}r)}{P + (-\frac{1}{2}r)}$$

ist folglich negativ. Auch ist der absolute Werth dieser Größe, wenn wir nur wieder den Fall $P = 0$ ausschließen, kleiner als die Einheit. Folglich hat P_1 mit P entgegengesetztes, Q_1 mit Q gleiches Vorzeichen, und den absoluten Werthen nach ist

$$P_1 < P \text{ und } Q_1 < Q.$$

Weil

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2}rP}{P - \frac{1}{2}r} = \frac{\frac{1}{2}r}{1 - \frac{r}{2P}}$$

ist, so nähert sich, wenn P sich wachsend dem Unendlichen nähert, der absolute Werth von P_1 wachsend dem absoluten Werthe von $\frac{1}{2}r$, wobei man nur nicht außer Acht zu lassen hat, daß r negativ ist; auch nähert sich unter derselben Voraussetzung offenbar der absolute Werth von Q_1 abnehmend der Null.

Wenn wir die Projectionen des strahlenden Punktes S und seines Bildes S_1 auf der ersten Axe des zum Grunde gelegten Coordinatensystems respective durch S und S_1, den Durchschnittspunkt dieser durch C gehenden Axe mit dem um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreisbogen durch A, und den Mittelpunkt des Halbmessers AC durch E bezeichnen, so lassen

Digitized by Google

sich die im Vorhergehenden gefundenen Resultate auch auf folgende Art aussprechen.

Wenn bei dem concaven sphärischen Spiegel S zwischen A und C liegt, so liegt S_1 hinter dem Spiegel, und die Linien SS und S_1S_1 liegen auf einer Seite der durch A und C gehenden Axe. Auch ist

$$AS_1 > AS \text{ und } S_1S_1 > SS.$$

Wenn der Punkt S sich dem Punkte C nähert, so nähern sich AS_1 und S_1S_1 dem Unendlichen. Wenn ferner S nicht zwischen A und C liegt, so liegt S_1 vor dem Spiegel, und die Linien SS und S_1S_1 liegen auf entgegengesetzten Seiten der durch A und C gehenden Axe. Wenn S zwischen C und C liegt, so ist

$$AS_1 > AS \text{ und } S_1S_1 > SS.$$

Wenn S mit C zusammenfällt, so ist

$$AS_1 = AS \text{ und } S_1S_1 = SS.$$

Wenn S nicht zwischen C und C liegt und auch nicht mit C zusammenfällt, so ist

$$AS_1 < AS \text{ und } S_1S_1 < SS.$$

Wenn sich der Punkt S wieder dem Punkte C nähert, so entfernt sich S_1 in's Unendliche und S_1S_1 wächst in's Unendliche. Wenn sich der Punkt S in's Unendliche entfernt, so nähert sich S_1 dem Punkte C, und S_1S_1 nähert sich die Null.

Bei dem converen Spiegel liegt immer S_1 hinter dem Spiegel, und die Linien SS und S_1S_1 liegen jederzeit auf einer Seite der durch A und C gehenden Axe. Ferner ist immer

$$AS_1 < AS \text{ und } S_1S_1 < SS.$$

Wenn der Punkt S sich in's Unendliche entfernt, so nähert sich S_1 dem Punkte C und die Linie S_1S_1 der Null.

Man wird hiernach alle bei sphärischen Spiegeln vorkommende Erscheinungen leicht vollkommen zu erklären im Stande sein.

§. 36.

Wir wollen nun noch den Fall besonders betrachten, wenn, wie in Fig. 33. dargestellt ist, ein Strahl SE parallel mit der durch den Punkt A und den Mittelpunkt C des Spiegels gezogenen geraden Linie oder Axe in der Entfernung BE von derselben in dem Punkte E auf den Spiegel fällt, und bei dieser Untersuchung den als positiv betrachteten Halbmesser des Spiegels durch r bezeichnen, und $BE = q$ setzen. Construiren wir nun den dem einfallenden Strahle SE entsprechenden reflectirten Strahl auf gewöhnliche, aus der Figur von selbst ersichtliche Weise, und bezeichnen dessen Durchschnittspunkt mit der durch A und C gehenden Linie oder Axe durch S_1, so haben wir,

Digitized by Google

wenn der Kürze wegen $CS_1 = x$ und $BS_1 = y$ gesetzt wird, weil offenbar $CS_1 = ES_1$ ist, nach dem pythagoräischen Lehrsatze die beiden Gleichungen:

$$x^2 = q^2 + y^2$$

und

$$r^2 = q^2 + (x+y)^2 = q^2 + y^2 + x^2 + 2xy.$$

Führt man nun für $q^2 + y^2$ seinen Werth aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$r^2 = 2x\,(x+y),$$

also

$$x + y = \frac{r^2}{2x};$$

und weil nun wegen der ersten Gleichung

$$x^2 - y^2 = (x+y)\,(x-y) = q^2,$$

also

$$x - y = \frac{q^2}{x+y}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$x - y = \frac{2q^2x}{r^2},$$

folglich

$$(x+y) + (x-y) = 2x = \frac{r^2}{2x} + \frac{2q^2x}{r^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2r^2x$, so wird dieselbe

$$4r^2x^2 = r^4 + 4q^2x^2,$$

also

$$4(r^2 - q^2)\,x^2 = r^4,$$

und folglich

$$x = \frac{r^2}{2\sqrt{r^2 - q^2}}$$

oder

$$x = \frac{r}{2\sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2}}.$$

Setzt man $AS_1 = z$, so ist $z = r - x$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$z = r\,\frac{2\sqrt{r^4 - q^2} - r}{2\sqrt{r^2 - q^2}}$$

Digitized by Google

oder

$$z = r\,\frac{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-1}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}.$$

Bisher haben wir alle Größen als positiv betrachtet, und haben für die Größen x und z bei dem concaven und bei dem converen sphärischen Spiegel ganz dieselben Ausdrücke erhalten. Es findet aber doch in diesen beiden Fällen eine wesentliche Verschiedenheit statt, indem nämlich bei dem concaven sphärischen Spiegel die Linie $x = CS_1$ von dem Punkte C aus nach derselben Seite hin gerichtet ist, nach welcher der einfallende Strahl sich bewegt, bei dem converen sphärischen Spiegel dagegen die Linie $x = CS_1$ von dem Punkte C aus nach der entgegengesetzten Seite von der, nach welcher der einfallende Strahl sich bewegt, hin gerichtet ist. Rücksichtlich der von A an gerechneten Linie $z = AS_1$ findet ein ganz ähnliches, nur das umgekehrte Verhältniß von dem vorhergehenden statt. Auch kann man als eine Verschiedenheit zwischen den beiden Arten sphärischer Spiegel bemerken, daß bei dem concaven sphärischen Spiegel die reflectirten Strahlen selbst, bei dem converen sphärischen Spiegel dagegen die rückwärts über den Einfallspunkt hinaus verlängerten reflectirten Strahlen die durch A und C gehende Axe schneiden. Es ist wünschenswerth, für diese Verschiedenheiten auch ein Kriterium in die Formeln aufzunehmen, was man am Leichtesten und Einfachsten dadurch erreicht, daß man den Halbmesser r bei dem concaven sphärischen Spiegel als positiv, bei dem converen sphärischen Spiegel dagegen als negativ betrachtet, und

$$x = \frac{r}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}},$$

so wie, indem man z von S_1 an rechnet,

$$z = r\,\frac{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-1}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}$$

setzt, wo nun auch nach dem Vorhergehenden die Bedeutung der verschiedenen Vorzeichen der Größen x und z ganz von selbst erhellen wird.

Wenn man die Größe q sich der Null nähern, d. h. den Strahl SE immer näher und näher bei der durch A und C gehenden Axe auf den Spiegel fallen läßt, so nähern nach den vorhergehenden Formeln die Größen x und z sich beide der Gränze $\frac{1}{2}r$ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen

Digitized by Google

Grade, und wenn man nun die parallel mit der durch A und und C gehenden Axe einfallenden Strahlen als von einem unendlich weit entfernten strahlenden Punkte ausgehend betrachten kann, so wird in dem Mittelpunkte des Halbmessers CA, welchen wir durch F bezeichnen wollen, ein Bild dieses unendlich weit entfernten strahlenden Punktes entstehen.

Denken wir uns aber jetzt eine leuchtende Fläche, deren strahlende Punkte sämmtlich als unendlich weit von dem Spiegel oder dessen Mittelpunkte entfernt betrachtet werden können, so wird auch von dieser Fläche jederzeit ein Bild entstehen, welches, als die Gesammtheit der Bilder aller einzelnen leuchtenden Punkte derselben, nach dem Vorhergehenden leicht construirt werden kann, wenn man von allen Punkten der Fläche durch den Mittelpunkt des Spiegels gerade Linien zieht, dieselben nöthigenfalls bis zu ihren Durchschnittspunkten mit dem Spiegel verlängert, und hierauf die sämmtlichen diesen Linien entsprechenden Halbmesser des Spiegels halbirt, wo dann die Gesammtheit aller auf diese Weise erhaltenen Halbirungspunkte das gesuchte Bild darstellen wird. Ist die leuchtende Fläche z. B. ein mit dem Halbmesser R beschriebener auf der Axe des Spiegels senkrecht stehender Kreis, E dessen Entfernung von dem Mittelpunkte des Spiegels, und R_1 der Halbmesser seines Bildes, so ist offenbar, wenn jetzt r stets als positiv betrachtet wird, wenigstens näherungsweise

$$E : \tfrac{1}{2}r = R : R_1,$$

also

$$R_1 = \frac{r}{2E} R.$$

Daß bei dem concaven sphärischen Spiegel das Object und sein Bild auf einer Seite des Spiegels, bei dem convexen sphärischen Spiegel dagegen das Object und sein Bild auf entgegengesetzten Seiten des Spiegels liegen, oder daß, wie man gewöhnlich sagt, das Bild bei dem concaven sphärischen Spiegel vor dem Spiegel, bei dem convexen sphärischen Spiegel hinter dem Spiegel liegt, ergiebt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ganz von selbst.

§. 37.

Wir wollen uns jetzt die vorhergehenden Figuren um die durch A und C gehende Axe gedreht und durch den Punkt F eine auf dieser Axe senkrecht stehende Ebene gelegt denken, so werden der Punkt E, dessen Entfernung von der Drehungsaxe bekanntlich q ist, und der Durchschnittspunkt des reflectirten Strahls ES_1 mit der in F auf der Drehungsaxe senkrecht stehenden Ebene Kreise beschreiben, deren Ebenen einander parallel, nämlich beide auf der Drehungsaxe senkrecht sind, und es wird nun auf der Stelle in die Augen fallen, daß die Größe der durch den aus dem Obigen sich ganz von selbst ergebenden

Digitized by Google

Umstand, daß keineswegs alle parallel mit der Drehungsaxe auf den Spiegel fallende Strahlen sich nach der Reflexion mit geometrischer Genauigkeit in dem Punkte F der Drehungsaxe mit einander vereinigen, sondern daß dies nur näherungsweise und mit desto größerer Genauigkeit, je näher die Strahlen bei der Drehungsaxe auf den Spiegel fallen, stattfindet, bewirkten Undeutlichkeit des Bildes F des als unendlich weit entfernt zu betrachtenden strahlenden Punktes, von welchem die Strahlen auf den Spiegel fallen, vorzüglich von der Entfernung der Punkte F und S_1 in der Axe, mit welcher die Strahlen parallel einfallen, oder der Linie FS_1, und von dem Halbmesser des in der auf der Axe in dem Punkte F senkrecht stehenden Ebene beschriebenen Kreises abhängt. Daher nennt man in der Katoptrik die Linie FS_1 und den Halbmesser des in Rede stehenden Kreises zusammen die sphärische Abweichung oder die sphärische Aberration, oder auch die Kugelabweichung des Spiegels für die sogenannte Oeffnung q desselben und für parallele Strahlen, und zwar gewöhnlich die Linie FS_1 die Längenabweichung, den Halbmesser des vorher näher bezeichneten Kreises dagegen die Seitenabweichung. Beide Abweichungen wollen wir nun, indem wir die Längenabweichung durch L, die Seitenabweichung durch Σ bezeichnen, etwas genauer zu bestimmen suchen, was nach dem Vorhergehenden nicht die geringste Schwierigkeit hat.

Betrachten wir nämlich jetzt r wieder immer als positiv, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$L = \frac{r}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}} - \tfrac{1}{2}r$$

oder

$$L = r\,\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}.$$

Ist nun aber $\frac{q}{r}$ eine sehr kleine Größe, so kann man, weil

$$\left\{1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}^2 = 1-\left(\frac{q}{r}\right)^2+\tfrac{1}{4}\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^4$$

ist, näherungsweise und zwar erst mit Vernachlässigung kleiner Größen der vierten Ordnung

$$1-\left(\frac{q}{r}\right)^2 = \left\{1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}^2,$$

also

Digitized by Google

$$\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen

$$L = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{\left(\frac{q}{r}\right)^2}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}$$

setzen, und weil nun

$$\frac{\left(\frac{q}{r}\right)^2}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2} = \left(\frac{q}{r}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^4}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}$$

ist, so ist offenbar näherungsweise mit demselben Grade der Genauigkeit wie vorher

$$L = \frac{q^2}{4r} = \frac{1}{8} \cdot \frac{q^2}{\frac{1}{2}r}$$

oder

$$L = 0{,}25 \cdot \frac{q^2}{r} = 0{,}125 \cdot \frac{q^2}{\frac{1}{2}r}.$$

Ferner wird man sich, wenn man wie in §. 36. wieder $BS_1 = y$ setzt, mittelst einer einfachen Betrachtung ähnlicher Dreiecke sogleich von der Richtigkeit der Proportion

$$y : q = L : \Sigma$$

überzeugen. Nun ist aber nach dem angeführten Paragraphen in den dortigen Bezeichnungen

$$x - y = \frac{2q^2x}{r^2},$$

und folglich

$$y = \frac{(r^2 - 2q^2)\,x}{r^2},$$

also, wenn man für x seinen bekannten Werth einführt:

$$y = \frac{r^2 - 2q^2}{2r\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}$$

oder

$$y = \tfrac{1}{2}r \cdot \frac{1-2\left(\frac{q}{r}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\Sigma = \frac{qL}{y}$$

Digitized by Google

ist, so erhält man nach Einführung der aus dem Vorhergehenden bekannten Werthe von L und y in diese Formel nach einigen leichten Reductionen:

$$\Sigma = q\,\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2}}{1 - 2\left(\frac{q}{r}\right)^2},$$

und es ist also auch nach dem Obigen

$$\frac{\Sigma}{L} = \frac{q}{r} \cdot \frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2}}{1 - 2\left(\frac{q}{r}\right)^2}$$

oder

$$\frac{\Sigma}{L} = 2\frac{q}{r} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2}}{1 - 2\left(\frac{q}{r}\right)^2}.$$

Näherungsweise ist nach dem Obigen

$$\Sigma = \tfrac{1}{2} q \cdot \frac{\left(\frac{q}{r}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{q}{r}\right)^2},$$

und folglich, weil

$$\frac{\left(\frac{q}{r}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{q}{r}\right)^2} = \left(\frac{q}{r}\right)^2 + \frac{2\left(\frac{q}{r}\right)^4}{1 - 2\left(\frac{q}{r}\right)^2}$$

ist:

$$\Sigma = \frac{q^3}{2r^2} = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{q^3}{(\frac{1}{2}r)^2}$$

oder

$$\Sigma = 0{,}5 \cdot \frac{q^3}{r^2} = 0{,}125 \cdot \frac{q^3}{(\frac{1}{2}r)^2}.$$

Man könnte die Längenabweichung und die Seitenabweichung nach den vorhergehenden ähnlichen Begriffen auch für nicht parallel einfallende Strahlen entwickeln, was wir aber der Kürze wegen hier unterlassen wollen, da wir von diesen allgemeineren Ausdrücken in der Folge keine weitere Anwendung zu machen Gelegenheit finden werden, und überhaupt dieser Gegenstand bei den Linsen in der Lehre von der Brechung weiter besprochen werden wird.

Digitized by Google

§. 38.

Weil concave sphärische Spiegel die parallel mit der durch A und C gehenden Axe sehr nahe bei derselben einfallenden Strahlen durch Reflexion wenigstens näherungsweise in dem vor dem Spiegel liegenden Punkte F vereinigen oder sammeln, convexe sphärische Spiegel dagegen solche Strahlen durch Reflexion so zerstreuen, daß nur die rückwärts verlängert gedachten reflectirten Strahlen sich näherungsweise in dem hinter dem Spiegel liegenden Punkte F vereinigen, so werden die ersteren auch Sammelspiegel, die letzteren Zerstreuungsspiegel genannt, und der Punkt F heißt aus einem gleich nachher anzugebenden Grunde der Brennpunkt oder der Focus, seine Entfernung von dem Spiegel aber, nämlich nach dem Vorhergehenden, wenn man die Brennweite von A an rechnet, die für den concaven sphärischen Spiegel negative, für den convexen sphärischen Spiegel positive Größe $= \frac{1}{2}r$, die Brennweite oder die Focalweite des Spiegels.

Wenn man bei einem concaven sphärischen Spiegel die Sonne als das leuchtende Object betrachtet, und den Spiegel so gegen dieselbe richtet, daß die durch A und C gehende gerade Linie oder Axe nach ihrem Mittelpunkte gerichtet ist, so entsteht in der Nähe des vorher durch F bezeichneten Punktes ein Bild der Sonne, dessen Halbmesser R_1, wenn die Entfernung und der Halbmesser der Sonne durch E und R bezeichnet werden, wenigstens näherungsweise mittelst der aus §. 36. bekannten Formel

$$R_1 = \frac{r}{2E} R$$

gefunden wird. Da aber der scheinbare Halbmesser der Sonne, d. h. die Hälfte des Winkels, unter welchem die Sonne, von der Erde aus gesehen, erscheint, bekanntlich nahe 16′ ist, so ist

$$R = E \operatorname{tang} 16',$$

d. i. nahe

$$R = \frac{E}{215},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$R_1 = \frac{\frac{1}{2}r}{215},$$

wo bekanntlich $\frac{1}{2}r$, welches wir hier und in den folgenden Formeln beibehalten wollen, der absolute Werth der Brennweite des Spiegels ist. Weil nun die auf den Spiegel fallenden Sonnenstrahlen durch Reflexion in diesem Bilde concentrirt werden, und die erwärmende Kraft des Sonnenlichts, natürlich unter Voraussetzung gleicher Mengen desselben, der Größe der Flächen, über welche dasselbe verbreitet ist, umgekehrt proportional gesetzt werden

Digitized by Google

kann, so ist, wenn wir die erwärmende Kraft des Sonnenlichts von natürlicher Dichte durch W, die erwärmende Kraft desselben im Bilde des Hohlspiegels durch W_1 bezeichnen:

$$W : W_1 = R_1^2 : q^2,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$W : W_1 = \left(\frac{\frac{1}{4}r}{215}\right)^2 : q^2,$$

oder

$$W : W_1 = \frac{(\frac{1}{4}r)^2}{46225} : q^2,$$

also

$$W_1 = 46225 \cdot \left(\frac{q}{\frac{1}{4}r}\right)^2 \cdot W.$$

Wäre z. B. $r = 10'$ und die in Graden ausgedrückte halbe Oeffnung des Spiegels 10^0, also $q = 10 \sin 10^0$, so wäre

$$\frac{q}{\frac{1}{4}r} = 2 \sin 10^0,$$

folglich

$$W_1 = 184900 \cdot (\sin 10^0)^2 \cdot W,$$

woraus sich nach leichter logarithmischer Rechnung nahe

$$W_1 = 5575 \cdot W$$

ergiebt. Wäre man z. B. berechtigt, nach dem hunderttheiligen Thermometer $W = 40^0$ zu setzen, so wäre

$$W_1 = 223000^0.$$

Wegen der großen Hitze, die hiernach unter gewissen Bedingungen im Sonnenbilde des sphärischen Hohlspiegels entstehen kann, hat man bei demselben den oben durch F bezeichneten Punkt Brennpunkt oder Focus, und den sphärischen Hohlspiegel selbst auch Brennspiegel genannt. Daß der convexe sphärische Spiegel nie als Brennspiegel gebraucht werden kann, geht aus dem Obigen ganz von selbst hervor.

Soll die Seitenabweichung des Spiegels nicht größer sein als der Halbmesser des Sonnenbildes im Brennpunkte, so muß $\Sigma = R_1$, und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma = \frac{1}{4} \cdot \frac{q^3}{(\frac{1}{4}r)^2},\ R_1 = \frac{\frac{1}{4}r}{215}$$

ist,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{q^3}{(\frac{1}{4}r)^2} = \frac{\frac{1}{4}r}{215}$$

oder

$$q^3 = 8 \cdot \frac{(\frac{1}{4}r)^3}{215} = \frac{r^3}{215},$$

Digitized by Google

also

$$q = \frac{\frac{1}{4}r}{\sqrt[3]{26{,}875}} = \frac{r}{\sqrt[3]{215}}$$

sein. Bezeichnet man die in Graden ausgedrückte halbe Oeffnung des Spiegels durch ω, so ist $q = r \sin \omega$, also nach dem Vorhergehenden

$$\sin \omega = \frac{1}{\sqrt[3]{215}},$$

woraus man leicht nahe $\omega = 9^0 . 36'$, folglich die in Graden ausgedrückte ganze Oeffnung des Spiegels $2\omega = 19^0 . 12'$ findet, welche Größe also die Oeffnung eines Brennspiegels nicht übersteigen darf.

Mittelst der vorhergehenden Bemerkungen wird man die Wirkung der Brennspiegel im Allgemeinen zu beurtheilen im Stande sein.

Siebentes Kapitel.

Von den Kegelspiegeln und den Cylinderspiegeln.

§. 39.

Kegelspiegel und Cylinderspiegel bedürfen hier nur noch einer kurzen Erwähnung wegen einer optischen Spielerei, zu welcher sie benutzt werden, nämlich zu den sogenannten (katoptrischen) Anamorphosen, worunter man Bilder versteht, welche absichtlich verzerrt gezeichnet sind, und, in einem conischen oder cylindrischen Spiegel auf bestimmte Weise betrachtet, wieder in ihrer richtigen Lage dem Auge sich darstellen. Weil die Sache bei dem Kegelspiegel sich am leichtesten erläutern läßt, so wollen wir diesen im folgenden Paragraphen zuerst betrachten.

§. 40.

In Fig. 34. sei ASB ein Axentriangel eines geraden Kegels, dessen polirte Oberfläche einen möglichst vollkommenen conischen Spiegel darstellt. Befindet sich nun in dem in der Verlängerung der Axe CS des Kegels über die Spitze S desselben hinaus liegenden Punkte O ein Auge, so wird dasselbe,

Digitized by Google

wenn die Linien ON und NM' in dem Punkte N gegen die Seite AS des Kegels unter gleichen Winkeln SNO und ANM' geneigt sind, durch Reflexion von der spiegelnden Oberfläche des Kegels den in der erweiterten Grundfläche des Kegels liegenden Punkt M' nach der Richtung ON erblicken, also in dem Punkte M der Grundfläche des Kegels zu sehen glauben, und hat man also in die kreisförmige Grundfläche des Kegels ein Bild gezeichnet, und für jeden Punkt M desselben den entsprechenden Punkt M' auf die gehörige, aus dem Vorhergehenden sich ganz von selbst ergebende Weise bestimmt, wodurch auf dem äußeren Raume der Grundfläche ein um deren Umfang sich herumziehendes sogenanntes Zerrbild von dem vorher in die Grundfläche des Kegels gezeichneten richtigen Bilde entsteht; so werden alle Punkte dieses Zerrbildes, wenn man dasselbe in dem über seiner Grundfläche aufgestellten Kegelspiegel mit dem in den richtigen Punkt O, welchen wir den Augenpunkt nennen wollen, versetzten Auge betrachtet, wieder in ihrer richtigen Lage sich darstellen, und also das Zerrbild dem Auge ganz so erscheinen, als wenn man mit demselben ohne Anwendung des Spiegels unmittelbar das in der Grundfläche des Kegels verzeichnete richtige Bild betrachtete.

Wenn in Fig. 35. der um den Punkt C als Mittelpunkt beschriebene Kreis die Grundfläche des Kegels und M ein beliebiger Punkt des in dieselbe verzeichneten richtigen Bildes ist, so ziehe man, um den dem Punkte M entsprechenden Punkt des Zerrbildes zu finden, durch den Punkt M den Durchmesser AB der Grundfläche, errichte durch C auf denselben ein Perpendikel, nehme auf diesem Perpendikel CS der Höhe des Kegels, SO der Entfernung des Augenpunkts O von der Spitze S des Kegels gleich, ziehe die Linien AS und MO, welche letztere die erstere in dem Punkte N schneidet, und mache dem Winkel SNO oder ANM den Winkel ANM' gleich, so ist der Durchschnittspunkt M' des Schenkels NM' dieses Winkels mit dem verlängerten Durchmesser AB der dem Punkte M des richtigen Bildes entsprechende Punkt des Zerrbildes. Auf diese Weise kann zu jedem Punkte des richtigen Bildes der entsprechende Punkt des Zerrbildes gefunden werden.

Man kann auch AS über A hinaus verlängern, durch A eine Linie AS' legen, welche gegen diese Verlängerung der Linie AS unter demselben Winkel geneigt ist, unter welchem die Linie AS gegen den Durchmesser AB geneigt ist, hierauf OM ziehen, diese Linie über M hinaus bis zu ihrem Durchschnittspunkte M'' mit der Linie AS' verlängern, und dann AM' = AM'' machen, wovon der Grund mittelst einer einfachen Betrachtung congruenter Dreiecke sogleich erhellen wird, wenn man sich die Linie AS' oder AM'' über A hinaus bis zu ihrem Durchschnittspunkte mit der Linie NM' verlängert denkt.

Gewöhnlich theilt man die Grundfläche des Kegels durch mehrere aus ihrem Mittelpunkte in gleichen Abständen von einander beschriebene Kreise in concentrische Ringe, und zieht aus

Digitized by Google

dem Mittelpunkte der Grundfläche mehrere lauter gleiche Winkel mit einander einschließende Halbmesser derselben, wodurch man ein Netz erhält, in welches man das richtige Bild einträgt. Für jeden in das richtige Bild fallenden Punkt des Netzes sucht man nun nach der vorher gegebenen Anleitung den entsprechenden Punkt des Zerrbildes, wodurch man eine Reihe von Punkten des letzteren erhält, aus denen man das ganze Zerrbild leicht mit freier Hand wird herstellen können, wobei natürlich die Zeichnung desto genauer ausfällt, je mehr Punkte des Zerrbildes man mit geometrischer Genauigkeit bestimmt hat. Die nöthigen Hand- und Kunstgriffe, welche hierbei zur Erleichterung und Abkürzung der Arbeit dienen können, werden sich einem Jeden leicht von selbst ergeben.

§. 41.

Wenn M' ein Punkt vor einem ebenen Spiegel ist, von diesem Punkte auf den Spiegel ein Perpendikel gefällt, dieses Perpendikel auf die Rückseite des Spiegels verlängert, und in der Verlängerung ein Punkt M angenommen wird, welcher eben so weit wie der Punkt M' von dem Spiegel entfernt ist, so ist nach der Lehre von dem ebenen Spiegel bekanntlich der Punkt M das Bild des Punktes M', und wenn nun der Punkt O die Lage des Auges vor dem Spiegel bestimmt, so erblickt das Auge, wo man auch den Punkt O vor dem Spiegel annehmen mag, den Punkt M' im Spiegel immer nach der Richtung OM oder in dem Punkte M, oder alle Richtungen, nach denen das Auge, wo man dasselbe auch vor dem Spiegel hin halten mag, den Punkt M' erblickt, gehen durch den Punkt M hinter dem Spiegel oder schneiden sich in diesem Punkte, wovon sich jetzt die folgende Anwendung auf den Cylinderspiegel machen läßt.

Ist in Fig. 36. der um den Mittelpunkt C beschriebene Kreis die Grundfläche eines geraden Cylinders, dessen Mantel gut polirt ist und einen cylindrischen Spiegel darstellt, so sei M ein beliebiger Punkt in der Grundfläche dieses Cylinders, und O' sei die Projection des vor dem Cylinder befindlichen Auges O auf der Grundfläche. Zieht man nun die Linie O'M, welche den Umfang der Grundfläche in D schneidet, durch den Durchschnittspunkt D eine Berührende AB an die Grundfläche, fällt von M auf AB das Perpendikel ME, verlängert selbiges über den Punkt E hinaus, und macht M'E = ME, so erhellet leicht, daß, wenn man sich durch AB einen auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht stehenden ebenen Spiegel gelegt denkt, in Bezug auf denselben die Punkte M und M' in dem Verhältnisse von Bild und Object zu einander stehen. Die durch den Punkt D gehende Seite des Cylinders kann als ein unendlich schmaler Streifen des durch AB gehenden und auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht stehenden ebenen Spiegels betrachtet werden und dessen Stelle vertreten, und es ergiebt

Digitized by Google

sich daher aus dem Obigen unmittelbar, daß das Auge, wenn es sich nur in der durch die Linie O'M gelegten und auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht stehenden Ebene befindet, welche Lage es auch übrigens in dieser Ebene haben mag, den Punkt M' in dem cylindrischen Spiegel immer in dem Punkte M erblicken wird. Ist also M irgend ein Punkt eines auf der Grundfläche des Cylinders gezeichneten Bildes, und O' die Projection des Auges auf der Grundfläche des Cylinders, so findet man den dem Punkte M entsprechenden Punkt M' des Zerrbildes, wenn man die Linie O'M, und durch deren Durchschnittspunkt D mit dem Umfange der Grundfläche des Cylinders an dieselbe die Berührende AB zieht, auf diese Berührende von dem Punkte M das Perpendikel ME fällt, dasselbe über den Punkt E hinaus verlängert, und M'E = ME macht. Bestimmt man auf diese Weise alle Punkte des dem auf der Grundfläche des Cylinders gezeichneten Bilde entsprechenden Zerrbildes, so muß sich nach dem Vorhergehenden, um mittelst des cylindrischen Spiegels das Zerrbild wieder in seiner richtigen Lage zu erblicken, das Auge nur in dem durch den Punkt O' auf die Grundfläche des Cylinders errichteten Perpendikel befinden, welches auch seine Höhe über der Grundfläche des Cylinders sein mag.

Aus der vorhergehenden Construction ergiebt sich übrigens auch unmittelbar, daß die Lage des Punktes M nicht ganz willkürlich ist, sondern daß derselbe jedenfalls immer innerhalb des Winkels liegen muß, welchen die von dem Punkte O' an die Grundfläche des Cylinders gezogenen beiden Berührenden mit einander einschließen, weil im entgegengesetzten Falle die von O' nach M gezogene gerade Linie den Umfang der Grundfläche des Cylinders nicht schneiden könnte, wie es nach dem Vorhergehenden erforderlich ist.

Uebrigens wird bei diesen cylindrischen Anamorphosen das richtige Bild gewöhnlich nicht auf der Grundfläche des Cylinders, sondern auf einer auf derselben senkrecht stehenden Ebene gezeichnet angenommen. In diesem Falle muß man das Bild erst auf die Grundfläche des Cylinders übertragen, und dann aus diesem übertragenen Bilde nach der vorher gegebenen Anleitung das Zerrbild herleiten. Die Uebertragung des Bildes auf die Grundfläche geschieht aber auf folgende Art.

In Fig. 37. sei FG eine Sehne der Grundfläche des Cylinders, und FGHK sei die durch FG gelegte, auf der Grundfläche senkrecht stehende Ebene, auf welcher das richtige Bild gezeichnet ist. Das Auge sei O, und O' sei wie früher seine Projection auf der Grundfläche des Cylinders. Ein beliebiger Punkt des Bildes sei M_1, und M_1' sei dessen Projection auf der Grundfläche des Cylinders. Denkt man sich durch die Linien OO' und $M_1 M_1'$ eine Ebene gelegt, welche also auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht steht, und zieht in dieser Ebene die durch die Punkte O und M_1 der Lage nach bestimmte gerade Linie, so ist deren Durchschnittspunkt M mit der Grund-

Digitized by Google

fläche des Cylinders, d. i. mit der gehörig verlängerten Linie $O'M_1'$, in welcher die durch OO' und $M_1 M_1'$ gelegte Ebene die Grundfläche des Cylinders schneidet, der auf die Grundfläche des Cylinders übertragene Punkt M_1 des Bildes.

Da die Linien OO' und $M_1 M_1'$ offenbar auf der Linie $O'M_1'$ senkrecht stehen, so braucht man, um die vorhergehende Construction in der Ebene auszuführen, bloß auf folgende Art zu verfahren.

Die Ebene des Papiers sei die Grundfläche des Cylinders. FG (Fig. 37*.) sei die Sehne, über welcher die Ebene, auf welcher das richtige Bild gezeichnet ist, auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht stehend angenommen wird. Die Projection des Auges auf der Grundfläche des Cylinders sei wie gewöhnlich O'. Die Ebene, auf welcher das richtige Bild gezeichnet angenommen wird, denke man sich um FG gedreht und in die Grundfläche des Cylinders, d. i. in die Ebene des Papiers, niedergelegt. Ein beliebiger Punkt des Bildes sei M_1. Von demselben fälle man auf die Sehne FG die Senkrechte $M_1 M_1'$, ziehe durch O' und M_1' eine gerade Linie von unbestimmter Länge, errichte durch O' und M_1' auf dieselbe auf einer und derselben Seite dieser Linie Perpendikel, mache das erstere OO' der Höhe des Auges über der Grundfläche des Cylinders, das letztere $M_1 M_1'$ der in der Figur eben so bezeichneten Entfernung des Punktes M_1 des Bildes von der Sehne FG gleich, und ziehe die Linie OM_1, die, gehörig verlängert, die ebenfalls gehörig verlängerte Linie $O'M_1'$ in dem Punkte M schneidet, welcher der gesuchte, auf die Grundfläche des Cylinders übertragene Punkt M_1 des Bildes ist.

Wie man sich auch in diesem Falle die erforderlichen Constructionen durch ähnliche einfache praktische Hülfsmittel, wie vorher bei dem Kegelspiegel gezeigt worden ist, erleichtern und die Arbeit dadurch verkürzen kann, braucht hier nicht noch besonders erläutert zu werden, da Jeder solche Hülfsmittel ohne Schwierigkeit selbst finden wird.

Achtes Kapitel.

Von der Brechung oder Refraction des Lichts im Allgemeinen.

§. 42.

Man lasse sich zwei genau auf einander senkrecht stehende ebene Flächen, die etwa aus zwei unter einem rechten Winkel

Digitized by Google

zusammengefügten recht ebenen dünnen Bretchen bestehen können, und ein rechtwinkliges Parallelepipedon von möglichst reinem Glase anfertigen. Durch einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie der beiden ebenen Flächen ziehe man in jeder derselben eine auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie senkrecht stehende gerade Linie, so werden diese beiden geraden Linien den Neigungswinkel der beiden Ebenen gegen einander bestimmen, und daher nach der Voraussetzung auf einander senkrecht stehen. Auf der einen dieser beiden geraden Linien lasse man in der Ebene, auf welcher dieselbe gezogen ist, mehrere feine Löcher anbringen, und ziehe ferner durch einen beliebigen Punkt in der einen Kante des gläsernen rechtwinkligen Parallelepipedons auf den sich in dieser Kante schneidenden Seitenflächen desselben zwei auf der in Rede stehenden Kante senkrechte gerade Linien. Hierauf lege man das Parallelepipedon so zwischen die beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen, daß die beiden Punkte, in denen die der vorhergehenden Kante parallelen, und mit dieser Kante in denselben Seitenflächen liegenden Kanten des Parallelepipedons von den beiden auf demselben gezogenen geraden Linien getroffen werden, in die auf den auf einander senkrecht stehenden Ebenen gezogenen Linien hineinfallen, wonach also die beiden auf den auf einander senkrecht stehenden Ebenen und die beiden auf dem Parallelepipedon gezogenen geraden Linien in einer auf der Durchschnittslinie der beiden auf einander perpendikulären Ebenen senkrecht stehenden Ebene liegen werden, welche in der leicht durch sich selbst verständlichen Fig. 38. durch die Ebene des Papiers dargestellt sein soll. Nun lasse man in einem verfinsterten Zimmer durch das möglichst kleine Loch G in der Linie AF, wobei alle übrigen auf dieser Linie angebrachten Löcher verdeckt sein müssen, einen Lichtstrahl auf das gläserne Parallelepipedon fallen, wozu man sich, um fremdes Licht möglichst abzuhalten, einer nur auf der einen Seite mit einer ebenen Glasfläche verschlossenen, sonst überall von undurchsichtigen Wänden umgebenen Laterne bedienen kann, welche man in eine solche Lage bringt, daß die Glaswand mit der Ebene, in welcher das Loch G angebracht ist, zusammenfällt, so daß aber natürlich das Loch G noch von der Glaswand der Laterne bedeckt wird, und ordne, was immer möglich sein wird, den Versuch so an, daß das Parallelepipedon von dem durch das Loch G einfallenden Strahle in einem Punkte H der auf seiner obern Seitenfläche gezogenen geraden Linie CD getroffen wird, dieser Strahl, nachdem er bei H in das Parallelepipedon getreten, in einem gewissen Punkte J der einen der beiden auf der obern Seitenfläche senkrecht stehenden Seitenflächen des Parallelepipedons aus demselben heraustritt, und dann ferner in einem gewissen Punkte K die der beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen, auf welcher das Parallelepipedon aufgestellt worden ist, trifft.

Dann wird man zuerst auf der Stelle die Bemerkung machen, daß die als leuchtende Punkte sich darstellenden Punkte J

Digitized by Google

und K jederzeit in den auf dem Parallelepipedon und der einen der beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen gezogenen geraden Linien BC und AE liegen, woraus sich in Folge des Vorhergehenden ergiebt, daß die Punkte G, H, J, K immer in einer und derselben auf den Seitenflächen des Parallelepipedons, in denen die aus dem Obigen bekannten geraden Linien gezogen worden sind, senkrecht stehenden Ebene liegen. Zugleich aber wird sich hierbei jederzeit zeigen, daß die Linien GH, HJ, JK nie in einer geraden Linie liegen, sondern daß sowohl GH und HJ bei H, als auch HJ und JK bei J einen Winkel mit einander einschließen.

Mißt man ferner mit einem Maaßstabe, der aber am zweckmäßigsten sogleich auf den beiden auf einander senkrecht stehenden Ebenen, zwischen welche man das Parallelepipedon gelegt hat, und auf den Seitenflächen des Parallelepipedons selbst angebracht wird, die Linien DG, DH, CH, CJ, BJ, BK, so kann man in den rechtwinkligen Dreiecken DGH, CHJ, BJK die in der Figur durch φ, ψ, χ bezeichneten Winkel mittelst der Formeln

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{DH}{DG},\ \text{tang}\,\psi = \frac{CH}{CJ},\ \text{tang}\,\chi = \frac{BK}{BJ}$$

leicht berechnen. Bestimmt man dann die Sinus und Cosinus dieser Winkel oder auch bloß deren Logarithmen, so wird man immer finden, daß wenigstens mit großer Annäherung, und zwar jederzeit desto genauer, je mehr Sorgfalt man auf die Anstellung der Versuche verwandt hat,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\cos\chi}{\cos\psi}$$

oder

$$\log\sin\varphi - \log\sin\psi = \log\cos\chi - \log\cos\psi,$$

oder auch

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\chi} = \text{tang}\,\psi,$$

oder

$$\log\sin\varphi - \log\cos\chi = \log\text{tang}\,\psi$$

ist. Stellt man aber mehrere Versuche dieser Art unter möglichst verschiedenen Verhältnissen an, und ermittelt immer den Werth der einander gleichen Brüche

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \text{ und } \frac{\cos\chi}{\cos\psi},$$

oder der einander gleichen Differenzen

$$\log\sin\varphi - \log\sin\psi \text{ und } \log\cos\chi - \log\cos\psi;$$

so wird man immer mit großer Annäherung, und zwar wieder jederzeit desto genauer, mit je größerer Sorgfalt die Versuche

Digitized by Google

angestellt worden sind, für diese einander gleichen Brüche, oder diese einander gleichen logarithmischen Differenzen, denselben Werth finden, so daß man also diese Werthe als constante Größen zu betrachten berechtigt sein wird. Man findet nämlich jederzeit nahe

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\cos\chi}{\cos\psi} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

oder genauer

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\cos\chi}{\cos\psi} = \frac{17}{11} = 1{,}55.$$

Die merkwürdige Erscheinung, welche wir so eben kennen gelernt haben, daß nämlich ein Strahl bei seinem Uebergange aus Luft in Glas oder aus Glas in Luft von seinem geradlinigen Wege abgelenkt wird, eine Erscheinung, welche sich, wie vielfache Versuche gelehrt haben, unter gewissen Bedingungen jederzeit zeigt, wenn ein Lichtstrahl aus einem durchsichtigen Körper in einen andern durchsichtigen Körper von verschiedener Dichtigkeit übergeht, nennt man die Brechung oder Refraction des Lichts. Der Theil des Strahls von seinem Ausgangspunkte bis zu dem Punkte, in welchem von demselben die Fläche, welche die beiden durchsichtigen Körper von einander trennt, getroffen wird, heißt der einfallende Strahl, und der in Rede stehende Punkt wird der Einfallspunkt genannt; der andere von dem Einfallspunkte ausgehende Theil des Strahls heißt der gebrochene Strahl. Die durch den Einfallspunkt auf die Fläche, welche die beiden durchsichtigen Körper von einander trennt, senkrecht gezogene gerade Linie heißt das Einfallsloth, und die beiden 90^0 nicht übersteigenden Winkel, welche der einfallende und der gebrochene Strahl mit dem Einfallslothe einschließen, werden respective der Einfallswinkel und der Brechungswinkel oder Refractionswinkel genannt. Die Versuche zeigen auch, daß der einfallende und der gebrochene Strahl immer auf verschiedenen Seiten des Einfallslothes liegen.

Wenn man sich in H und J die Einfallslothe auf die, Glas und Luft von einander trennenden Flächen, welche hier Ebenen sind, errichtet denkt, und nur überlegt, daß offenbar für die bei H stattfindende Brechung bei dem Uebergange aus Luft in Glas der Einfallswinkel und der Brechungswinkel respective φ und ψ, für die bei J stattfindende Brechung bei dem Uebergange aus Glas in Luft der Einfallswinkel und der Brechungswinkel respective $90^0 - \psi$ und $90^0 - \chi$ sind, und daß nach dem Obigen

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(90^\circ - \chi)}{\sin(90^\circ - \psi)} = 1 : \frac{\sin(90^\circ - \psi)}{\sin(90^\circ - \chi)}$$

eine constante Größe ist, zugleich aber überhaupt alle bei der Brechung nach dem Obigen sich zeigenden Erscheinungen zusam-

Digitized by Google

mennimmt; so wird aus dem Vorhergehenden leicht erhellen, daß das Gesetz der Brechung oder Refraction des Lichts im Allgemeinen auf folgende Art ausgesprochen werden kann:

Bei der Brechung oder Refraction des Lichts liegen der einfallende und der gebrochene Strahl jederzeit auf entgegengesetzten Seiten der die beiden durchsichtigen Körper von einander trennenden Fläche; in der durch diese beiden Strahlen bestimmten Ebene liegt zwischen denselben auch das Einfallsloth, und für jede zwei durchsichtige Körper ist der Bruch oder Quotient, welchen man erhält, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Brechungswinkels dividirt, so lange constant, als der einfallende und gebrochene Strahl in denselben durchsichtigen Körpern liegen, erhält aber seinen reciproken Werth, wenn der einfallende und der gebrochene Strahl in den durchsichtigen Körpern liegen, in denen vorher respective der gebrochene und der einfallende Strahl lagen.

Dieses wichtige, von dem berühmten niederländischen Mathematiker Willebrord Snell zuerst entdeckte Gesetz ist in seinem ihm vorher gegebenen allgemeinen Ausdrucke auf alle durchsichtigen Körper ausgedehnt worden, wenn wir auch bei unsern zur Begründung desselben vorher angegebenen Versuchen nur einen Strahl bei seinem Uebergange aus Luft in Glas oder aus Glas in Luft betrachtet haben. Nach den vielfachen von den Physikern mit sehr verschiedenen durchsichtigen Körpern angestellten Versuchen, von denen weiter unten noch ausführlich die Rede sein wird, ist man aber vollständig berechtigt, demselben die Ausdehnung zu geben, welche ihm vorher gegeben worden ist.

Der Bruch, welchen man erhält, wenn man den Sinus des Einfallswinkels durch den Sinus des Brechungswinkels dividirt, wird das Brechungsverhältniß genannt; wenigstens wollen wir diesen wichtigen Begriff für das Folgende auf die so eben angegebene Weise feststellen. Für Luft und Glas ist nach dem Vorhergehenden das Brechungsverhältniß also $\frac{17}{11}$ oder $\frac{11}{17}$, jenachdem der Strahl aus Luft in Glas oder aus Glas in Luft übergeht. Bezeichnen wir überhaupt den Einfallswinkel durch ω, den Brechungswinkel durch ω_1, so ist

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}$$

das Brechungsverhältniß, und setzen wir nun

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n,$$

so ist für dieselben durchsichtigen Körper n so lange constant,

Digitized by Google

so lange auch der einfallende und der gebrochene Strahl in denselben durchsichtigen Körpern liegen, erhält aber seinen reciproken Werth, wenn der einfallende und der gebrochene Strahl in den durchsichtigen Körpern liegen, in denen vorher respective der gebrochene und der einfallende Strahl lagen.

Die Zahl n wird der Exponent des Brechungsverhältnisses oder auch der Brechungsexponent genannt.

Der Theil der Optik, welcher sich, von dem obigen allgemeinen Grundgesetze ausgehend, mit der genauen Entwickelung aller der Gesetze beschäftigt, nach welchen die von der Brechung oder Refraction des Lichts hervorgebrachten Erscheinungen erfolgen, heißt die Dioptrik.

§. 43.

Zur Bestimmung des Brechungswinkels ω_1 aus dem Einfallswinkel ω erhält man nach dem vorhergehenden Paragraphen auf der Stelle die Gleichung

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{n}\sin\omega.$$

Ist nun

$$\frac{1}{n} \lesseqgtr 1, \text{ d. h. } n \gtreqless 1;$$

so läßt sich, da unter dieser Voraussetzung, weil stets

$$\sin\omega \lesseqgtr 1$$

ist, also um so mehr auch immer

$$\frac{1}{n}\sin\omega \lesseqgtr 1$$

ist, mittelst der vorhergehenden Gleichung ω_1 jederzeit aus ω bestimmen, oder jedem gegebenen einfallenden Strahle entspricht immer auch ein bestimmter gebrochener Strahl. Wenn aber

$$\frac{1}{n} > 1, \text{ d. h. } n < 1$$

ist, so ist, wie es erfordert wird, wenn die Bestimmung von ω_1 aus ω mittelst der obigen Gleichung möglich sein soll, nur so lange

$$\frac{1}{n}\sin\omega \lesseqgtr 1,$$

so lange

$$\sin\omega \lesseqgtr n,$$

oder, wie man dies wohl auch zu schreiben pflegt,

$$\omega \lesseqgtr \text{Ang sin}(=n),$$

Digitized by Google

d. h. ω nicht größer als der Winkel ist, dessen Sinus $= n$ ist, und nur so lange entspricht also auch einem gegebenen einfallenden Strahle ein bestimmter gebrochener Strahl. Wenn dagegen

$$\sin\omega > n$$

oder

$$\omega > \text{Ang sin}\,(=n)$$

wird, so ist

$$\frac{1}{n}\sin\omega > 1,$$

und die Bestimmung von ω_1 aus ω mittelst der obigen Gleichung wird unmöglich, einem gegebenen einfallenden Strahle entspricht unter dieser Voraussetzung kein gebrochener Strahl mehr, oder es findet überhaupt keine Refraction mehr statt, was auch die Erfahrung vollkommen bestätigt und zugleich auf das Unzweideutigste gelehrt hat, daß in dem vorliegenden Falle die Refraction jederzeit in eine Reflexion übergeht. Dieser Fall kann nach dem Vorhergehenden nie eintreten, wenn

$$n \leqq 1$$

ist, tritt aber dann allemal ein, wenn

$$n < 1$$

und

$$\sin\omega > n \text{ oder } \omega > \text{Ang sin}\,(=n)$$

ist. Der aus der Gleichung

$$\sin\omega = n \text{ oder } \omega = \text{Ang sin}\,(=n)$$

zu bestimmende Einfallswinkel ω ist in diesem letzteren Falle gewissermaßen der Gränzwinkel, bei welchem die Refraction in eine Reflexion übergeht.

Wenn wir $\omega = 0$ setzen, d. h. den einfallenden Strahl mit dem Einfallslothe zusammenfallen lassen, so folgt aus der Gleichung

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{n}\sin\omega$$

immer auch $\omega_1 = 0$, d. h. auch der gebrochene Strahl fällt mit dem Einfallslothe zusammen, oder es findet unter der gemachten Voraussetzung eigentlich gar keine Brechung mehr statt, der einfallende Strahl geht völlig ungebrochen aus dem einen durchsichtigen Körper in den andern über, was gleichfalls durch die Erfahrung vollkommen bestätigt wird, indem z. B., um nur auf eine der einfachsten hierher gehörenden Erscheinungen hinzuweisen, ein gerader Stab, den man in ein Gefäß mit Wasser so hinein hält, daß er auf der Oberfläche des Wassers senkrecht steht, ganz gerade erscheint, da er im Gegentheil aus zwei an

Digitized by Google

der Oberfläche des Wassers einen Winkel mit einander einschließenden Theilen zu bestehen scheint, wenn man ihn gegen die Oberfläche des Wassers neigt.

Wenn M in Fig. 39. ein von den beiden parallelen Ebenen EF und GH begränzter durchsichtiger Körper ist, der auf beiden Seiten von demselben durchsichtigen Körper N umgeben wird, und ein von dem Punkte A ausgehender Strahl AB bei dem Punkte B aus N in M übergeht, hier nach BC gebrochen wird, und dann bei dem Punkte C wieder aus M in N übergeht, wobei eine zweite Brechung des Strahls nach CD stattfindet; so ist, wenn wir den Brechungsexponenten für die beiden durchsichtigen Körper M und N durch n bezeichnen, nach dem aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Grundgesetze der Refraction, wenn wir uns in den Einfallspunkten B und C die Einfallslothe errichtet denken, und den Einfallswinkel und den Brechungswinkel bei B durch ω und ω_1, bei C durch ω' und ω_1' bezeichnen:

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n, \quad \frac{\sin\omega'}{\sin\omega_1'} = \frac{1}{n};$$

also, wenn man multiplicirt:

$$\frac{\sin\omega\sin\omega'}{\sin\omega_1\sin\omega_1'} = 1$$

oder

$$\sin\omega\sin\omega' = \sin\omega_1\sin\omega_1'.$$

Weil nun aber als Wechselwinkel bei den parallelen Linien GH und EF die Winkel ω' und ω_1 einander gleich sind, und folglich auch

$$\sin\omega' = \sin\omega_1$$

ist, so ist nach der vorhergehenden Gleichung

$$\sin\omega = \sin\omega_1', \text{ also } \omega = \omega_1',$$

woraus sich nach ganz bekannten Sätzen der Elementargeometrie auf der Stelle ergiebt, daß die beiden Strahlen AB und CD einander parallel sind, so daß also, wenn ein Strahl durch einen von zwei parallelen Ebenen begränzten, und auf beiden Seiten von demselben durchsichtigen Körper umgebenen durchsichtigen Körper, z. B. durch eine von parallelen Ebenen begränzte Glastafel, hindurch geht, jederzeit der einfallende und ausfahrende Strahl einander parallel sind, was z. B. auch schon in der ganz einfachen bekannten Erfahrung seine vollkommene Bestätigung findet, daß die gegenseitige Lage der uns umgebenden Gegenstände gar keine Veränderung erleidet, wenn wir dieselben durch von parallelen Ebenen begränzte Glastafeln, etwa durch unsere gewöhnlichen Fensterscheiben, betrachten.

Digitized by Google

§. 44.

Den einem gegebenen einfallenden Strahle entsprechenden gebrochenen Strahl kann man durch Construction mittelst eines bemerkenswerthen Verfahrens finden, welches auf das Folgende zurückkommt.

In Fig. 40. sei die Ebene des Papiers die Ebene, in welcher der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der gebrochene Strahl liegen, und MN sei die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der die beiden durchsichtigen Körper, für welche n der Brechungsexponent sein mag, von einander trennenden Ebene. Der Einfallspunkt sei E, und SE sei der gegebene einfallende Strahl. Um E als Mittelpunkt beschreibe man auf der entgegengesetzten Seite der Linie MN von der, auf welcher der gegebene einfallende Strahl SE liegt, mit zwei Halbmessern EA und EB, deren Verhältniß zu einander dem gegebenen Verhältnisse $n : 1$ gleich ist, Halbkreise, und verlängere den einfallenden Strahl über den Einfallspunkt hinaus bis zu seinem Durchschnittspunkte C mit dem aus dem Punkte E mit dem Halbmesser EA beschriebenen Halbkreise. Durch den Punkt C ziehe man an diesen Halbkreis eine die Linie MN in dem Punkte D schneidende Berührende CD, und hierauf durch den Punkt D, insofern dies möglich ist, eine den um E mit dem Halbmesser EB beschriebenen Halbkreis in dem Punkte F berührende gerade Linie, so ist die durch die Punkte E und F der Lage nach bestimmte gerade Linie ES_1 der gesuchte gebrochene Strahl, was auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

In den rechtwinkligen Dreiecken CDE und DEF ist

$$DE = EC \cdot \sec CED = EF \cdot \sec DEF$$

oder

$$\frac{EC}{\cos CED} = \frac{EF}{\cos DEF},$$

also

$$EC : EF = \cos CED : \cos DEF.$$

Nun sind aber offenbar die Winkel CED und DEF die Complemente des Einfallswinkels ω und des Brechungswinkels ω_1, d. i.

$$\angle CED = 90° - \omega, \quad \angle DEF = 90° - \omega_1;$$

also

$$\cos CED = \sin \omega, \quad \cos DEF = \sin \omega_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$EC : EF = \sin \omega : \sin \omega_1;$$

also, weil nach der Construction

$$EC : EF = EA : EB = n : 1$$

Digitized by Google

ist,

$$n : 1 = \sin\omega : \sin\omega_1$$

oder

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n,$$

und daher nach §. 42. offenbar ES_1 der gesuchte gebrochene Strahl, wie bewiesen werden sollte.

In dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle, wo $n > 1$ ist, liegt der Punkt D offenbar jederzeit außerhalb des mit dem kleinern Halbmesser EB beschriebenen Halbkreises, und es kann also aus dem Punkte D immer eine Berührende DF an diesen Halbkreis gezogen, folglich der gesuchte gebrochene Strahl ES_1 immer construirt werden. In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle, wo $n < 1$ ist, liegt der Punkt D nur so lange außerhalb des mit dem größern Halbmesser EB beschriebenen Halbkreises, und es kann also auch nur so lange aus dem Punkte D die Berührende DF an diesen Halbkreis gezogen, und der gesuchte gebrochene Strahl ES_1 construirt werden, so lange

$$DE > EB,$$

d. i.

$$EC \cdot \sec CED > EB,$$

oder

$$\frac{EA}{\cos CED} > EB,$$

oder nach dem Vorhergehenden

$$\sin\omega < \frac{EA}{EB},$$

d. i. nach der Construction

$$\sin\omega < n$$

ist, was ganz mit dem im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate übereinstimmt. Für

$$\sin\omega = n$$

ist

$$\sin\omega = \frac{EA}{EB},$$

d. i.

$$\cos CED = \frac{EA}{EB} \text{ oder } EC \cdot \sec CED = EB,$$

folglich

$$DE = EB,$$

und die Punkte B, D, F würden also in diesem Falle offen-

Digitized by Google

bar mit einander zusammenfallen, so daß also in diesem Falle EN die Richtung des gebrochenen Strahls wäre, wenn es noch einen solchen Strahl wirklich gäbe. Für

$$\sin\omega > n$$

ist aber die Construction des gebrochenen Strahls nach dem vorher angegebenen Verfahren bestimmt völlig unmöglich, weil dann der Punkt D innerhalb des mit dem größern Halbmesser EB beschriebenen Halbkreises zu liegen kommt, und folglich die Berührende DF an diesen Halbkreis nicht mehr gezogen werden kann, was Alles mit den im vorhergehenden Paragraphen auf anderem Wege gefundenen Resultaten vollkommen übereinstimmt.

Man wird sich der vorhergehenden Construction des gebrochenen Strahls zuweilen mit Vortheil bedienen können, weshalb dieselbe hier mitgetheilt worden ist, wenn auch unsere folgenden Entwickelungen immer mehr den analytischen Weg einschlagen werden.

§. 45.

Wenn es sich um die wirkliche scharfe Bestimmung des Brechungsexponenten n handelt, so gewähren die in §. 42. beschriebenen Versuche, so geeignet uns dieselben auch zur allgemeinen Erläuterung des Grundgesetzes der Brechung zu sein scheinen, doch nicht den erforderlichen Grad der Genauigkeit, weshalb wir jetzt einige andere Methoden, mittelst welcher man zu schärfern Bestimmungen des Brechungsexponenten gelangen kann, und zwar zuerst die von Biot und Cauchoix bei ihren Versuchen über diesen wichtigen Gegenstand angewandte sehr elegante Methode, etwas näher erläutern wollen.

Wenn der durchsichtige Körper, für welchen und die atmosphärische Luft der Brechungsexponent bestimmt werden soll, ein fester Körper ist, so lasse man sich aus demselben ein gerades dreiseitiges Prisma anfertigen, und stelle dasselbe mit einer seiner Grundflächen auf eine matt geschliffene Glastafel, die sich durch Stellschrauben in verschiedene Lagen bringen läßt. Diese Glastafel richte man mittelst der in Rede stehenden Stellschrauben so, daß ihre erweiterte Ebene durch einen leuchtenden Punkt geht, welcher, vorausgesetzt, daß man die Versuche im Dunkeln anstellt, etwa durch ein möglichst kleines Loch in einem, eine nach Art der Argand'schen Lampen durch starken Luftzug angefachte Lampe umschließenden Cylinder von Blech dargestellt werden kann. Dann wird, wenn man das Prisma so richtet, daß eine seiner Seitenflächen von einem von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahle getroffen wird, dieser Strahl ohne merklichen Fehler in einer auf den Seitenflächen des Prismas senkrechten Ebene liegen, wenn nur, wie hier vorausgesetzt werden soll, der leuchtende Punkt ziemlich weit von dem Prisma entfernt ist. Diese Ebene sei in Fig. 41. die Ebene des Pa-

Digitized by Google

piers, ABC sei ihr Durchschnitt mit dem Prisma, und SJ sei der von dem leuchtenden Punkte S auf die eine Seite AB des Prismas in J fallende Strahl. Ein Theil des auffallenden Lichts wird nach JS″ reflectirt, der größte Theil dagegen dringt in das Prisma ein, geht nach erfolgter Brechung etwa nach JJ′ fort, erleidet in J′ eine zweite Brechung, und tritt dann etwa nach der Richtung J′S′ wieder aus dem Prisma heraus, wobei nach dem Grundgesetze der Brechung der ganze Weg SJJ′S′ in einer Ebene liegt, hier nämlich, unter den oben gemachten Voraussetzungen, in der Ebene des Papiers. Bezeichnet man nun in dem einfallenden Strahle den leuchtenden Punkt S, in dem ausfahrenden Strahle J′S′ und in dem reflectirten Strahle JS″ die beliebigen, jedoch möglichst weit von dem Prisma entfernten Punkte S′ und S″ auf eine leicht zu erdenkende Weise, etwa durch die Fäden aufgehängter Bleilothe; so wird man mit einem geeigneten Winkelmesser in S die Winkel $S'SJ = \beta$ und $S''SJ$, in S′ den Winkel $SS'J' = \gamma$, und in S″ den Winkel $SS''J$ messen können. Die genannten französischen Physiker bedienten sich bei diesen Messungen eines Wiederholungskreises nach der französischen Construction, dessen Limbus sich in jede Ebene bringen läßt, und der daher allerdings ein zu diesen Beobachtungen besonders geeignetes Instrument ist. Stellt man aber die das Prisma tragende Glastafel mittelst eines Niveaus horizontal, und bringt dann die Lampe mittelst leicht anzubringender Stellschrauben in eine solche Lage, daß der leuchtende Punkt in der erweiterten Ebene der Glastafel liegt, welches immer leicht möglich sein wird; so wird man sich bei den obigen Winkelmessungen auch mit Vortheil eines gewöhnlichen Theodoliten bedienen können.

Aus den beiden bekannten Winkeln

$S''SJ$ und $SS''J$

erhält man den Winkel

$$SJS'' = 180° - (S''SJ + SS''J),$$

und hieraus ergiebt sich, weil nach dem Grundgesetze der Reflexion die beiden Winkel

SJB und $S''JA$,

welche wir durch ω bezeichnen wollen, einander gleich sind, ferner

$$\omega = 90° - \tfrac{1}{2}SJS'' = \tfrac{1}{2}(S''SJ + SS''J).$$

Mißt man nun noch den Winkel $BAC = \alpha$ des Prismas, welches mittelst eines Goniometers oder auch dadurch geschehen kann, daß man die drei Seiten des Dreiecks ABC mittelst eines Maaßstabes mißt, und aus denselben den Winkel α trigonometrisch berechnet*), so sind die vier Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ bekannt,

*) Auch läßt sich mittelst eines Theodoliten der Winkel α auf folgende Art bestimmen, wobei man Fig. 42. zu vergleichen hat. Man stelle

Digitized by Google

und man hat nun Data genug, um den Brechungsexponenten n für die atmosphärische Luft und die Substanz des bei den Versuchen gebrauchten Prismas berechnen zu können, wie nun gezeigt werden soll.

Nach dem Grundgesetze der Brechung ist nämlich, wobei man wegen der gebrauchten Bezeichnungen die Figur zu vergleichen hat:

$$\frac{\sin(90^\circ - \omega)}{\sin(90^\circ - \omega')} = n, \quad \frac{\sin(90^\circ - \omega_1)}{\sin(90^\circ - \omega_1')} = n;$$

---

das Prisma auf einer horizontalen Ebene auf und wähle zwei sehr weit entfernte Objecte O und O', von welchen horizontale Strahlen OE und O'E' auf die den zu messenden Winkel α einschließenden Seitenflächen des Prismas fallen. Sind nun EA und E'A' die den einfallenden Strahlen OE und O'E' entsprechenden reflectirten Strahlen, so stelle man den Theodoliten nach einander in A und A' auf, und messe die beiden Winkel $OAE = \Theta$ und $O'A'E' = \Theta'$. Hierauf stelle man den Theodoliten in B auf, und messe den Winkel $OBO' = \Omega$. Nun ist

$$180^\circ - 2\omega = 180^\circ - (\Theta + \varphi),$$
$$180^\circ - 2\omega' = 180^\circ - (\Theta' + \varphi');$$

d. i.

$$2\omega = \Theta + \varphi, \; 2\omega' = \Theta' + \varphi';$$

also

$$2(\omega + \omega') = \Theta + \Theta' + \varphi + \varphi',$$

und folglich

$$\omega + \omega' = \tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta') + \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

Denkt man sich jetzt noch die Linie EE' gezogen, so ist in dem Fünfecke BOEE'O' nach einem bekannten Satze

$$\Omega + (\varphi + \psi) + (\varphi' + \psi') + (180^\circ - \omega) + (180 - \omega') + (180^\circ - \alpha) = 540^\circ,$$

also

$$\Omega + (\varphi + \varphi') + (\psi + \psi') - (\omega + \omega') - \alpha = 0,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Omega - \tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta') + \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + (\psi + \psi') - \alpha = 0,$$

also

$$\alpha = \Omega - \tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta') + \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + (\psi + \psi').$$

Insofern man nun, wenn nur die Objecte O und O' sehr weit entfernt sind, die sehr kleinen Winkel φ, φ', ψ, ψ' ohne merklichen Fehler als verschwindend zu betrachten berechtigt ist, hat man nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung des gesuchten Winkels α die einfache Formel

$$\alpha = \Omega - \tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta').$$

Wollte man den Einfluß der Winkel φ, φ', ψ, ψ' in Rechnung bringen, so müßte man diese Winkel entweder selbst mit dem Theodoliten unmittelbar messen oder auf eine andere Weise trigonometrisch bestimmen, was zu einfach ist, als daß dazu hier noch eine besondere Anleitung nöthig sein sollte.

Digitized by Google

d. i.

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = n, \quad \frac{\cos\omega_1}{\cos\omega_1'} = n.$$

Im Vierecke SJJ'S' ist aber nach einem bekannten geometrischen Satze

$$\beta + \gamma + \omega + \omega_1 + (180° - \omega') + (180° - \omega_1') = 360°,$$

d. i.

$$\beta + \gamma + \omega + \omega_1 - (\omega' + \omega_1') = 0,$$

und folglich, weil

$$\omega' + \omega_1' = 180° - \alpha$$

ist,

$$\alpha + \beta + \gamma + \omega + \omega_1 = 180°,$$

also

$$\cos\omega_1 = -\cos(\alpha + \beta + \gamma + \omega).$$

Ferner ist

$$\alpha + \omega' + \omega_1' = 180°, \quad \cos\omega_1' = -\cos(\alpha + \omega'),$$

und man hat daher nach dem Obigen die beiden Gleichungen

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = n, \quad \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega)}{\cos(\alpha+\omega')} = n;$$

welche bloß noch die beiden unbekannten Größen ω' und n enthalten, die sich folglich mittelst derselben bestimmen lassen.

Um aus diesen beiden Gleichungen ω' zu eliminiren, hat man zuvörderst aus der zweiten:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega) &= n\cos\alpha\cos\omega' - n\sin\alpha\sin\omega' \\ &= n\cos\alpha\cos\omega' - n\sin\alpha\sqrt{1-\cos\omega'^2} \\ &= n\cos\alpha\cos\omega' - \sin\alpha\sqrt{n^2 - n^2\cos\omega'^2},\end{aligned}$$

und folglich ferner wegen der ersten der beiden Gleichungen:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega) = \cos\alpha\cos\omega - \sin\alpha\sqrt{n^2 - \cos\omega^2},$$

also

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} = \frac{\cos\alpha\cos\omega - \cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega)}{\sin\alpha},$$

woraus leicht

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} + \sin\omega = \frac{\cos(\alpha-\omega) - \cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega)}{\sin\alpha},$$

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} - \sin\omega = \frac{\cos(\alpha+\omega) - \cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega)}{\sin\alpha};$$

also, wenn man die Zähler der Brüche auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen auf bekannte Weise in Factoren zerlegt:

Digitized by Google

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} + \sin\omega = \frac{2\sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)\,\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma+2\omega)}{\sin\alpha},$$

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} - \sin\omega = \frac{2\sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma+2\omega)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\alpha};$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\beta + \gamma + 2(\alpha+\omega) = 2s$$

oder

$$s = \alpha + \omega + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

gesetzt wird:

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} + \sin\omega = \frac{2\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)}{\sin\alpha},$$

$$\sqrt{n^2 - \cos\omega^2} - \sin\omega = \frac{2\sin s\,\sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, so ergiebt sich mittelst eines bekannten arithmetischen und eines eben so bekannten goniometrischen Satzes die bemerkenswerthe Gleichung

$$n^2 - 1 = \frac{4\sin s\,\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)\,\sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha^2}$$

oder

$$n^2 = 1 + \frac{4\sin s\,\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)\,\sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha^2},$$

mittelst welcher der gesuchte Brechungsexponent ohne große Schwierigkeit aus den gemessenen Winkeln berechnet werden kann. Um sich die Rechnung jedoch noch etwas zu erleichtern, kann man den Hülfswinkel φ mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{4\sin s\,\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)\,\sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha^2}$$

berechnen, und erhält dann

$$n^2 = 1 + \operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin(45^\circ+\varphi)\cdot\sqrt{2}}{\cos\varphi},$$

also

$$n = 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\frac{\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn das Product

$$\sin s\,\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)\,\sin(s-\alpha-\omega)$$

eine positive Größe ist, so kann man den Hülfswinkel Θ auch mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\sin s\,\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)\,\sin(s-\alpha-\omega)}$$

Digitized by Google

berechnen, und hat dann nach dem Obigen

$$n^2 = 1 + \tang\Theta^2 = \sec\Theta^2,$$

also

$$n = \sec\Theta = \frac{1}{\cos\Theta}.$$

Wenn das Product

$$\sin s \sin(s-\alpha) \sin(s-\omega) \sin(s-\alpha-\omega)$$

negativ ist, so ist doch, wie sich aus dem Obigen leicht ergiebt, der absolute Werth von

$$\frac{4 \sin s \sin(s-\alpha) \sin(s-\omega) \sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha^2}$$

kleiner als die Einheit, und man kann folglich den Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$\sin\psi = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{-\sin s \sin(s-\alpha) \sin(s-\omega) \sin(s-\alpha-\omega)}$$

oder auch mittelst der Formel

$$\cos\psi = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{-\sin s \sin(s-\alpha) \sin(s-\omega) \sin(s-\alpha-\omega)}$$

berechnen, und es ist dann nach dem Obigen respective

$$n^2 = 1 - \sin\psi^2 \text{ oder } n^2 = 1 - \cos\psi^2,$$

d. i. respective

$$n^2 = \cos\psi^2 \text{ oder } n^2 = \sin\psi^2,$$

also respective

$$n = \cos\psi \text{ oder } n = \sin\psi.$$

Mittelst einer der vorhergehenden Methoden wird sich der gesuchte Brechungsexponent n immer ohne Schwierigkeit mit Logarithmen berechnen lassen.

§. 46.

Bei der Bestimmung des Brechungsexponenten für die atmosphärische Luft und flüssige Körper, sowohl tropfbare als ausdehnsame, wendet Biot ein hohles, von Glasplatten, deren begränzende Ebenen einander parallel sind — worauf bei der Anfertigung der Platten ganz vorzügliche Sorgfalt verwandt werden muß —, begränztes Prisma an, welches mit den verschiedenen flüssigen Körpern gefüllt wird, und wo dann die Beobachtungen auf ganz ähnliche Art, wie vorher bei festen Körpern gezeigt worden ist, angestellt werden.

Um bei den Versuchen mit tropfbaren Flüssigkeiten das Zusammenkitten der das Prisma bildenden Glasplatten, und die Fehler, welche entstehen würden, wenn ein Theil des Kitts durch die Flüssigkeit aufgelöst werden sollte, zu vermeiden, hat Biot den folgenden sinnreichen Apparat erdacht. Man nimmt

Digitized by Google

eine Glastafel, die etwa 0,5 Zoll dick und 2 Zoll breit ist, und durchbohrt dieselbe in der Mitte, so daß ein cylindrischer Kanal von etwa 1 Zoll Durchmesser entsteht. Hierauf läßt man die Glastafel zu einem Prisma schleifen, welches also ein von der einen Seitenfläche zur andern hinüber gehendes Loch haben wird. Legt man nun auf diese beiden Seitenflächen recht eben geschliffene Spiegelplatten mit parallelen Gränzflächen, so bleiben diese bei Anwendung eines leichten Drucks von selbst an den Seitenflächen des Prismas haften, und man erhält auf diese Weise ohne Anwendung von Kitt ein wirkliches hohles Glasprisma, in welchem man alle möglichen tropfbaren Flüssigkeiten, die nur auf das Glas nicht chemisch wirken, einschließen kann, ohne eine chemische Veränderung derselben befürchten zu dürfen. Um die Flüssigkeiten mit Leichtigkeit einbringen zu können, ohne nöthig zu haben, die Spiegelplatten los zu machen, kann man das Prisma, wie Fig. 43. zeigt, mit einem cylindrischen Loche versehen, das sich durch einen eingeriebenen Glasstöpsel verschließen läßt. Um endlich das Anhaften der Spiegelplatten noch mehr zu sichern und zu verhindern, daß sie bei den Bewegungen, die man dem Prisma zu ertheilen genöthigt ist, über dessen Seitenflächen hingleiten, hält man sie, wie ebenfalls aus der Figur ersichtlich ist, durch kupferne Schienen fest, welche durch Schrauben an ihre Oberflächen sanft angedrückt werden. Zuweilen giebt man, wie in Fig. 44. dargestellt ist, dem Hohlprisma auch zwei Höhlungen, und noch eine andere Einrichtung des Hohlprismas ist in Fig. 45. abgebildet, die ohne weitere Erläuterung für sich sogleich verständlich sein wird.

Daß die Beobachtungen ganz auf dieselbe Art wie bei festen Körpern anzustellen sind, ist schon vorher bemerkt worden. Die Berechnung muß man aber, wenn man mit völliger Strenge verfahren will, auf die folgenden Betrachtungen gründen, wobei man Fig. 46., welche leicht für sich ohne weitere Erläuterung verständlich sein wird, zu vergleichen hat.

Den Winkel ω findet man aus den beiden gemessenen Winkeln S″SJ und SS″J ganz wie im vorhergehenden Paragraphen mittelst der Formel:

$$\omega = \tfrac{1}{2}(\text{S''SJ} + \text{SS''J}),$$

und ist also jetzt diesen Winkel als bekannt anzusehen berechtigt. Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für die atmosphärische Luft und Glas durch μ, den Brechungsexponenten für Glas und die das Prisma füllende Flüssigkeit durch ν, so haben wir, unter Voraussetzung genau paralleler Gränzflächen der das Prisma einschließenden Spiegelplatten, mit Anwendung der aus der Figur von selbst ersichtlichen Bezeichnungen nach dem Brechungsgesetze die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin(90^\circ - \omega)}{\sin(90^\circ - \omega')} = \mu, \quad \frac{\sin(90^\circ - \omega')}{\sin(90^\circ - \omega'')} = \nu;$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \omega_1)}{\sin(90^\circ - \omega_1')} = \mu, \quad \frac{\sin(90^\circ - \omega_1')}{\sin(90^\circ - \omega_1'')} = \nu;$$

Digitized by Google

d. i.

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \mu, \quad \frac{\cos\omega'}{\cos\omega''} = \nu;$$

$$\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega_1'} = \mu, \quad \frac{\cos\omega_1'}{\cos\omega_1''} = \nu;$$

also durch Multiplication:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega''} = \mu\nu, \quad \frac{\cos\omega_1}{\cos\omega_1''} = \mu\nu.$$

Nach einem bekannten Satze vom Sechsecke ist aber

$$\left.\begin{aligned}\beta + \omega + (180^\circ - \omega') + \omega' + (180^\circ - \omega'') + (180^\circ - \omega_1'')\\ + \omega_1' + (180^\circ - \omega_1') + \omega_1 + \gamma\end{aligned}\right\} = 720^\circ,$$

woraus sich leicht nach gehöriger Reduction

$$\beta + \gamma + \omega + \omega_1 - (\omega'' + \omega_1'') = 0,$$

also, weil

$$\omega'' + \omega_1'' = 180^\circ - \alpha$$

ist,

$$\alpha + \beta + \gamma + \omega + \omega_1 = 180^\circ,$$

folglich

$$\cos\omega_1 = -\cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega)$$

ergiebt. Ferner ist

$$\alpha + \omega'' + \omega_1'' = 180^\circ, \quad \cos\omega_1'' = -\cos(\alpha+\omega''),$$

und man hat daher nach dem Obigen offenbar die beiden Gleichungen:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega''} = \mu\nu, \quad \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\omega)}{\cos(\alpha+\omega'')} = \mu\nu;$$

welche bloß noch die beiden unbekannten Größen ω'' und $\mu\nu$ enthalten, die sich folglich mittelst derselben bestimmen lassen. Ganz auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Paragraphen erhält man aber, wenn wieder der Kürze wegen

$$s = \alpha + \omega + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

gesetzt wird, zur Bestimmung von $\mu\nu$ die Gleichung

$$(\mu\nu)^2 = 1 + \frac{4\sin s\sin(s-\alpha)\sin(s-\omega)\sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha^2},$$

die man auch ganz wie im vorhergehenden Paragraphen zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten kann. Auf diese Art findet man also $\mu\nu$.

Nun lehrt aber die Erfahrung, daß, wenn man zwei von parallelen Ebenen begränzte durchsichtige Platten M und N (Fig. 47.) auf einander legt, und einen Strahl aus der Luft in M treten läßt, der aus N wieder in die Luft heraustretende Strahl jederzeit dem einfallenden Strahl parallel ist, was schon

Digitized by Google

daraus mit völliger Deutlichkeit hervorgeht, daß die gegenseitige Lage der Gegenstände außer uns, wenn wir dieselben durch zwei solche Platten betrachten, gar keine Veränderung zu erleiden scheint. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für Luft und M durch m, für Luft und N durch n, für M und N durch x, so ist nach dem Brechungsgesetze, wobei man die Figur zu vergleichen hat:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = m,\quad \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi''} = x,\quad \frac{\cos\varphi''}{\cos\varphi'''} = \frac{1}{n};$$

also durch Multiplication

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'''} = \frac{mx}{n}.$$

Weil nun aber nach dem Obigen $\varphi = \varphi'''$ ist, so ist

$$\frac{mx}{n} = 1,\quad mx = n,\quad x = \frac{n}{m}.$$

Da nun, wenn wir dies jetzt auf unsere obigen Beobachtungen und Messungen anwenden, die Brechungsexponenten für Luft und Glas, und für Glas und die das Prisma füllende Flüssigkeit respective μ und ν, also die Brechungsexponenten für Glas und Luft, und für Glas und die das Prisma füllende Flüssigkeit respective $\frac{1}{\mu}$ und ν waren, so ist nach dem Vorhergehenden, wenn wir jetzt den Brechungsexponenten für Luft und die das Prisma füllende Flüssigkeit durch n bezeichnen:

$$n = \nu : \frac{1}{\mu},\quad \text{d. i. } n = \mu\nu;$$

also nach dem Obigen

$$n^2 = 1 + \frac{4\sin s\,\sin(s-\alpha)\,\sin(s-\omega)\,\sin(s-\alpha-\omega)}{\sin\alpha^2},$$

so daß folglich auch in dem jetzigen Falle n ganz auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Paragraphen bei festen Körpern berechnet werden kann, wenn nur, was hierbei immer vorausgesetzt werden muß, die das Prisma bildenden Spiegelplatten von ganz genau einander parallelen Ebenen begränzt werden, was sich bei dem jetzigen Zustande der technischen Mechanik auch wenigstens mit sehr großer Annäherung erreichen läßt, weshalb wir hier auch auf eine Untersuchung der durch den Nichtparallelismus der die Spiegelplatten begränzenden Ebenen bei den obigen Versuchen hervorgebrachten Fehler nicht weiter eingehen wollen.

§. 47.

Mittelst der vorhergehenden Methode kann man auch, wenn man in dem Hohlprisma mit Hülfe der Luftpumpe einen möglichst vollkommen leeren Raum darstellt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und die atmosphärische Luft bestimmen,

Digitized by Google

was uns nun aber noch zu den folgenden wichtigen Bemerkungen Veranlassung giebt.

Wenn bei den Versuchen die atmosphärische Luft die Temperatur t nach dem Centesimalthermometer hat und unter dem in Metern ausgedrückten barometrischen Drucke b steht, so ist ihre Dichtigkeit in Bezug auf die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$ als Einheit der Dichtigkeiten bekanntlich

$$\frac{b}{0^m,76 \cdot (1+0{,}00375 \cdot t)}.$$

Bezeichnen wir nun den durch die bei diesen Zuständen der atmosphärischen Luft angestellten Versuche gefundenen Brechungsexponenten für den leeren Raum und die atmosphärische Luft durch n, so zeigen bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen angestellte Versuche, daß der Quotient

$$(n^2-1) : \frac{b}{0^m,76 \cdot (1+0{,}00375 \cdot t)}$$

oder der Bruch

$$\frac{0^m,76 \cdot (1+0{,}00375 \cdot t)(n^2-1)}{b}$$

sehr nahe eine constante Größe ist, d. h. also, daß die Größe n^2-1, welche man gewöhnlich aus Gründen, die sich hier noch nicht erläutern lassen, die brechende Kraft zu nennen pflegt, der Dichtigkeit der Luft proportional, oder daß der Quotient der brechenden Kraft durch die Dichtigkeit, welchen man gewöhnlich das Brechungsvermögen zu nennen pflegt, eine constante Größe ist. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ durch N, so ist $n = N$ für $t = 0$ und $b = 0^m,76$; folglich, weil der obige Bruch eine constante Größe ist,

$$\frac{0^m,76 \cdot (1+0{,}00375 \cdot t)(n^2-1)}{b} = N^2 - 1,$$

also

$$N = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1+0{,}00375 \cdot t)(n^2-1)}{b}},$$

mittelst welcher Formel der Brechungsexponent für den leeren Raum und die atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und dem Barometerstande $0^m,76$ aus den durch die Versuche unmittelbar erhaltenen Resultaten berechnet werden kann. Nach Biot ist bis auf sieben Decimalstellen:

$$N = 1{,}0002943$$

und

$$N^2 - 1 = 0{,}0005888.$$

Digitized by Google

Aus der obigen Gleichung zwischen n und N folgt auch

$$n = \sqrt{1 + \frac{b\,(N^2 - 1)}{0^m,76 \,.\, (1 + 0{,}00375 \,.\, t)}},$$

d. i. wenn wir die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur t und dem Barometerstande b durch D bezeichnen, weil nach dem Obigen

$$D = \frac{b}{0^m,76 \,.\, (1 + 0{,}00375 \,.\, t)}$$

ist:

$$n = \sqrt{1 + (N^2 - 1)\,D},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = N^2 - 1 = 0{,}0005888$$

setzen, wo also K eine constante Größe ist:

$$n = \sqrt{1 + KD}.$$

Ist n_1 der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1, so ist

$$n_1 = \sqrt{1 + KD_1};$$

und nach dem vorhergehenden Paragraphen ist also

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{1 + KD_1}}{\sqrt{1 + KD}}$$

der Brechungsexponent für atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1.

Bezeichnet jetzt ferner m den durch Versuche gefundenen Brechungsexponenten für atmosphärische Luft von der Dichte D und einen gewissen Körper, und m_1 den Brechungsexponenten für den leeren Raum und diesen Körper; so ist, weil nach dem Obigen

$$\sqrt{1 + KD}$$

der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichte D ist, nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{1 + KD}},$$

oder nach dem Vorhergehenden, wenn bei den Versuchen die atmosphärische Luft die Temperatur t hatte und unter dem barometrischen Drucke b stand:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{Kb}{0^m,76 \,.\, (1 + 0{,}00375 \,.\, t)}}}.$$

Ist der vorhergehende Körper eine Gasart, welche die Temperatur τ hat und unter dem barometrischen Drucke β steht,

Digitized by Google

und bezeichnet μ_1 den Brechungsexponenten für den leeren Raum und diese Gasart bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$; so ist (m. vergl. Abth. I. §. 220. S. 450.), weil sich nach dem Obigen die brechenden Kräfte wie die Dichtigkeiten verhalten:

$$m_1^2 - 1 : \mu_1^2 - 1 = \frac{\beta}{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)} : 1,$$

also

$$\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)(m_1^2 - 1)}{\beta}},$$

oder, wenn man für m_1 seinen Werth aus dem Vorhergehenden einführt:

$$\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)}{\beta}\left(\frac{m^2}{1 + KD} - 1\right)}$$

oder auch, wenn man noch für D seinen Werth aus dem Obigen einführt:

$$\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)}{\beta}\left[\left(\frac{m^2}{1 + \frac{Kb}{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot t)}} - 1\right)\right]}$$

Weil

$$\frac{Kb}{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot t)}$$

immer eine sehr kleine Größe ist, so kann man auch näherungsweise:

$$\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)}{\beta}\left\{m^2\left(1 - \frac{Kb}{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot t)}\right) - 1\right\}},$$

oder

$$\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)}{\beta}\left\{m^2 - 1 - \frac{Kbm^2}{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot t)}\right\}},$$

oder auch

$$\mu_1 = \sqrt{1 + \frac{0^m,76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot \tau)}{\beta}(m^2 - 1) - K\frac{b(1 + 0{,}00375 \cdot \tau)}{\beta(1 + 0{,}00375 \cdot t)}m^2}$$

setzen.

Das Vorhergehende mag hier genügen, um zu zeigen, wie man sich bei allen solchen Reductionen zu verhalten hat.

Digitized by Google

§. 48.

Einer andern sehr sinnreichen Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten mittelst prismatisch geformter Körper, zu deren Entwickelung wir in diesem Paragraphen übergehen wollen, müssen wir die folgenden theoretischen Betrachtungen, durch welche eine vollständige Einsicht in dieselbe vorzüglich vermittelt wird, vorausschicken, und werden dabei, wie überall in diesem Werke, einen ganz elementaren Weg einschlagen, wenn auch allerdings gerade bei dem vorliegenden Gegenstande die Anwendung der höheren Analysis, namentlich der Differentialrechnung, uns sehr große Erleichterung gewähren würde.

In Fig. 48. sei wie schon früher ABC der auf den Seitenflächen senkrecht stehende Durchschnitt eines Prismas, welches von einem in der Ebene dieses Durchschnitts sich bewegenden Strahle in dem Punkte J getroffen wird. Nachdem dieser Strahl bei J nach der Richtung JJ_1 gebrochen worden ist, tritt er bei J_1 nach der Richtung J_1S_1 wieder aus dem Prisma heraus. Der Einfallswinkel und der Brechungswinkel bei J seien Θ und Θ', und dieselben Winkel bei J_1 seien Θ_1' und Θ_1. Den von den gehörig über die Einfallspunkte J und J_1 hinaus verlängerten Strahlen SJ und J_1S_1 eingeschlossenen Winkel, der in der Figur durch Ω bezeichnet worden ist, pflegt man die Abweichung oder Ablenkung des Strahls zu nennen. Wenn der Einfallswinkel Θ eine gewisse Aenderung erleidet, die wir im Allgemeinen durch $\Delta\Theta$ bezeichnen wollen, so werden dadurch natürlich auch gewisse Aenderungen der Winkel Θ', Θ_1', Θ_1, Ω herbeigeführt werden, die analog mit dem Vorhergehenden respective durch

$$\Delta\Theta',\ \Delta\Theta_1',\ \Delta\Theta_1,\ \Delta\Omega$$

bezeichnet werden mögen, so daß also, wenn der Winkel Θ in $\Theta+\Delta\Theta$ übergeht, die Winkel

$$\Theta',\ \Theta_1',\ \Theta_1,\ \Omega$$

respective in

$$\Theta'+\Delta\Theta',\ \Theta_1'+\Delta\Theta_1',\ \Theta_1+\Delta\Theta_1,\ \Omega+\Delta\Omega$$

übergehen. Vergleichen wir nun die einander entsprechenden Aenderungen $\Delta\Theta$ und $\Delta\Omega$ der Winkel Θ und Ω mit einander, so ist der Fall besonders bemerkenswerth und für unsern Zweck vorzüglich wichtig, wenn für alle der Null unendlich nahe kommenden positiven und negativen Werthe der Aenderung $\Delta\Theta$ des Winkels Θ die Aenderung $\Delta\Omega$ des Winkels Ω ihr Zeichen nicht ändert, also entweder stets positiv oder stets negativ bleibt, oder mit andern Worten der Winkel Ω entweder stets zunimmt oder stets abnimmt, wenn der Winkel Θ zunimmt oder abnimmt, wobei aber immer, was man wohl zu beachten hat, bloß solche Aenderungen $\Delta\Theta$ des Winkels Θ vorausgesetzt werden, welche als der Null unendlich nahe kommend betrachtet

Digitized by Google

werden können. Jeder einem gewissen bestimmten Werthe des Winkels Θ entsprechende bestimmte Werth des Winkels Ω, welcher kleiner ist als alle seine in seiner unmittelbaren Nähe liegenden Nachbarwerthe, die man erhält, wenn man den Werth des Winkels Θ eine der Null unendlich nahe kommende Zunahme oder Abnahme erleiden läßt, wird ein Minimum des Winkels Ω genannt. Jeder einem gewissen bestimmten Werthe des Winkels Θ entsprechende bestimmte Werth des Winkels Ω, welcher größer ist als alle seine in seiner unmittelbaren Nähe liegenden Nachbarwerthe, die man erhält, wenn man den Werth des Winkels Θ eine der Null unendlich nahe kommende Zunahme oder Abnahme erleiden läßt, heißt dagegen ein Maximum des Winkels Ω. Ob es nun solche Minima oder Maxima des Winkels Ω giebt, wollen wir jetzt untersuchen.

Bezeichnen wir den Brechungsexponenten durch n, so haben wir nach dem Grundgesetze der Refraction die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'} = n \text{ und } \frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_1'} = n.$$

Ferner ist in dem Vierecke $AJDJ_1$ nach bekannten geometrischen Sätzen, wie leicht erhellen wird:

$$A + (90° - \Theta) + (90° - \Theta_1) + (180° + \Omega) = 360°,$$

also, wie man leicht findet:

$$\Theta + \Theta_1 - \Omega = A,$$

und folglich, da der Winkel A offenbar constant ist,

$$\Theta + \Theta_1 - \Omega$$

eine constante Größe, also auch

$$(\Theta + \Delta\Theta) + (\Theta_1 + \Delta\Theta_1) - (\Omega + \Delta\Omega) = A,$$

folglich, wenn man von dieser Gleichung die vorhergehende subtrahirt:

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 - \Delta\Omega = 0.$$

Endlich ist in dem Dreiecke AJJ_1 nach einem bekannten Elementarsatze:

$$A + (90° - \Theta') + (90° - \Theta_1') = 180°,$$

also

$$\Theta' + \Theta_1' = A,$$

und folglich auch

$$\Theta' + \Theta_1'$$

eine constante Größe, so daß also auch

$$(\Theta' + \Delta\Theta') + (\Theta_1' + \Delta\Theta_1') = A,$$

folglich, wenn man von dieser Gleichung die vorhergehende subtrahirt,

Digitized by Google

$$\Delta\Theta' + \Delta\Theta_1' = 0 \text{ oder } \Delta\Theta_1' = -\Delta\Theta'$$

ist.

Wegen der beiden Gleichungen

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta'} = n, \quad \frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_1'} = n$$

ist nun

$$\sin\Theta' = \frac{1}{n}\sin\Theta, \quad \sin\Theta_1' = \frac{1}{n}\sin\Theta_1;$$

also

$$\sin(\Theta'+\Delta\Theta') = \frac{1}{n}\sin(\Theta+\Delta\Theta), \quad \sin(\Theta_1'+\Delta\Theta_1') = \frac{1}{n}\sin(\Theta_1+\Delta\Theta_1)$$

und folglich

$$\sin(\Theta' + \Delta\Theta') - \sin\Theta' = \frac{1}{n}\{\sin(\Theta + \Delta\Theta) - \sin\Theta\},$$

$$\sin(\Theta_1'+\Delta\Theta_1') - \sin\Theta_1' = \frac{1}{n}\{\sin(\Theta_1+\Delta\Theta_1) - \sin\Theta_1\};$$

also nach einer bekannten geometrischen Zerlegung:

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta'\cos(\Theta' + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta') = \frac{1}{n}\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta\cos(\Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1'\cos(\Theta_1'+\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1') = \frac{1}{n}\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1\cos(\Theta_1+\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1);$$

und daher, weil nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1' = -\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta'$$

ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta'\cos(\Theta' + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta') = \frac{1}{n}\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta\cos(\Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta),$$

$$-\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta'\cos(\Theta_1'+\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1') = \frac{1}{n}\sin\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1\cos(\Theta_1+\tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1);$$

woraus durch Division

$$-\frac{\cos(\Theta' + \frac{1}{2}\Delta\Theta')}{\cos(\Theta_1'+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1')} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta\cos(\Theta + \frac{1}{2}\Delta\Theta)}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1\cos(\Theta_1+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1)},$$

also

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} = -\frac{\cos(\Theta + \frac{1}{2}\Delta\Theta)\cos(\Theta_1'+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1')}{\cos(\Theta_1+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1)\cos(\Theta' + \frac{1}{2}\Delta\Theta')}$$

folgt. Daher ist

$$\frac{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}}{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta}{\frac{1}{2}\Delta\Theta}} \cdot \frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta} = -\frac{\cos(\Theta + \frac{1}{2}\Delta\Theta)\cos(\Theta_1'+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1')}{\cos(\Theta_1+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1)\cos(\Theta' + \frac{1}{2}\Delta\Theta')}.$$

Digitized by Google

Nähert sich nun $\Delta\Theta$, und folglich natürlich auch $\Delta\Theta_1$ der Null, so nähern die Brüche

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta}{\frac{1}{2}\Delta\Theta} \text{ und } \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}$$

sich beide der Einheit als ihrer Gränze*), und der Bruch

$$\frac{\cos(\Theta+\frac{1}{2}\Delta\Theta)\cos(\Theta_1'+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1')}{\cos(\Theta_1+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1)\cos(\Theta'+\frac{1}{2}\Delta\Theta')}$$

nähert sich offenbar dem Bruche

$$\frac{\cos\Theta\cos\Theta_1'}{\cos\Theta_1\cos\Theta'}$$

als seiner Gränze. Bezeichnen wir also die Gränze, welcher unter derselben Voraussetzung der Bruch

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta}$$

sich nähert, durch

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta},$$

so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta} = -\frac{\cos\Theta\cos\Theta_1'}{\cos\Theta_1\cos\Theta'}.$$

---

*) Dies kann auf folgende Art leicht bewiesen werden. Es sei x ein beliebiger positiver oder negativer Bogen, der jedoch absolut genommen kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sein soll. Unter dieser Voraussetzung ist rücksichtlich der absoluten Werthe

$$\sin x < x < \text{tang}\,x,$$

also, weil diese Größen sämmtlich mit $\sin x$ gleiches Vorzeichen haben:

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\text{tang}\,x},$$

d. i.

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Weil nun, wenn x sich der Null nähert, $\cos x$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähert, so muß sich natürlich unter derselben Voraussetzung der zwischen 1 und $\cos x$ liegende Bruch

$$\frac{\sin x}{x}$$

um so mehr der Einheit bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wie bewiesen werden sollte. Denn daß man für das hiesige x auch das obige

$$\frac{1}{2}\Delta\Theta \text{ oder } \frac{1}{2}\Delta\Theta_1$$

setzen kann, versteht sich von selbst.

Digitized by Google

Wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 - \Delta\Omega = 0$$

ist aber

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Theta} - 1,$$

also offenbar auch

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta} = \text{Lim}\,\frac{\Delta\Omega}{\Delta\Theta} - 1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\Omega}{\Delta\Theta} - 1 = -\frac{\cos\Theta\,\cos\Theta_1'}{\cos\Theta_1\,\cos\Theta'},$$

also

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\Omega}{\Delta\Theta} = -\frac{\cos\Theta\cos\Theta_1' - \cos\Theta_1\cos\Theta'}{\cos\Theta_1\,\cos\Theta'}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\cos\Theta' = \sqrt{1 - \sin\Theta'^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta^2},$$

$$\cos\Theta_1' = \sqrt{1 - \sin\Theta_1'^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta_1^2}$$

ist, so ist

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\Omega}{\Delta\Theta} = -\frac{\cos\Theta\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta_1^2} - \cos\Theta_1\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta^2}}{\cos\Theta_1\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta^2}}.$$

Wäre nun

$$\cos\Theta\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta_1^2} - \cos\Theta_1\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta^2} \gtrless 0,$$

d. h. diese Größe ohne zu verschwinden entweder positiv oder negativ, so würden offenbar für der Null unendlich nahe kommende Werthe von $\Delta\Theta$ die Größen $\Delta\Theta$ und $\Delta\Omega$ immer entweder ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, und es könnte also augenscheinlich für solche der Null unendlich nahe kommende positive und negative Werthe von $\Delta\Theta$ die Größe $\Delta\Omega$ nicht ihr Zeichen unverändert beibehalten, d. h. es könnte Ω weder ein Minimum, noch ein Maximum sein, und die nothwendige Bedingung, wenn Ω überhaupt ein Minimum oder ein Maximum sein soll, ist folglich, daß die Größe

$$\cos\Theta\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta_1^2} - \cos\Theta_1\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin\Theta^2}$$

Digitized by Google

verschwindet, d. h. daß

$$\cos\Theta\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin\Theta_1^2}-\cos\Theta_1\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin\Theta^2}=0$$

oder

$$\cos\Theta\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin\Theta_1^2}=\cos\Theta_1\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin\Theta^2}$$

ist. Quadrirt man aber auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man leicht

$$\cos\Theta^2-\cos\Theta_1^2=\frac{1}{n^2}(\cos\Theta^2\sin\Theta_1^2-\sin\Theta^2\cos\Theta_1^2),$$

also, weil

$$\cos\Theta^2\sin\Theta_1^2-\sin\Theta^2\cos\Theta_1^2=\cos\Theta^2(1-\cos\Theta_1^2)-\cos\Theta_1^2(1-\cos\Theta^2)$$
$$=\cos\Theta^2-\cos\Theta_1^2$$

ist:

$$\cos\Theta^2-\cos\Theta_1^2=\frac{1}{n^2}(\cos\Theta^2-\cos\Theta_1^2).$$

Ist nun aber, wie wir hier annehmen wollen, nicht $n=1$, so kann diese Gleichung offenbar nur dann stattfinden, wenn

$$\cos\Theta^2=\cos\Theta_1^2,\quad\cos\Theta=\cos\Theta_1,\quad\Theta=\Theta_1$$

ist, und die nothwendige Bedingung, wenn überhaupt ein Minimum oder ein Maximum stattfinden soll, ist also $\Theta=\Theta_1$, d. h. daß der einfallende und der ausfahrende Strahl gegen die entsprechenden Einfallslothe unter gleichen Winkeln geneigt sind, woraus wegen der Gleichungen

$$\sin\Theta'=\frac{1}{n}\sin\Theta,\quad\sin\Theta_1'=\frac{1}{n}\sin\Theta_1$$

auf der Stelle auch

$$\Theta'=\Theta_1'$$

folgt, so daß also im Falle eines Minimums oder Maximums die Gleichungen

$$\Theta=\Theta_1\text{ und }\Theta'=\Theta_1'$$

jederzeit zusammen bestehen müssen. Ob nun aber unter der Voraussetzung, daß diese Bedingungen erfüllt sind, wirklich ein Minimum oder Maximum, und welches von beiden stattfindet, muß jetzt noch besonders untersucht werden, wozu wir daher im Folgenden übergehen wollen.

Nehmen wir also jetzt an, daß die vorhergehenden Bedingungen erfüllt seien, d. h. daß

$$\Theta=\Theta_1,\quad\Theta'=\Theta_1'$$

sei.

Digitized by Google

Weil bekanntlich

$$\sin(\Theta + \Delta\Theta) = n\sin(\Theta' + \Delta\Theta'),$$
$$\sin(\Theta_1 + \Delta\Theta_1) = n\sin(\Theta_1' + \Delta\Theta_1')$$

und nach dem Vorhergehenden allgemein

$$\Delta\Theta_1' = -\Delta\Theta'$$

ist, so ist wegen der Voraussetzung, von welcher wir hier ausgehen:

$$\sin(\Theta + \Delta\Theta) = n\sin(\Theta' + \Delta\Theta'),$$
$$\sin(\Theta + \Delta\Theta_1) = n\sin(\Theta' - \Delta\Theta');$$

woraus sich, in Verbindung mit der aus dem Vorhergehenden ebenfalls bekannten Gleichung

$$\sin\Theta = n\sin\Theta'$$

auf der Stelle mit völliger Deutlichkeit ergiebt, daß die Veränderungen $\Delta\Theta$ und $\Delta\Theta_1$ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben, immer unter der Voraussetzung, daß diese Größen der Null unendlich nahe kommen. Nach dem Vorhergehenden ist aber allgemein

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} = -\frac{\cos(\Theta + \frac{1}{2}\Delta\Theta)\cos(\Theta_1' + \frac{1}{2}\Delta\Theta_1')}{\cos(\Theta_1 + \frac{1}{2}\Delta\Theta_1)\cos(\Theta' + \frac{1}{2}\Delta\Theta')},$$

und da nun

$$\Delta\Theta,\ \Delta\Theta',\ \Delta\Theta_1,\ \Delta\Theta_1'$$

einander entsprechende oder zusammengehörende Veränderungen der hier immer in Betrachtung kommenden Winkel sind, so wird man, wie leicht erhellen wird, wenn nur, wie wir hier immer annehmen, die obigen Größen der Null unendlich nahe kommen, wenigstens ohne allen merklichen Fehler auch

$$\tfrac{1}{2}\Delta\Theta,\ \tfrac{1}{2}\Delta\Theta',\ \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1,\ \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1'$$

als einander entsprechende oder zusammengehörende Veränderungen der hier immer in Betrachtung kommenden Winkel, also

$$\Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta,\ \Theta' + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta',\ \Theta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1,\ \Theta_1' + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1'$$

als einander entsprechende oder zusammengehörende Werthe dieser Winkel selbst betrachten können, und folglich nach dem Obigen

$$\sin(\Theta' + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta') = \frac{1}{n}\sin(\Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta),$$

$$\sin(\Theta_1' + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1') = \frac{1}{n}\sin(\Theta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1);$$

also

Digitized by Google

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} = -\frac{\cos(\Theta+\frac{1}{2}\Delta\Theta)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin(\Theta_1+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1)^2}}{\cos(\Theta_1+\frac{1}{2}\Delta\Theta_1)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin(\Theta+\frac{1}{2}\Delta\Theta)^2}},$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$T = \Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta,\ T_1 = \Theta_1 + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1$$

oder

$$T = \Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta,\ T_1 = \Theta + \tfrac{1}{2}\Delta\Theta_1$$

gesetzt wird,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} = -\frac{\cos T\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin T_1^2}}{\cos T_1\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin T^2}}$$

zu setzen berechtigt sein.

Die Bedingung

$$\frac{\cos T\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin T_1^2}}{\cos T_1\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin T^2}} \gtrless 1$$

ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$\cos T^2\left(1-\frac{1}{n^2}\sin T_1^2\right) \gtrless \cos T_1^2\left(1-\frac{1}{n^2}\sin T^2\right)$$

oder die Bedingung

$$\cos T^2\left(1-\frac{1}{n^2}\sin T_1^2\right) - \cos T_1^2\left(1-\frac{1}{n^2}\sin T^2\right) \gtrless 0,$$

d. i. die Bedingung

$$\cos T^2 - \cos T_1^2 - \frac{1}{n^2}(\cos T^2\sin T_1^2 - \cos T_1^2\sin T^2) \gtrless 0,$$

also, wie man hieraus leicht findet, die Bedingung

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(\cos T^2 - \cos T_1^2) \gtrless 0$$

erfüllt ist. Wenn nun

$$n > 1, \text{ also } 1-\frac{1}{n^2}$$

positiv ist, so ist diese Bedingung offenbar erfüllt, wenn die Bedingung

$$\cos T \gtrless \cos T_1, \text{ d. i. } T \lesseqgtr T_1$$

Digitized by Google

erfüllt ist. Wenn $\Delta\Theta$ positiv, folglich nach dem Obigen $\Delta\Theta_1$ negativ ist, so ist $T > T_1$, also nach dem Vorhergehenden

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} < 1,$$

d. i.

$$\Delta\Theta > -\Delta\Theta_1,$$

und folglich

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 > 0.$$

Wenn dagegen $\Delta\Theta$ negativ, folglich nach dem Obigen $\Delta\Theta_1$ positiv ist, so ist $T < T_1$, also nach dem Vorhergehenden

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} > 1,$$

d. i.

$$-\Delta\Theta < \Delta\Theta_1,$$

und folglich wieder

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 > 0.$$

Wenn

$$n < 1, \text{ also } 1 - \frac{1}{n^2}$$

negativ ist, so ist die obige Bedingung erfüllt, wenn die Bedingung

$$\cos T \lessgtr \cos T_1,$$

d. i.

$$T \gtrless T_1$$

erfüllt ist. Wenn $\Delta\Theta$ positiv, folglich nach dem Obigen $\Delta\Theta_1$ negativ ist, so ist $T > T_1$, also nach dem Vorhergehenden

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} > 1,$$

d. i.

$$\Delta\Theta < -\Delta\Theta_1,$$

und folglich

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 < 0.$$

Wenn dagegen $\Delta\Theta$ negativ, folglich nach dem Obigen $\Delta\Theta_1$ positiv ist, so ist $T < T_1$, also nach dem Vorhergehenden

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta\Theta} < 1,$$

d. i.

$$-\Delta\Theta > \Delta\Theta_1,$$

und folglich wieder

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 < 0.$$

Digitized by Google

Ueberlegt man nun, daß nach dem Obigen allgemein

$$\Delta\Theta + \Delta\Theta_1 - \Delta\Omega = 0,$$

also

$$\Delta\Omega = \Delta\Theta + \Delta\Theta_1$$

ist, so ergiebt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen unmittelbar, daß unter der gemachten Voraussetzung für positive und negative $\Delta\Theta$ die Veränderung $\Delta\Omega$ stets positiv oder stets negativ, also Ω ein Minimum oder ein Maximum ist, jenachdem $n > 1$ oder $n < 1$ ist.

Alles dieses führt also zu dem folgenden merkwürdigen und für unsere ferneren Untersuchungen sehr wichtigen Resultate:

Wenn der einfallende und der ausfahrende Strahl gegen die entsprechenden Einfallslothe unter gleichen Winkeln geneigt sind, — und auch nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, — wird die Ablenkung oder Abweichung des Strahls ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem der Brechungsexponent größer oder kleiner als die Einheit ist.

Von diesem Satze läßt sich nun die folgende Anwendung bei der Bestimmung des Brechungsexponenten n machen, wobei wir uns wieder an die aus dem Vorhergehenden bekannten Gleichungen

$$\sin\Theta = n\sin\Theta', \quad \sin\Theta_1 = n\sin\Theta_1'$$

und

$$\Theta + \Theta_1 - \Omega = A, \quad \Theta' + \Theta_1' = A$$

erinnern, und jetzt annehmen wollen, daß man in den in dem einfallenden und ausfahrenden Strahle liegenden Punkten S und S_1 die Winkel JSS_1 und J_1S_1S, welche respective durch S und Σ bezeichnet werden mögen, mit einem geeigneten Winkelmesser gemessen habe. Dann tritt zu den obigen vier Gleichungen noch die fünfte Gleichung

$$S + \Sigma = \Omega$$

hinzu, deren Richtigkeit aus der Figur auf der Stelle erhellet. Aus der ersten, zweiten und vierten Gleichung kann man nun zuvörderst leicht die Winkel Θ' und Θ_1' eliminiren, indem die zwei ersten Gleichungen mittelst der vierten sogleich auf die Form

$$\sin\Theta = n\sin\Theta', \quad \sin\Theta_1 = n\sin(A - \Theta')$$

oder auf die Form

$$\sin\Theta = n\sin\Theta', \quad \sin\Theta_1 = n\sin A\cos\Theta' - n\cos A\sin\Theta'$$

gebracht werden, und durch Elimination von Θ' ferner zu der Gleichung

Digitized by Google

$$\sin\Theta_1 = n\sin A\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin\Theta^2} - \cos A\sin\Theta,$$

oder

$$\cos A\sin\Theta + \sin\Theta_1 = n\sin A\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin\Theta^2},$$

oder

$$(\cos A\sin\Theta + \sin\Theta_1)^2 = n^2\sin A^2 - \sin A^2\sin\Theta^2$$

führen, welche auch leicht auf die Form

$$n^2\sin A^2 = \sin\Theta^2 + \sin\Theta_1{}^2 + 2\cos A\sin\Theta\sin\Theta_1$$

gebracht wird. Also ist

$$n = \sqrt{\sin\Theta^2 + \left(\frac{\cos A\sin\Theta + \sin\Theta_1}{\sin A}\right)^2}$$

oder

$$n = \frac{\sqrt{\sin\Theta^2 + \sin\Theta_1{}^2 + 2\cos A\sin\Theta\sin\Theta_1}}{\sin A}.$$

Den Winkel A des Prismas kann man nach dem Obigen bekanntlich messen. Außerdem enthalten aber die vorhergehenden Ausdrücke von n noch die beiden unbekannten Winkel Θ und Θ_1. Nimmt man indeß die Winkel S und Σ, wozu man nach dem Obigen berechtigt ist, als bekannt an, so führen die dritte und fünfte der fünf Hauptgleichungen auf der Stelle zu der Gleichung

$$\Theta + \Theta_1 - (S+\Sigma) = A,$$

so daß also jetzt offenbar n bekannt sein würde, wenn nur noch einer der beiden Winkel Θ und Θ_1 bekannt wäre, und man müßte also einen dieser beiden Winkel, etwa den Winkel Θ, durch Reflexion nach einem dem im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen ganz ähnlichen Verfahren messen. Da aber diese Messung immer mißlich und mit Schwierigkeiten verbunden ist, so bedient man sich lieber des folgenden Verfahrens, welches uns der oben bewiesene Lehrsatz an die Hand giebt.

Weil nämlich nach dem Obigen

$$S + \Sigma = \Omega,\quad \Sigma = \Omega - S$$

ist, so kann, wenn nur der leuchtende Punkt, welcher die Strahlen aussendet, sehr weit entfernt ist, und daher der Winkel S als unmerklich oder verschwindend betrachtet werden darf, $\Sigma = \Omega$ gesetzt werden. Dreht man nun das Prisma auf der Ebene, auf welcher es aufgestellt worden ist, so herum, daß dem Augenscheine nach näherungsweise $\Theta = \Theta_1$ ist, der Winkel Ω sich also nach dem Obigen nahe bei seinem Minimum oder Maximum befindet, und setzt dann unter der Voraussetzung, daß $n > 1$ ist, worüber man gewiß in allen Fällen eine vorläufige genügende Kenntniß haben wird, die Drehung des Prismas in

Digitized by Google

dem Sinne fort, daß man, um mit dem Fernrohre des in dem Punkte S_1 aufgestellten Winkelmessers dem durch Refraction in dem Prisma gesehenen Bilde des leuchtenden Punktes S folgen zu können, dem Fernrohre eine solche Drehung geben muß, daß dadurch eine Verminderung des Winkels $\Sigma = \Omega$ bewirkt wird, so wird, da unter der gemachten Voraussetzung nach dem Obigen bekanntlich der Fall des Minimums stattfindet, immer endlich ein Zeitpunkt eintreten, wo man, um den durch Refraction in dem Prisma gesehenen Bilde des leuchtenden Punktes S mit dem Fernrohre folgen zu können, das letztere im entgegengesetzten Sinne, d. h. so drehen muß, daß dadurch eine Vergrößerung des Winkels $\Sigma = \Omega$ bewirkt wird. Sobald dieser Zeitpunkt eintritt, muß man Prisma und Fernrohr unverrückt stehen lassen, und bei dieser Lage des Fernrohrs den Winkel Σ auf dem Limbus des Winkelmessers ablesen, wodurch man den Werth dieses Winkels erhält, welchem das Minimum des Winkels Ω, und also nach dem Obigen die Bedingung $\Theta = \Theta_1$ entspricht. Wenn $n < 1$ ist, unter welcher Voraussetzung nach dem Obigen bekanntlich der Fall des Maximums stattfindet, so muß man das Prisma in dem Sinne zu drehen anfangen, daß man, um dem durch Refraction in dem Prisma gesehenen Bilde des leuchtenden Punktes S mit dem Fernrohre folgen zu können, dem letzteren eine solche Drehung geben muß, daß dadurch eine Vergrößerung des Winkels $\Sigma = \Omega$ bewirkt wird, wo dann immer endlich ein Zeitpunkt eintreten wird, wo man, um dem durch Refraction in dem Prisma gesehenen Bilde des leuchtenden Punktes S mit dem Fernrohre folgen zu können, das letztere im entgegengesetzten Sinne, d. h. so drehen muß, daß dadurch eine Verminderung des Winkels $\Sigma = \Omega$ bewirkt wird. Sobald dieser Zeitpunkt eintritt, muß man Prisma und Fernrohr unverrückt stehen lassen, und bei dieser Lage des Fernrohrs den Winkel Σ auf dem Limbus des Winkelmessers ablesen, wodurch man wieder den Werth dieses Winkels erhält, welchem das Maximum des Winkels Ω, und folglich nach dem Obigen die Bedingung $\Theta = \Theta_1$ entspricht. Im Allgemeinen pflegt man wohl zu sagen, daß man in dem Momente den Winkel Σ auf dem Limbus des in dem Punkte S_1 aufgestellten Winkelmessers ablesen müsse, wo die Lage des durch Refraction in dem Prisma gesehenen Bildes des leuchtenden Punktes S, und also auch die Lage des Fernrohrs des Winkelmessers, mit welchem man diesem Bilde fortwährend zu folgen sucht, *stationär* werde, wo dann das Prisma nach dem Obigen jederzeit eine solche Lage haben wird, daß die Bedingung $\Theta = \Theta_1$ erfüllt ist; und die Erfahrung hat gelehrt, daß sich Beobachtungen dieser Art mit großer Genauigkeit und Sicherheit anstellen lassen.

Nehmen wir nun an, daß der Winkel Σ auf die vorhergehende Weise bestimmt worden sei, und gehen zu unsern obigen Gleichungen zurück, so haben wir jetzt offenbar zwi-

Digitized by Google

schen den drei unbekannten Größen n, Θ, Θ_1 die drei folgenden Gleichungen:

$$n = \frac{\sqrt{\sin\Theta^2 + \sin\Theta_1^2 + 2\cos A \sin\Theta \sin\Theta_1}}{\sin A},$$

$$\Theta = \Theta_1,\ \Theta + \Theta_1 - (S+\Sigma) = A;$$

welche also zur Bestimmung der drei in Rede stehenden unbekannten Größen gerade hinreichend sind. Aus der ersten und zweiten Gleichung erhält man nämlich zuvörderst

$$n = \frac{\sin\Theta}{\sin A}\sqrt{2(1+\cos A)},$$

und folglich, weil nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$1 + \cos A = 2\cos\tfrac{1}{2}A^2$$

ist:

$$n = \frac{2\cos\frac{1}{2}A \sin\Theta}{\sin A},$$

also, weil

$$\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$$

ist:

$$n = \frac{\sin\Theta}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

Wegen der zweiten und dritten Gleichung ist aber

$$2\Theta - (S+\Sigma) = A, \text{ also } \Theta = \tfrac{1}{2}(A+S+\Sigma).$$

Also ist

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+S+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

welche Formel auch rücksichtlich der Leichtigkeit der Berechnung des Brechungsexponenten nichts zu wünschen übrig läßt.

Will man noch den Winkel S als verschwindend betrachten, — und es wird immer zweckmäßig und vortheilhaft sein, den leuchtenden Punkt so weit entfernt anzunehmen, daß man zu dieser Annahme berechtigt ist, — so wird

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

Nimmt man an, daß bei der Messung von A ein Fehler ΔA begangen, und also mittelst der vorhergehenden Formel auch n fehlerhaft bestimmt worden sei, so haben wir, wenn der Fehler von

$$n \text{ durch } \Delta_A n$$

bezeichnet wird, die Gleichung

$$n + \Delta_A n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma+\Delta A)}{\sin\frac{1}{2}(A+\Delta A)},$$

Digitized by Google

und folglich, wenn man von dieser Gleichung die Gleichung

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

mittelst welcher das fehlerhafte n bestimmt worden ist, subtrahirt:

$$\Delta_A n = \frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma+\Delta A) - \sin\frac{1}{2}(A+\Sigma)\sin\frac{1}{2}(A+\Delta A)}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(A+\Delta A)}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist

$$\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(A+\Sigma)\cos\tfrac{1}{2}\Delta A + \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(A+\Sigma)\sin\tfrac{1}{2}\Delta A\\ -&\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(A+\Sigma)\cos\tfrac{1}{2}\Delta A - \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(A+\Sigma)\sin\tfrac{1}{2}\Delta A\\ &= -\sin\tfrac{1}{2}\Sigma\sin\tfrac{1}{2}\Delta A,\end{aligned}$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\Delta_A n = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Sigma\sin\frac{1}{2}\Delta A}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(A+\Delta A)},$$

also

$$\frac{\Delta_A n}{\Delta A} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Sigma\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta A}{\frac{1}{2}\Delta A}}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(A+\Delta A)}.$$

Nähert sich nun ΔA der Null, so nähert sich offenbar

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+\Delta A)$$

der Gränze $\sin\frac{1}{2}A$, und

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta A}{\frac{1}{2}\Delta A}$$

nähert sich, wie wir schon oben im Allgemeinen gezeigt haben, der Einheit als Gränze. Also nähert sich

$$\frac{\Delta_A n}{\Delta A}$$

offenbar der Gränze

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Sigma}{\sin\frac{1}{2}A^2},$$

und für der Null sehr nahe kommende Werthe des Fehlers ΔA, d. h. unter Voraussetzung sehr sorgfältiger und guter Beobachtungen, wird man folglich ohne merklichen Fehler näherungsweise

$$\frac{\Delta_A n}{\Delta A} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Sigma}{\sin\frac{1}{2}A^2},$$

also

$$\Delta_A n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Sigma}{\sin\frac{1}{2}A^2}\Delta A$$

setzen können.

Digitized by Google

Nimmt man ferner Σ als fehlerhaft bestimmt an, und bezeichnet den Fehler durch $\Delta\Sigma$, den entsprechenden Fehler von n aber durch $\Delta_\Sigma n$, so hat man die Gleichung

$$n + \Delta_\Sigma n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma+\Delta\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

also, wenn man wieder von dieser Gleichung die Gleichung

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

mittelst welcher das fehlerhafte n bestimmt worden ist, subtrahirt:

$$\Delta_\Sigma n = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma+\Delta\Sigma) - \sin\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Zerlegung:

$$\Delta_\Sigma n = \frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta\Sigma\cos\{\frac{1}{2}(A+\Sigma)+\frac{1}{2}\Delta\Sigma\}}{\sin\frac{1}{2}A},$$

folglich

$$\frac{\Delta_\Sigma n}{\Delta\Sigma} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\Sigma}{\frac{1}{2}\Delta\Sigma}\cos\{\frac{1}{2}(A+\Sigma)+\frac{1}{2}\Delta\Sigma\}}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

Läßt man nun wieder $\Delta\Sigma$ sich der Null nähern, so findet man durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorher, daß

$$\frac{\Delta_\Sigma n}{\Delta\Sigma}$$

sich der Gränze

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A}$$

nähert, also für der Null sehr nahe kommende Werthe des Fehlers $\Delta\Sigma$, d. h. unter Voraussetzung sehr sorgfältiger und guter Beobachtungen, ohne merklichen Fehler näherungsweise

$$\frac{\Delta_\Sigma n}{\Delta\Sigma} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A},$$

folglich

$$\Delta_\Sigma n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{\sin\frac{1}{2}A}\Delta\Sigma$$

gesetzt werden kann. Weil nach dem Obigen

$$\sin\frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\Sigma)}{n}$$

ist, so ist auch

$$\Delta_\Sigma n = \frac{1}{2}n\cot\frac{1}{2}(A+\Sigma)\Delta\Sigma.$$

Aus der Formel

$$\Delta_A n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Sigma}{\sin\frac{1}{2}A^2}\Delta A$$

Digitized by Google

ergiebt sich, daß ein Fehler in A unter Voraussetzung gleicher Werthe von Σ einen desto geringern Einfluß auf n ausübt, je größer $\sin \frac{1}{2} A$ ist, und daß man jedenfalls die Fälle, wo $\sin \frac{1}{2} A$ sehr klein wird, möglichst zu vermeiden suchen muß.

Aus der Formel

$$\Delta_{\Sigma} n = \frac{1}{2} n \cot \frac{1}{2} (A + \Sigma) \Delta \Sigma$$

ergiebt sich, daß ein Fehler in Σ einen desto geringern Einfluß auf n ausübt, je kleiner $\cot \frac{1}{2} (A + \Sigma)$ ist, und daß man jedenfalls die Fälle, wo $\cot \frac{1}{2} (A + \Sigma)$ sehr groß wird, möglichst zu vermeiden suchen muß.

Jenachdem man nach den besondern Umständen, unter welchen die Beobachtungen angestellt werden, die größten Fehler in A oder in Σ zu vermuthen sich für berechtigt halten darf, wird man sich an die erste oder an die zweite der beiden vorhergehenden Regeln halten. Glaubt man den Bestimmungen von A und Σ gleiche Genauigkeit beizulegen berechtigt zu sein, so muß man die Umstände, unter denen die Beobachtungen angestellt werden, so zu wählen suchen, daß den durch die beiden vorhergehenden Regeln vorgeschriebenen Bedingungen so viel als irgend möglich genügt wird.

§. 49.

Ich will nun noch die folgende Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten mittelst prismatisch geformter Körper entwickeln, welche man, wie es mir scheint, namentlich dann zuweilen mit Vortheil wird in Anwendung bringen können, wenn man im Besitz eines guten Nivellirinstruments mit Fernrohr und einer dazu gehörenden mit einer genauen Theilung versehenen Nivellirlatte ist, an welcher letzteren sich aber nicht wie gewöhnlich nur eine, sondern mindestens drei ganz kleine Nivellirtäfelchen, die auch sämmtlich der Theilung der Latte gehörig entsprechende Nonien tragen, verschieben lassen müssen, wobei wir zugleich annehmen wollen, daß das Instrument vor dem Gebrauche in allen seinen Theilen sorgfältig berichtigt worden sei, wozu man in meiner Geodäsie (Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt. Zweiter Theil. Zweite Abtheilung). Leipzig. 1842. S. 355. alle erforderliche Anleitung findet.

Vor dem Objectivglase des Fernrohrs dieses Instruments befestige man eine Glastafel so, daß deren vordere völlig ebene Gränzfläche auf der Visirlinie des Fernrohrs so genau als irgend möglich senkrecht steht, und lasse diese Glastafel in der Mitte mit einem Loche versehen, welches jedoch nur so groß sein darf, daß es noch von den Seitenflächen des bei den Versuchen anzuwendenden Prismas, die den sogenannten brechenden,

Digitized by Google

in den vorhergehenden Paragraphen immer durch A bezeichneten Winkel einschließen, verdeckt werden kann, wobei wir jedoch nicht unbemerkt lassen dürfen, daß es auf der andern Seite auch zweckmäßig sein wird, dieses Loch mit gehöriger Berücksichtigung aller auch aus dem Folgenden sich noch von selbst ergebenden Umstände immer so groß als möglich zu machen. Ob die vordere Gränzfläche der Glastafel auf der bei der Berichtigung des Instruments natürlich gehörig centrirten Visirlinie des Fernrohrs senkrecht steht, kann man dadurch prüfen, daß man die Visirlinie genau auf einen entfernten Punkt richtet, hierauf auf der Glastafel mit etwas Wachs eine zweite Glastafel mit genau einander parallelen Begränzungsebenen, in deren Besitz man sich also vorher setzen muß, so befestigt, daß von derselben das Loch verdeckt wird, dann das, wie schon erwähnt, vorher gehörig centrirte Fernrohr auf seinen Lagern rings herum dreht, und untersucht, ob dabei die Visirlinie niemals den Punkt, auf welchen sie eingestellt worden ist, verläßt. Nachdem man diese Prüfung vorgenommen hat, stelle man das Instrument und in einer möglichst großen Entfernung von demselben genau in vertikaler Lage die Nivellirlatte auf, bringe die Visirlinie des Fernrohrs mittelst der Libelle auf bekannte Weise in horizontale Lage, richte die Visirlinie auf die Latte, lasse an derselben das mittlere Täfelchen so lange verschieben, bis sein Mittelpunkt genau von der Visirlinie getroffen wird, und lese den Nonius des Täfelchens, dessen Nullpunkt und zugleich auch den Mittelpunkt der Tafel wir durch I bezeichnen wollen, ab. Nun befestige man das Prisma so auf der Glastafel, daß der Mittelpunkt einer der beiden den brechenden Winkel einschließenden Seitenflächen in die Visirlinie des Fernrohrs fällt, drehe es, zuerst etwa den brechenden Winkel nach unten gekehrt, so lange sanft um die Visirlinie des Fernrohrs herum, bis der Mittelpunkt des an der Latte gleichzeitig verschobenen obern Täfelchens genau mit dem Mittelpunkte I des ersten Täfelchens coincidirt, und lese in dieser Lage den Nonius des Täfelchens, dessen Nullpunkt und zugleich den Mittelpunkt der Tafel wir durch II bezeichnen wollen, ab. Ferner nehme man dieselbe Operation mit nach oben gekehrtem brechenden Winkel unter Benutzung des untern Täfelchens vor, und lese wieder, wenn deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte I des ersten Täfelchens coincidirt, den Nonius des Täfelchens, dessen Nullpunkt und zugleich den Mittelpunkt der Tafel wir durch III bezeichnen wollen, ab. Endlich messe man die Entfernung des Objectivglases des Fernrohrs von der Nivellirlatte, wobei wir annehmen, daß die Glastafel ganz nahe vor dem Objectivglase des Fernrohrs befestigt worden, und das bei den Versuchen angewandte Prisma nur klein ist.

Zur Erläuterung dieses ganzen Verfahrens dient Fig. 49., wo OH die horizontale Visirlinie und LL die vertikale Nivellirlatte ist. Die beiden Lagen, in welche das Prisma bei den Versuchen gebracht wird, sind durch ABC und A′B′C′ bezeich-

Digitized by Google

net worden, und H, K, K' sind die Mittelpunkte I, II, III der drei Täfelchen, wonach die Figur nun gewiß ganz durch sich selbst verständlich sein wird. Die Größe der Linien HK und HK' kann offenbar aus den Ablesungen der drei Nonien leicht abgeleitet werden, und die Linie JH wird man offenbar unter den gemachten Voraussetzungen ohne merklichen Fehler der gemessenen Entfernung des Objectivglases von der Nivellirlatte gleich setzen können, würde jedoch offenbar, wenn man es für nöthig halten sollte, auch leicht die Größe dieser Linie selbst durch geeignete Messungen zu bestimmen im Stande sein. Auf der Stelle wird aber in die Augen fallen, daß die Linien HK und HK', wenn die sämmtlichen Bedingungen, an welche wir unsere vorhergehenden Betrachtungen geknüpft haben, mit völliger Genauigkeit erfüllt sind, genau einander gleich sein müssen, und man wird also auch umgekehrt die Gleichheit oder Ungleichheit dieser beiden Linien als ein Criterium zu betrachten berechtigt sein, ob die in Rede stehenden Bedingungen vollständig erfüllt sind oder nicht.

Für die erste Lage ABC des Prismas ist der Einfallswinkel in der Luft offenbar

$$\begin{aligned} 90° - \angle CJK &= 90° - (\angle CJH - \angle HJK) \\ &= 90° - \angle AJG + \angle HJK \\ &= 90° - (90° - \angle BAC) + \angle HJK \\ &= \angle BAC + \angle HJK, \end{aligned}$$

und der Brechungswinkel im Prisma ist, wie leicht erhellen wird, dem Winkel BAC gleich. Bezeichnen wir also den Brechungsexponenten durch n, so ist

$$n = \frac{\sin(\angle BAC + \angle HJK)}{\sin \angle BAC},$$

und kann folglich gefunden werden, weil man $\angle BAC$ als bekannt anzunehmen berechtigt ist, und $\angle HJK$ mittelst der Formel

$$\text{tang} \angle HJK = \frac{HK}{JH}$$

aus den bekannten Linien JH und HK leicht berechnet werden kann.

Für die zweite Lage A'B'C' des Prismas ist natürlich ganz eben so

$$n = \frac{\sin(\angle BAC + \angle HJK')}{\sin \angle BAC},$$

wo $\angle HJK'$ mittelst der Formel

$$\text{tang} \angle HJK' = \frac{HK'}{JH}$$

aus den bekannten Linien JH und HK' leicht berechnet werden kann.

Digitized by Google

Hierbei ist vorausgesetzt worden, daß wenigstens sehr nahe $HK = HK'$ sei, wobei man aber, wenn nicht ganz genau $HK = HK'$ ist, doch immer gut thun wird, n mittelst der vorhergehenden Formeln doppelt zu berechnen, und aus den beiden gefundenen Resultaten das arithmetische Mittel zu nehmen. Sollten aber HK und HK' merklich von einander verschieden sein, so daß man den Unterschied zu vernachlässigen sich nicht mehr für berechtigt halten dürfte, so müßte man bei der Berechnung von n einen andern Weg einschlagen, wie nun gezeigt werden soll.

Die Beobachtungen selbst sind von den vorhergehenden gar nicht verschieden, und zur Erläuterung dient Fig. 50., die nach dem Vorhergehenden ganz durch sich selbst verständlich sein wird. Auch ist die Bedeutung der die Einfallswinkel und Brechungswinkel bei den Punkten G, J, J' bezeichnenden Symbole $\Omega, \Omega_1, \Theta, \Theta_1, \Theta', \Theta_1'$ aus der Figur selbst ersichtlich. Die Bedeutung einiger andern Symbole wird nachher erklärt werden. Bezeichnet nun wieder n den zu bestimmenden Brechungsexponenten, so haben wir zuvörderst nach dem Grundgesetze der Brechung die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin\Omega = n \sin\Omega_1,$$
$$\sin\Theta = n \sin\Theta_1,$$
$$\sin\Theta' = n \sin\Theta_1'.$$

Bezeichnen wir aber den Winkel BAC oder B'A'C' wieder durch A, so erhellet aus den Dreiecken AGJ und A'GJ' leicht die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$A + (90° - \Omega_1) + (90° - \Theta_1) = 180°,$$
$$A + (90° + \Omega_1) + (90° - \Theta_1') = 180°;$$

also

$$A = \Theta_1 + \Omega_1, \quad A = \Theta_1' - \Omega_1$$

oder

$$\Theta_1 = A - \Omega_1, \quad \Theta_1' = A + \Omega_1;$$

wodurch die drei ersten Gleichungen die folgende Form erhalten:

$$\sin\Omega = n \sin\Omega_1,$$
$$\sin\Theta = n \sin(A - \Omega_1),$$
$$\sin\Theta' = n \sin(A + \Omega_1).$$

Bezeichnen wir nun die gemessene Entfernung des Objectivglases von der Latte durch E, die Längen der Linien HK und HK', welche sich aus den bei H, K, K' an den Nonien I, II, III gemachten Ablesungen leicht ableiten lassen, durch N und N', und bestimmen die spitzen Winkel T und T' mittelst der beiden Gleichungen

$$\text{tang}\,T = \frac{N}{E}, \quad \text{tang}\,T' = \frac{N'}{E};$$

Digitized by Google

so wird, wenn man sich nur durch die Punkte J und J' Horizontalen gezogen, und den Strahl JK rückwärts bis zu seinem Durchschnittspunkte mit der Horizontalen OH verlängert denkt, leicht die Richtigkeit der Gleichungen

$$(\Omega - \Omega_1) + (\Theta - \Theta_1) + (180° - \mathfrak{T}) = 180°,$$
$$(\Omega - \Omega_1) + \{(90° - \Theta') + (90° + \Theta_1')\} + \mathfrak{T} = 180°$$

erhellen, aus denen sich ferner leicht die beiden Gleichungen

$$(\Omega - \Omega_1) + (\Theta - \Theta_1) - \mathfrak{T} = 0,$$
$$(\Omega - \Omega_1) - (\Theta' - \Theta_1') + \mathfrak{T}' = 0$$

ergeben, wobei jedoch bemerkt werden muß, daß diese Gleichungen streng genommen nur näherungsweise richtig sind, und nur dann mit völliger Strenge richtig sein würden, wenn man in die Formeln

$$\text{tang}\,\mathfrak{T} = \frac{N}{E}, \quad \text{tang}\,\mathfrak{T}' = \frac{N'}{E}$$

für E die Entfernungen der Punkte J und J' von der Latte einführte, was aber bei einer zweckmäßigen, aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Anordnung der Versuche in den meisten Fällen nicht nöthig sein wird, da die bei der in Rede stehenden Näherung bleibenden sehr kleinen Fehler sich werden als verschwindend betrachten lassen. Weil nun aber nach dem Obigen

$$\Theta_1 + \Omega_1 = A, \quad \Theta_1' - \Omega_1 = A$$

ist, so werden die beiden obigen Gleichungen

$$\Omega + \Theta - A - \mathfrak{T} = 0, \quad \Omega - \Theta' + A + \mathfrak{T}' = 0;$$

also

$$\Theta = A + \mathfrak{T} - \Omega, \quad \Theta' = A + \mathfrak{T}' + \Omega.$$

Aus den beiden aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\sin\Theta = n\sin(A - \Omega_1), \quad \sin\Theta' = n\sin(A + \Omega_1)$$

erhält man nun:

$$\sin\Theta = n\sin A\cos\Omega_1 - n\cos A\sin\Omega_1,$$
$$\sin\Theta' = n\sin A\cos\Omega_1 + n\cos A\sin\Omega_1;$$

also durch Subtraction

$$\sin\Theta' - \sin\Theta = 2n\cos A\sin\Omega_1,$$

und folglich wegen der Gleichung

$$\sin\Omega = n\sin\Omega_1$$

und nach den vorher für Θ und Θ' gefundenen Ausdrücken:

$$\sin(A + \mathfrak{T}' + \Omega) - \sin(A + \mathfrak{T} - \Omega) = 2\cos A\sin\Omega,$$

welche Gleichung nun bloß noch die unbekannte Größe Ω enthält. Zerlegt man die Differenz auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in Factoren, so ergiebt sich

$$\cos\{A + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}')\}\sin\{\Omega - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T} - \mathfrak{T}')\} = \cos A\sin\Omega,$$

Digitized by Google

also

$$\frac{\sin\{\Omega-\frac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}}{\sin\Omega}=\frac{\cos A}{\cos\{A+\frac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\}},$$

folglich

$$\frac{\sin\Omega+\sin\{\Omega-\frac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}}{\sin\Omega-\sin\{\Omega-\frac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}}=\frac{\cos\{A+\frac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\}+\cos A}{\cos\{A+\frac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\}-\cos A},$$

woraus man mittelst bekannter Zerlegungen

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\sin\{\Omega-\frac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}}{\sin\frac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\cos\{\Omega-\frac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}}$$
$$=-\frac{\cos\frac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\cos\{A+\frac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\}}{\sin\frac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\sin\{A+\frac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\}},$$

d. i.

$$\cot\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\tan\{\Omega-\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}$$
$$=-\cot\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\cot\{A+\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\},$$

und folglich

$$\tan\{\Omega-\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}$$
$$=-\tan\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\cot\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\cot\{A+\tfrac{1}{4}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\}$$

erhält, mittelst welcher Formel der Winkel Ω ohne alle Schwierigkeit berechnet werden kann.

Hat man Ω, so findet man Θ und Θ' mittelst der Formeln

$$\Theta=A+\mathfrak{T}-\Omega,\quad \Theta'=A+\mathfrak{T}'+\Omega;$$

und weil nun bekanntlich

$$\sin\Theta=n\sin A\cos\Omega_1-n\cos A\sin\Omega_1,$$
$$\sin\Theta'=n\sin A\cos\Omega_1+n\cos A\sin\Omega_1$$

ist, so ist

$$\sin\Theta+\sin\Theta'=2n\sin A\cos\Omega_1,$$
$$\sin\Theta-\sin\Theta'=-2n\cos A\sin\Omega_1;$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')=n\sin A\cos\Omega_1,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')=-n\cos A\sin\Omega_1;$$

folglich

$$\cot A\tan\Omega_1=-\tan\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')\cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta'),$$

d. i.

$$\tan\Omega_1=-\tan A\tan\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')\cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta')$$

oder

$$\tan\Omega_1=-\tan A\frac{\tan\frac{1}{2}(\Theta-\Theta')}{\tan\frac{1}{2}(\Theta+\Theta')},$$

mittelst welcher Formel Ω_1 leicht berechnet werden kann. Den gesuchten Brechungsexponenten n findet man nun aber am leichtesten mittelst der Formel

Digitized by Google

$$n = \frac{\sin \Omega}{\sin \Omega_1},$$

könnte indeß auch leicht aus dem Obigen noch mehrere andere eine einfache Berechnung dieser gesuchten Größe gestattende Formeln ableiten.

Die vorhergehenden Betrachtungen sind nur an den in Fig. 50. dargestellten speciellen Fall angeschlossen worden; es könnte aber rücksichtlich der Lage des Prismas offenbar auch noch der in Fig. 51. angedeutete Fall eintreten; jedoch erfordert dieser Fall keine ganz neue Betrachtung und läßt sich auf den vorhergehenden zurückführen, weil er aus diesem in Fig. 50. dargestellten Falle, wie sogleich in die Augen fällt, hervorgeht, wenn man sich die Figur um OH herumgedreht denkt, und dann die Lage ABC des Prismas, welche vorher die erste war, zur zweiten, die Lage A'B'C', welche vorher die zweite war, zur ersten Lage macht, also in den sämmtlichen vorhergehenden Formeln für Θ, Θ_1, $\mathfrak{T}$ respective Θ', Θ_1', $\mathfrak{T}'$, und für Θ', Θ_1', $\mathfrak{T}'$ respective Θ, Θ_1, $\mathfrak{T}$ setzt. Hiernach ergeben sich nun aus den vorhergehenden zur Berechnung von n erforderlichen Formeln:

$$\operatorname{tang}\{\Omega - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\} = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\cot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\cot\{A+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\};$$

$$\Theta = A + \mathfrak{T} - \Omega, \quad \Theta' = A + \mathfrak{T}' + \Omega;$$

$$\operatorname{tang}\Omega_1 = -\operatorname{tang}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')\cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta');$$

$$n = \frac{\sin \Omega}{\sin \Omega_1}$$

die folgenden Formeln:

$$\operatorname{tang}\{\Omega + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\cot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\cot\{A+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\};$$

$$\Theta = A + \mathfrak{T} + \Omega, \quad \Theta' = A + \mathfrak{T}' - \Omega;$$

$$\operatorname{tang}\Omega_1 = \operatorname{tang}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')\cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta');$$

$$n = \frac{\sin \Omega}{\sin \Omega_1};$$

welche auch auf folgende Art dargestellt werden können:

$$\operatorname{tang}\{(-\Omega) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\} = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\cot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\cot\{A+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\};$$

$$\Theta = A + \mathfrak{T} - (-\Omega), \quad \Theta' = A + \mathfrak{T}' + (-\Omega);$$

$$\operatorname{tang}(-\Omega_1) = -\operatorname{tang}A\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')\cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta');$$

$$n = \frac{\sin(-\Omega)}{\sin(-\Omega_1)}.$$

Vergleicht man aber diese dem in Fig. 51. dargestellten Falle entsprechenden Formeln mit den ersteren dem in Fig. 50. dargestellten Falle entsprechenden Formeln, so übersieht man auf der Stelle, daß jene aus diesen hervorgehen, wenn man $-\Omega$, $-\Omega_1$ für Ω, Ω_1 setzt. Betrachtet man daher die Größen Ω, Ω_1 nicht mehr wie bisher stets als positiv, sondern vielmehr

Digitized by Google

in dem in Fig. 50. dargestellten Falle als positiv, in dem in Fig. 51. dargestellten Falle dagegen als negativ, so hat man nach dem Vorhergehenden zur Berechnung von n die folgenden ganz allgemein für beide Fälle gültigen Formeln:

$$\text{tang}\{\Omega - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\}$$
$$= -\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')\,\cot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\,\cot\{A+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\};$$
$$\Theta = A + \mathfrak{T} - \Omega,\quad \Theta' = A + \mathfrak{T}' + \Omega;$$
$$\text{tang}\,\Omega_1 = -\,\text{tang}\,A\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(\Theta-\Theta')\,\cot\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta');$$
$$n = \frac{\sin\Omega}{\sin\Omega_1};$$

und die Rechnung nach diesen Formeln läßt sich sehr leicht und mit aller nöthigen Genauigkeit ganz mit Logarithmen führen.

Einen Theodoliten braucht man bei dieser Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten gar nicht, und kann natürlich nöthigenfalls das Nivellirinstrument auch durch ein bloßes Fernrohr ersetzen.

Neuntes Kapitel.

Von der mit jeder Brechung verbundenen Farbenzerstreuung oder Dispersion des Lichts.

§. 50.

Mit jeder Brechung ist eine Zerlegung des weißen Lichts in mehrere farbige Strahlen verbunden, so daß nämlich der eintretende weiße Strahl nach der Brechung nicht mehr einfach bleibt, sondern als in mehrere farbige Strahlen zerspalten oder zerstreuet sich darstellt. Größerer Einfachheit wegen haben wir von dieser höchst wichtigen, auf die ganze Optik einen sehr großen Einfluß habenden Erscheinung, welche eine der Entdeckungen ist, durch die Newton seinen Namen unsterblich gemacht hat, und die Dispersion des Lichts genannt wird, im vorhergehenden Kapitel vorläufig ganz abgesehen, was auch, da diese Farbenzerstreuung im Ganzen nur gering ist und besonders erst bei mehreren auf einander folgenden Brechungen desselben Strahls merklicher wird, als erste Näherung zulässig war, müssen nun aber dieselbe ausführlich und nach allen ihren Einzelnheiten betrachten, wobei es hauptsächlich auf eine genaue Beschreibung der Versuche ankommen wird, durch welche sich diese Erscheinung am besten deutlich machen läßt.

Digitized by Google

§. 51.

Das vorzüglichste und einfachste Hülfsmittel zur zweckmäßigen Anstellung dieser Versuche ist ein gewöhnliches dreiseitiges Prisma von Glas. Läßt man durch ein kleines rundes Loch in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers in dasselbe einen Sonnenstrahl treten, entweder unmittelbar, oder nachdem man durch Reflexion von einem außerhalb des Zimmers vor dem Loche in dem Fensterladen aufgestellten ebenen Metallspiegel dem eintretenden Strahle eine für den Versuch vortheilhaftere Richtung gegeben hat, so bemerkt man, wie sich von selbst versteht, auf einer dem Fensterladen gegenüber aufgestellten weißen Tafel ein kleines rundes weißes Sonnenbild. Stellt man nun aber in dem verfinsterten Zimmer vor dem in dem Fensterladen befindlichen Loche ein gewöhnliches dreiseitiges Prisma von Glas so auf, daß die parallelen Kanten seiner Seitenflächen dem Fensterladen parallel sind und sich in horizontaler Lage befinden, und der eintretende Strahl genöthigt wird, durch das Prisma hindurch zu gehen, so wird nicht nur das kleine weiße Sonnenbild auf der Tafel augenblicklich aus seiner Stelle gerückt, und zwar weiter nach oben oder weiter nach unten hin, jenachdem man den brechenden Winkel des Prismas abwärts oder aufwärts kehrt, sondern dasselbe stellt sich zugleich dem Beobachter in die Länge gezogen und mit mehreren sehr schönen und glänzenden Farben gefärbt dar. Die Art der Anstellung dieses wichtigen Versuchs näher zu erläutern, dient Fig. 52. In dem länglichen Sonnenbilde oder dem sogenannten Spectrum unterscheidet man aber deutlich sieben Hauptfarben, welche in der Ordnung Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett auf einander folgen, und zwar so, daß das Roth immer der Stelle zugekehrt ist, wo das Sonnenbild erscheinen würde, wenn das eintretende Licht nicht durch das Prisma gegangen wäre, so daß also das Roth unten und das Violett oben, oder das Roth oben und das Violett unten liegt, jenachdem der brechende Winkel des Prismas nach unten oder nach oben hin gekehrt ist.

Aus diesem merkwürdigen Versuche schloß Newton, und alle gründlichen Physiker stimmen ihm darin bei, daß jeder weiße Lichtstrahl nicht einfach, sondern vielmehr aus sieben farbigen Strahlen von verschiedener Brechbarkeit, so daß nämlich jedem dieser farbigen Strahlen ein besonderes Brechungsverhältniß zukommt, zusammengesetzt sei, und durch die Brechung jederzeit in diese sieben farbigen Strahlen zerlegt werde. Die rothen Strahlen sind am wenigsten, die violetten am meisten brechbar, oder für den Uebergang aus Luft in Glas haben die ersteren das kleinste, die letzteren das größte Brechungsverhältniß; den ersteren entspricht der kleinste, den letzteren der größte Brechungsexponent. Eigentlich sollte man im Allgemeinen sagen, für die rothen Strahlen ist der Brechungsexponent am

Digitized by Google

wenigsten, für die violetten am meisten von der Einheit verschieden.

Hierdurch stellt sich nun aber auch zugleich die Nothwendigkeit heraus, daß man bei den im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Methoden zur Bestimmung der Brechungsverhältnisse oder der Brechungsexponenten nicht, wie in diesem Kapitel der Einfachheit wegen vorläufig geschehen ist, den eintretenden weißen, nach dem Vorhergehenden also zusammengesetzten, Lichtstrahl nach der Brechung nicht mehr als weißen Lichtstrahl auffassen darf, sondern vielmehr die sieben farbigen Strahlen, in welche derselbe bei der Brechung zerlegt wird, gehörig von einander unterscheiden, also auch bei den betreffenden Versuchen immer nur einen bestimmten dieser sieben farbigen Strahlen in's Auge fassen, und für jeden einzelnen farbigen Strahl das Brechungsverhältniß oder den Brechungsexponenten besonders bestimmen muß, was freilich mit Schwierigkeiten verknüpft, aber durch eine neuere merkwürdige Entdeckung Fraunhofer's, von welcher am Ende dieses Kapitels weiter die Rede sein wird, wesentlich erleichtert, und dadurch zugleich, was natürlich die Hauptsache ist, die Möglichkeit herbeigeführt worden ist, diesen Messungen alle erwünschte und für weitere auf dieselben zu gründende Untersuchungen erforderliche Genauigkeit zu verleihen. Es erhält also hierdurch jetzt zugleich die im vorhergehenden Kapitel gegebene Darstellung eine sehr wichtige und nothwendige Vervollständigung, die sich ihr früher ohne zu große Verwickelung nicht wohl geben ließ.

Eine Hauptschwierigkeit dieser Messungen wird dadurch herbeigeführt, daß in dem prismatischen Farbenbilde die Farben nicht scharf von einander geschieden sind, sondern da, wo die einzelnen Farben sich berühren, allmählich in einander verlaufen oder verwaschen sind, was auch sogleich vollständig erklärlich wird, wenn man nur überlegt, daß von jedem einzelnen der sieben farbigen Strahlen ein besonderes kleines rundes Sonnenbild von gleicher Farbe auf der Tafel gebildet wird, und diese einzelnen Sonnenbilder nun in einander übergreifen, worauf auch durch Fig. 52. hingedeutet worden ist.

Nach dieser Vorbemerkung werden nun auch die folgenden Angaben der Brechungsexponenten für die einzelnen farbigen Strahlen nach Newton, unter Voraussetzung des Uebergangs aus Luft in Glas, sogleich völlig verständlich sein:

Roth:	1,5400	bis	1,5425;
Orange:	1,5425	=	1,5440;
Gelb:	1,5440	=	1,5467;
Grün:	1,5467	=	1,5500;
Blau:	1,5500	=	1,5533;
Indigo:	1,5533	=	1,5555;
Violett:	1,5555	=	1,5600.

Digitized by Google

Die mittleren Werthe sind:

Roth	1,5413;
Orange . .	1,5433;
Gelb	1,5454;
Grün . . .	1,5484;
Blau	1,5517;
Indigo . . .	1,5544;
Violett . . .	1,5578.

Genauere Angaben nach Fraunhofer werden weiter unten vorkommen.

Die grünen Strahlen sind die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit; man pflegt aber darunter noch häufiger die gelben Strahlen zu verstehen, weil das Licht nach der Seite des Rothen hin weit stärker ist als nach der Seite des Violetten hin, so daß also die gelben Strahlen in Bezug auf die Lichtstärke oder die Erleuchtungskraft, wenn auch nicht in Bezug auf ihre Lage im prismatischen Farbenbilde, die mittleren sind.

Die Breite der einzelnen Farben im prismatischen Farbenbilde ist nicht für alle Farben dieselbe, und verhält sich, wenn man das ganze Spectrum sich in 360 gleiche Theile getheilt denkt, wie die folgenden Zahlen zu einander:

Roth	45
Orange . . .	27
Gelb	48
Grün . . .	60
Blau	60
Indigo . . .	40
Violett . . .	80
	360

oder, wenn man die Länge des ganzen Spectrums als Einheit annimmt, wie die folgenden aus den vorhergehenden Zahlen, indem man dieselben sämmtlich durch 360 dividirt hat, abgeleiteten Brüche:

Roth	0,12;
Orange . . .	0,08;
Gelb	0,13;
Grün	0,17;
Blau	0,17;
Indigo . . .	0,11;
Violett . . .	0,22;
	1,00

§. 52.

Wenn es wahr ist, daß das weiße Licht sich in sieben Strahlen von verschiedener Farbe zerlegen läßt, so muß sich

Digitized by Google

umgekehrt das weiße Licht auch wieder aus diesen sieben farbigen Strahlen zusammensetzen lassen, was durch verschiedene Versuche nachgewiesen werden kann.

Läßt man das prismatische Farbenbild auf einen sphärischen Hohlspiegel fallen, und concentrirt auf bekannte Weise durch Reflexion von demselben die sieben farbigen Strahlen wieder in einem Punkte, so erscheint auf einer in diesem Punkte aufgestellten weißen Tafel ein glänzendes weißes Sonnenbild. Stellt man aber die Tafel nicht genau in dem in Rede stehenden Punkte auf, sondern bringt die Tafel dem Hohlspiegel näher oder entfernt sie weiter von demselben, so erscheint das Farbenbild wieder, und man erblickt die Farben im ersten Falle in derselben Ordnung wie auf dem Hohlspiegel, im zweiten Falle in umgekehrter Ordnung, eine Erscheinung, die sich ein Jeder leicht selbst zu erklären im Stande sein wird, wenn er nur überlegt, daß die von dem Hohlspiegel reflectirten Strahlen hinter dem Vereinigungspunkte divergirend fortgehen. Man kann in dem Vereinigungspunkte der von dem Hohlspiegel reflectirten Strahlen statt der weißen Tafel auch einen Planspiegel aufstellen, und die von demselben zum zweiten Male reflectirten Strahlen mit einer weißen Tafel auffangen, wo sich denn auf dem Planspiegel selbst jederzeit ein weißes Sonnenbild, auf der Tafel aber wieder das prismatische Farbenbild zeigen wird.

Statt mittelst eines sphärischen Hohlspiegels kann man die farbigen Strahlen auch mittelst einer Sammellinse in einem Punkte concentriren, was aber hier noch nicht verständlich sein kann, und erst in den folgenden Kapiteln seine vollständige Erläuterung erhalten wird.

Wenn man das durch das Prisma **A** (Fig. 53.) hervorgebrachte prismatische Farbenbild **MN** durch ein zweites Prisma **B** betrachtet, und dabei diesem letzteren Prisma, was sich leicht nach einigem Probiren erreichen läßt, die Lage giebt, welche dasselbe haben müßte, wenn das von ihm durch einen auffallenden Sonnenstrahl hervorgebrachte prismatische Farbenbild mit dem Farbenbilde **MN** zusammenfallen sollte, so erblickt man ein rundes weißes Bild **S** des Spectrums **MN**, und der Eindruck, den die aus dem Prisma **B** in das Auge des Beobachters tretenden farbigen Strahlen in ihrer Vereinigung mit einander auf das Auge machen, ist also dem von dem weißen Sonnenlichte hervorgebrachten Eindrucke völlig gleich.

Legt man zwei aus derselben Glasart gearbeitete Prismen, welche genau denselben brechenden Winkel haben, wie Fig. 54. zeigt, nahe an einander, so daß ihre fast zur Berührung kommenden Seitenflächen einander parallel sind, die brechenden Winkel aber eine entgegengesetzte Lage haben, und läßt einen Sonnenstrahl durch dieselben hindurch treten, so zeigt sich das austretende Licht allemal weiß, was sich ein Jeder leicht selbst zu erklären wissen wird.

Digitized by Google

§. 53.

Da wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, daß durch die Vereinigung oder Mischung aller sieben farbigen Strahlen mit einander sich weißes Licht ergiebt, so drängt sich uns ganz natürlich und ganz von selbst die Frage auf, was für Licht durch die Vereinigung oder Mischung nicht aller, sondern nur einer bestimmten Anzahl farbiger Strahlen mit einander entsteht. Um die Versuche hierüber zweckmäßig anzustellen, läßt man das prismatische Farbenbild auf eine Tafel fallen, in welcher über einander eine größere Anzahl von Spalten angebracht sind, die durch Schieber beliebig geöffnet und geschlossen werden können, wodurch die Möglichkeit dargeboten wird, durch diese Spalten, wenn die betreffenden Schieber geöffnet sind, nur bestimmte farbige Strahlen treten zu lassen, die man dann hinter der Tafel mit einem Sammelspiegel (§. 38.)*) auffangen, wieder mit einander vereinigen, und das Resultat der Vereinigung auf einer in dem Vereinigungspunkte aufgestellten weißen Tafel untersuchen kann.

Auf diese Weise findet man, daß aus der Vermischung von Roth und Gelb, Gelb und Blau, Blau und Roth, beziehungsweise Orange, Grün, Violett entsteht. Aus der Vereinigung von Grün und Orange geht ein blasses Gelb, aus Grün und Violett geht Blau hervor.

Wenn man die sieben Hauptfarben des prismatischen Farbenbildes durch A, B, C, D, E, F, G bezeichnet, und aus denselben zwei beliebige Gruppen, z. B. die Gruppen A, C, D, G und B, E, F, bildet, so heißen die beiden aus der Vereinigung oder Mischung von A, C, D, G und B, E, F mit einander hervorgehenden Farben Ergänzungsfarben oder Complementärfarben von einander; denn es ist klar, daß man durch eine neue Vereinigung der beiden auf die vorhergehende Weise erhaltenen Mischungsfarben mit einander nothwendig Weiß erhalten muß, so daß man also hiernach überhaupt unter Ergänzungsfarben oder Complementärfarben solche Farben zu verstehen hat, welche sich gegenseitig zu Weiß ergänzen, d. h. welche mit einander vereinigt oder gemischt Weiß geben. So sind z. B. Roth und Grün, Orange und Blau, Gelb und Violett Ergänzungsfarben von einander.

Man kann die Versuche über die Ergänzungsfarben auch so anstellen, daß man sämmtliche Farben des prismatischen Farbenbildes mittelst eines Sammelspiegels**) zu weißem Lichte concentrirt, hierauf durch leicht zu erdenkende Hülfsmittel einige Farben unterdrückt, und dann mittelst einer im Vereinigungs-

*) Oder auch mit einer Sammellinse; m. s. weiter unten das 11te Kapitel.

**) Oder auch einer Sammellinse.

Digitized by Google

punkte aufgestellten weißen Tafel das Resultat der Vereinigung der übrig bleibenden Farben mit einander untersucht. Unterdrückt man Violett, so bleibt Gelb; hält man Blau zurück, so bleibt Orange; hält man Grün zurück, so bleibt Roth; hält man Gelb zurück, so bleibt Violett; wird Orange unterdrückt, so bleibt Blau; und wenn Roth unterdrückt wird, so bleibt Grün. Daß man auch mehr als nur eine Farbe unterdrücken und das Resultat der Mischung der übrigen mit einander untersuchen kann, versteht sich von selbst, wodurch zweckmäßige Gelegenheit zu vielfachen Versuchen gegeben werden kann.

§. 54.

Man kann auch noch die Frage aufwerfen, ob die einzelnen farbigen Strahlen, in die sich das weiße Sonnenlicht zerlegen läßt, wirklich einfach und nicht vielleicht noch weiter zerlegbar sind.

Um diese Frage zu entscheiden, bringe man, wie durch Fig. 55. näher erläutert wird, in der Tafel, auf welcher man das prismatische Farbenbild aufgefangen hat, an der Stelle einer bestimmten Farbe ein kleines, den Bereich dieser Farbe nicht überschreitendes Loch an, so wird bloß Licht von der in Rede stehenden Farbe durch dieses Loch hindurch treten, welches man nun wieder durch ein zweites demselben dargebotenes Prisma gehen lassen, und das dadurch hervorgebrachte neue prismatische Bild mit einer zweiten Tafel auffangen kann. Dieses Bild zeigt sich aber, welche der sieben Hauptfarben man auch wählen mag, niemals verschiedenartig gefärbt, sondern immer bloß von der Farbe, welcher man allein den Durchgang durch die erste Tafel gestattete, und diese Erscheinung bleibt völlig dieselbe, durch wie viele Prismen man überhaupt auch den durchgelassenen farbigen Strahl noch gehen lassen mag. Dieser Versuch zeigt also auf völlig unzweideutige Weise, daß die sieben farbigen Strahlen, in die sich jeder weiße Sonnenstrahl zerlegen läßt, wirklich einfach und nicht weiter zerlegbar sind, was sich auch noch durch andere Versuche bestätigen läßt.

Anmerkung. Die in den vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Erscheinungen hat Göthe die objectiven Erscheinungen genannt.

§. 55.

Wenn MN in Fig. 56. eine schwarze Tafel und A ein weißer Punkt auf derselben ist, so wird ein von dem Punkte A auf das Prisma EFG fallender weißer Strahl AB bei seinem Eintritte in das Prisma auf gewöhnliche Weise in farbige Strahlen zerlegt werden, und es wird bei der in der Figur zum Grunde gelegten Lage des brechenden Winkels des Prisma's BC der rothe, BD der violette Strahl sein. Befindet sich

Digitized by Google

nun hinter dem Prisma ein Auge, welches die aus demselben nach der zweiten an seiner hinteren Fläche erlittenen Brechung tretenden Strahlen auffängt, so wird dieses Auge offenbar nach der Richtung CC' in A ein rothes, nach der Richtung DD' in A' ein violettes Bild des Punktes A auf der Tafel MN, überhaupt also auf derselben ein kleines in die Länge gezogenes prismatisches Farbenbild AA' dieses Punktes, in welchem das Roth oben, das Violett unten liegt, erblicken, was ganz mit der Erfahrung übereinstimmt.

Ersetzt man den weißen Punkt durch eine horizontale weiße gerade Linie auf schwarzem Grunde und stellt den vorhergehenden Versuch wieder an, so erblickt man, was sich nach dem Vorhergehenden ganz von selbst versteht und völlig mit der Erfahrung übereinstimmt, eine Reihe ganz wie im prismatischen Farbenbilde geordneter farbiger Streifen, wie vorher oben Roth und unten Violett; nur erscheinen diese Streifen nicht ganz geradlinig, sondern einigermaßen bogenförmig gekrümmt, was seinen Grund darin hat, daß nicht alle auf das Prisma fallenden Strahlen in der durch das Auge gelegten, auf der horizontalen weißen geraden Linie und auf den Kanten der Seitenflächen des Prisma's, welche wir als der Tafel parallel annehmen, senkrecht stehenden Ebene liegen. Eine genauere Untersuchung dieser Curven ist allerdings auf mathematischem Wege möglich, würde uns aber jetzt zu weit von unserm eigentlichen Zwecke abführen, und ist auch für das Folgende nicht von Bedeutung.

Ersetzt man den weißen Punkt durch eine vertikale weiße gerade Linie auf schwarzem Grunde, so muß das Auge nothwendig eine stetige Folge über einander liegender und theilweise sich deckender prismatischer Farbenbilder erblicken, wodurch nothwendig zugleich eine mannigfaltige Farbenmischung entstehen muß. Die Stelle, wo eine möglichst vollständige Deckung aller einzelnen Hauptfarben stattfindet, muß weiß erscheinen. An der obersten und untersten Stelle des Bildes, wo gar keine oder nur eine sehr geringe Deckung verschiedener Farben stattfindet, muß man dagegen reines Roth und reines Violett erblicken, was Alles mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmt. Das obere Roth ist meistens mit Gelb, das untere Violett meistens mit Blau gemischt.

Ein weißes Quadrat auf schwarzem Grunde erscheint, durch ein Prisma mit abwärts gekehrtem brechenden Winkel angeschaut, oben roth und gelb, unten violett und blau, in der Mitte aber weiß, was sich nach dem Vorhergehenden ganz von selbst versteht, weil man sich ein solches Quadrat aus unendlich vielen weißen vertikalen Linien oder Streifen bestehend denken kann.

Denken wir uns jetzt einen horizontalen schwarzen Streifen auf weißem Grunde, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden ganz unmittelbar, daß derselbe, durch ein Prisma mit abwärts gekehrtem brechenden Winkel betrachtet, unten mit einem rothen und einem gelben, oben mit einem violetten und einem

Digitized by Google

blauen Saume erscheinen muß, so daß die rothen und violetten Säume zunächst an dem schwarzen Streifen liegen.

Anmerkung. Die in diesem Paragraphen beschriebenen Erscheinungen, die sich, wie wir gesehen haben, aus den objectiven Erscheinungen leicht ableiten und erklären lassen, hat Göthe die subjectiven Erscheinungen genannt.

§. 56.

Fraunhofer gerieth zuerst auf die Idee, das Sonnenlicht, statt durch eine kreisrunde Oeffnung, durch eine lange sehr enge vertikale Spalte in dem Fensterladen des verfinsterten Zimmers in letzteres treten zu lassen, wobei zugleich das Prisma so aufgestellt wurde, daß seine Grundflächen horizontal, seine Seitenflächen also vertikal waren. Dadurch wurde das Farbenbild in eine horizontale Lage gebracht. Auch wurde, wie Fig. 57. zeigt, das Prisma vor dem Fernrohre eines Theodoliten aufgestellt, und das prismatische Farbenbild nicht, wie bisher, mit freiem Auge, sondern mit dem Fernrohre des Theodoliten beobachtet, wobei zugleich durch geeignete feine und sanfte Drehungen das Prisma in die aus §. 48. bekannte Lage gebracht wurde, so daß nämlich der einfallende und ausfahrende Strahl gegen die betreffenden Einfallslothe unter gleichen Winkeln geneigt waren, und folglich, wie aus dem angeführten Paragraphen bekannt ist, das Minimum (oder Maximum) der Ablenkung stattfand. Bei den auf diese Art angeordneten Versuchen entdeckte Fraunhofer in dem prismatischen Farbenbilde eine große Menge dunkler, zum Theil ganz schwarzer, auf den beiden längern einander parallelen Seiten des Farbenbildes senkrecht stehender Streifen oder Linien*). Wurde das Prisma aus der angegebenen Lage um seine vertikale Axe gedreht, so verschwanden diese Linien oder Streifen allmählig, kehrten aber wieder, wenn man das Prisma wieder in seine ursprüngliche Lage zurückführte. Wurde die Ocularröhre des Fernrohrs so gestellt, daß man die einer bestimmten Farbe des prismatischen Farbenbildes, z. B. der rothen Farbe, entsprechenden Streifen mit vollkommener Deutlichkeit und Präcision sah, so mußte man das Ocular dem Objective etwas nähern, wenn man die der violet-

*) Gewisse dunkele, den beiden längeren Seiten des Farbenbildes parallele Linien, welche einige Physiker in demselben gesehen haben, beruhen lediglich auf einer Unvollkommenheit der bei den Versuchen gebrauchten Apparate. In einem Aufsatze: Sur les lignes longitudinales dans le spectre solaire (Bulletins de l'Académie R. de Bruxelles. Tome XV. — Ire Partie. Bruxelles. 1848. p. 578.) spricht sich z. B. Crahay auf folgende Art über diese Linien aus: „Dans la réalité, ce phénomène n'est du qu'a des inegalités des bords qui forment la fente, soit aspérités laissées par le travail de la lime, soit corpuscules de poussières etc. qui s'y sont attachés; pour s'en assurer, il n'y a qu'à examiner la fente à l'aide d'une loupe, on y verra les aspérités disposées dans la même ordre que le sont les bandes dans le spectre."

Digitized by Google

ten Farbe entsprechenden Streifen vollkommen deutlich sehen wollte. Wurde die enge Spalte im Fensterladen des verfinsterten Zimmers allmählig erweitert, so verschwanden nach und nach zuerst die weniger dunkeln, zuletzt auch die dunkelsten Streifen. Die brechende Materie, aus welcher das Prisma bestand, und selbst der brechende Winkel des Prismas, hinderten die Sichtbarkeit dieser Streifen nicht, sondern veränderten bloß ihre Intensität. Einen entschiedenen Einfluß auf die Zahl, Lage und Beschaffenheit dieser Streifen überhaupt übte aber das verschiedene Licht aus, welches man anwendete. Bis zu dieser höchst merkwürdigen Entdeckung Fraunhofer's kannte man keinen Unterschied zwischen dem Sonnenlichte und anderem künstlichen oder natürlichen Lichte; diesen erkannte erst Fraunhofer, indem er die durch verschiedene Lichtarten hervorgebrachten prismatischen Farbenbilder mit einander verglich, und dadurch fand, daß jede Lichtart ein Spectrum mit einem ihr eigenthümlichen Systeme dunkler Streifen hervorbringt, welches sie unverändert unter allen Umständen beibehält, und woran sie von jeder andern Lichtart unterschieden werden kann. Im Farbenbilde des Flammenlichts sieht man zwischen Roth und Gelb einen lichten Streifen, und einen zweiten weniger scharf begränzten im Grün. Das elektrische Licht giebt statt der dunkeln Streifen hellglänzende Linien, worunter besonders eine in der grünen Farbe vor den übrigen hervorsticht. Das Licht des Mars und der Venus giebt dieselben dunkeln Streifen wie das Sonnenlicht, nur sind dieselben an den Enden des Farbenbildes weniger leicht zu erkennen. Auch im Lichte des Sirius und des Castor zeigen sich dunkele Streifen, die aber ganz anders wie im Sonnenlichte geordnet sind; im Orange und Gelb sieht man z. B. gar keine dunkeln Streifen; dagegen bemerkt man aber leicht im Grün eine und im Blau zwei starke im Spectrum des Sonnenlichts nicht vorkommende Streifen. Aehnliche Verschiedenheiten kommen noch bei andern von Fraunhofer in der angegebenen Beziehung untersuchten Lichtarten vor.

Von diesen Streifen hat Fraunhofer einen sehr wichtigen Gebrauch bei der Bestimmung der Brechungsexponenten für die verschiedenen Farben gemacht. Die betreffenden Messungen und Beobachtungen werden namentlich deshalb schwierig und unsicher, weil die einzelnen Farben des Spectrums nicht scharf von einander geschieden sind. Daher hat Fraunhofer für jede Farbe einen, für alle Farben des Spectrums also sieben, durch seine Stärke sich besonders auszeichnende Streifen ausgesucht, und benutzt diese sieben, vom Rothen bis zum Violetten von ihm durch B, C, D, E, F, G, H bezeichneten Streifen bei der Bestimmung der Brechungsexponenten für die verschiedenen Farben als Fixpunkte für die Einstellung des Fernrohrs des Theodoliten, wodurch diese Messungen an Sicherheit und Genauigkeit außerordentlich gewonnen haben. B ist am Ende des Roth ein Doppelstrich, dessen äußerer Theil dunkler ist; C ist ein einfacher Strich zwischen Roth und Orange, D ein Doppel-

Digitized by Google

strich im Orange nahe an der Gränze des Gelb; E ist eine Gruppirung von sieben bis acht Parallellinien im Gelb nahe am Grün; F sind drei Linien in der Mitte des Grün; G ist ein durch einen hellen Zwischenstrich getrenntes Liniengruppenpaar im Blau; H ist eine Gruppe sich immer mehr verengernder Linien im Violett, nahe am Ende des Spectrums. Zwischen B und C zählt Fraunhofer 9, zwischen C und D 30, zwischen D und E 84, zwischen E und F 76, zwischen F und G 185, zwischen G und H 190, zwischen B und H also überhaupt 574 Linien. Eine große Anzahl von Linien liegt auch noch zwischen H und der Gränze des Spectrums.

Fraunhofer hat für die sieben farbigen Strahlen nach der obigen Methode die folgenden Brechungsexponenten für den Uebergang aus Luft in Glas gefunden:

Farben.	Flintglas Nr. 13.	Crownglas Kronglas } Nr. 409.
Roth	1,627749	1,525832
Orange	1,629681	1,526849
Gelb	1,635036	1,529587
Grün	1,642024	1,533005
Blau	1,648260	1,536052
Indigo	1,660285	1,541657
Violett	1,671062	1,546566

Ich kann diesen wichtigen und interessanten Gegenstand nicht verlassen, ohne noch der Methode zu gedenken, deren Fraunhofer sich bediente, die ungleiche Intensität der verschiedenen Farben im prismatischen Farbenbilde der Sonne zu bestimmen. Indem man durch das Fernrohr die im Prisma zerstreuten Strahlen auffängt, sieht man diese, jenachdem man die eine oder die andere Farbe in das Gesichtsfeld bringt, mit ungleichem Glanze, und um diesen Glanz abzumessen, ward im Fernrohre*) ein die Hälfte desselben einnehmender, unter einem Winkel von 45° gegen die Axe des Fernrohrs geneigter Spiegel angebracht, von dem das durch eine Seitenröhre in das Fernrohr fallende Licht einer seitwärts stehenden Lampe dem durch das Fernrohr sehenden Auge des Beobachters zugeworfen wurde. Das Auge sah also zugleich den von der Lampe erleuchteten Spiegel und daneben den Theil des Farbenbildes, dessen Intensität bestimmt werden sollte; und indem man nun durch vergrößerte oder verkleinerte Entfernung der Lampe den Spiegel so erhellte, daß der Eindruck seines Glanzes dem des Farbenbildes gleich erschien, diesen Versuch aber mit derselben Lampe bei allen Farben des Spectrums wiederholte, so gab die

*) Im gemeinschaftlichen Brennpunkte des Objectivs und Oculars bei richtiger Einstellung. M. s. weiter unten.

Digitized by Google

verschiedene Entfernung der Lampe ein Mittel an die Hand, die Intensitäten der verschiedenen Farben des Spectrums nach bekannten photometrischen Sätzen (m. s. das zweite Kapitel) unter einander zu vergleichen. Nimmt man die Lichtstärke im hellsten Gelb als Einheit an, so ist nach Fraunhofer die Lichtstärke im äußersten Roth 0,032; in der Mitte das Roth 0,094; im Orange 0,640; im Grün 0,840; im Hellblau 0,170; an der Gränze des Blau und Violett 0,031; in der Mitte des Violett 0,0056.

§. 57.

Die Farben der natürlichen Körper lassen sich nicht anders als dadurch erklären, daß man den mit einer gewissen Farbe erscheinenden Körpern das Vermögen beilegt, eben nur die dieser Farbe entsprechenden einfachen farbigen Strahlen, oder alle die farbigen Strahlen, durch deren Vereinigung mit einander ein Strahl von der in Rede stehenden Farbe entsteht, zurückzuwerfen oder zu reflectiren, allen übrigen farbigen Strahlen dagegen einen Durchgang durch sich zu verstatten oder dieselben zu absorbiren. Vermag also ein Körper bloß die grünen Strahlen zu reflectiren, so erscheint er grün; ein Körper, welcher bloß die gelben und die blauen Strahlen reflectirt, erscheint ebenfalls grün; ein Körper, welcher allein die blauen und rothen Strahlen reflectirt, erscheint violett; die weißen Körper haben das Vermögen, alle farbigen Strahlen zu reflectiren; Körper dagegen, denen das Vermögen, das Licht zu reflectiren, ganz fehlt, nennen wir schwarze Körper. Deshalb erscheint das weiße Papier immer mit der Farbe gefärbt, welche dem Theile des Spectrums entspricht, den man auf dasselbe fallen läßt, und künstlich gefärbte Körper erscheinen weit glänzender, wenn wir auf sie nicht weißes Licht, sondern die gleichartig gefärbten Strahlen des Spectrums fallen lassen, während im Gegentheil ihre Farbe sehr matt wird, wenn man die der complementären Farbe entsprechenden Strahlen auf sie fallen läßt.

Eine kleine hierher gehörende nicht uninteressante Vorrichtung, welche unter dem Namen des Farbenkreisels bekannt ist, verdient hier noch etwas näher beschrieben zu werden. Der Farbenkreisel ist ein mit Leichtigkeit eine schnelle Umdrehung gestattender Kreisel mit einer nicht zu kleinen kreisförmigen oberen Fläche. Diese Fläche theilt man in sieben Sectoren, deren Flächen sich eben so zu einander verhalten wie die Räume, welche die sieben Farben im prismatischen Farbenbilde einnehmen, und bemalt diese Sectoren recht gleichförmig mit den ihnen entsprechenden Farben des Spectrums. Nach Newton sollen für die Farben

Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett

die Sectoren sich wie die Brüche

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}, \frac{1}{9}$$

Digitized by Google

zu einander verhalten, oder wenn man 360° in sieben wie diese Brüche sich zu einander verhaltende Theile eintheilt, so sollen die den einzelnen Sectoren entsprechenden Winkel am Mittelpunkte in derselben Ordnung wie vorher die folgenden sein:

60°. 45′. 34″	Roth
34 . 10 . 38	Orange
54 . 41 . 1	Gelb
60 . 45 . 34	Grün
54 . 41 . 1	Blau
34 . 10 . 38	Indigo
60 . 45 . 34	Violett.

Dreht man nun diesen so vorgerichteten Kreisel schnell herum, so müßte die bemalte Fläche desselben, weil das Auge die von den einzelnen Farben hervorgebrachten Eindrücke wegen ihrer zu schnellen Aufeinanderfolge nicht von einander zu unterscheiden vermag, vollkommen weiß erscheinen; gewöhnlich erscheint aber nur ein dem Weißen sich desto mehr näherndes Grau, je richtiger man die Verhältnisse der einzelnen Sectoren unter einander getroffen hat, und je gleichförmiger man dieselben zu bemalen im Stande gewesen ist.

Man kann mit dem Farbenkreisel noch manche andere Versuche anstellen, so daß man ihn z. B. bloß mit complementären Farben bemalt u. dergl.; nur ist es nicht ganz leicht, die Verhältnisse der Sectoren u. s. w. mit der Genauigkeit zu treffen, welche erforderlich ist, wenn die Versuche zu dem gewünschten Resultate führen sollen.

Zehntes Kapitel.

Von der Brechung bei einer Kugelfläche.

§. 58.

Wir wollen annehmen, daß eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt durch C bezeichnet werden mag, von einem durch einen bestimmten Punkt S gehenden Strahle in einem gewissen Punkte E getroffen werde. Legt man dann durch die Punkte C, E, S eine Ebene, so folgt aus dem Grundgesetze der Brechung auf der Stelle, daß in dieser Ebene jederzeit auch der gebrochene Strahl liegen muß, und daher in derselben alle Constructionen ausgeführt werden können, weshalb in den Figuren,

Digitized by Google

an welche wir im Folgenden unsere Betrachtungen anschließen werden, die Ebene des Papiers immer diese Ebene sein soll. Durch die Punkte C und S denken wir uns eine die Kugelfläche in dem Punkte A schneidende gerade Linie gelegt, welche im Folgenden die Axe genannt werden soll, und bezeichnen den Durchschnittspunkt des gebrochenen Strahls mit derselben durch S_1. Der Punkt A theilt die Axe in zwei Theile, von denen der mit dem einfallenden Strahle auf einer Seite der Kugelfläche, d. h. in den zur Erläuterung der folgenden Betrachtungen dienenden Figuren, links von A liegende der positive, der rechts von A liegende der negative Theil genannt werden soll. Der Halbmesser der Kugelfläche sei r. Die Linien AS und AS_1 sollen als positiv oder als negativ betrachtet werden, jenachdem sie auf dem positiven oder negativen Theile der Axe, d. h. links oder rechts von dem Punkte A liegen, und mit Rücksicht hierauf wollen wir dieselben respective durch a und a_1 bezeichnen. Die Winkel, welche die von den Punkten S und S_1 aus nach den Richtungen der Bewegung des einfallenden und des gebrochenen Strahls hin liegenden Theile dieser Strahlen mit den von den Punkten S und S_1 aus nach der rechten Seite hin liegenden Theilen der Axe einschließen, indem man diese Winkel von den in Rede stehenden Theilen der Axe an nach der Seite derselben hin, auf welcher der Einfallspunkt E liegt, bis zu den vorher näher bezeichneten Theilen des einfallenden und des gebrochenen Strahls von 0 bis 360° zählt, sollen respective durch i und i_1 bezeichnet werden. Endlich wollen wir den Einfallswinkel und den Brechungswinkel bei dem Punkte E durch ω und ω_1, den Brechungsexponenten aber durch n bezeichnen, so daß also nach dem Brechungsgesetze

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n$$

ist. Durch den Einfallspunkt E denken wir uns eine der Axe parallele gerade Linie gelegt, welche aber nur zur bessern Unterscheidung der möglichen Fälle dient, und daher in den Figuren nicht weiter besonders bezeichnet worden ist.

Zuerst betrachten wir den Fall, wenn dem einfallenden Strahle die convexe Seite der gegebenen Kugelfläche zugekehrt ist.

In dem ersten der drei in Fig. 58. dargestellten Fälle ist

$$CE : CS = \sin i : \sin(180° - \omega),$$
$$CE : CS_1 = \sin(360° - i_1) : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : \quad r + a = \quad \sin i : \sin\omega,$$
$$r : -(r + a_1) = -\sin i_1 : \sin\omega_1;$$

Ferner ist

$$\omega - i = \omega_1 + (360° - i_1), \quad \omega_1 = \omega - (i - i_1) - 360°;$$

Digitized by Google

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\ \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

und wir haben daher offenbar die fünf folgenden Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r+a)\sin i,\ r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\ \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\ \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

In den beiden letzten der drei in Fig. 58. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin i : \sin(180^\circ - \omega),$$
$$CE : CS_1 = \sin i_1 : \sin(180^\circ - \omega_1);$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : r + a = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : r + a_1 = \sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega - i = \omega_1 - i_1,\ \omega_1 = \omega - (i-i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\ \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r+a)\sin i,\ r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\ \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\ \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

In dem ersten der drei in Fig. 59. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(360^\circ - i) : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin i_1 : \sin(180^\circ - \omega_1);$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : -(r+a) = -\sin i : \sin\omega,$$
$$r : r+a_1 = \sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega + (360^\circ - i) = \omega_1 - i_1,\ \omega_1 = \omega - (i-i_1) + 360^\circ;$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\ \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r+a)\sin i,\ r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\ \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\ \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

In den beiden letzten der drei in Fig. 59. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(360^\circ - i) : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(360^\circ - i_1) : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : -(r+a) = -\sin i : \sin\omega,$$
$$r : -(r+a_1) = -\sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega + (360^\circ - i) = \omega_1 + (360^\circ - i_1);\ \omega_1 = \omega - (i-i_1);$$

Digitized by Google

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r+a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

In dem ersten der drei in Fig. 60. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(i-180°) : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(i_1-180°) : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : r+a = -\sin i : \sin\omega,$$
$$r : r+a_1 = -\sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$(360°-i) - \omega = (360°-i_1) - \omega_1,\quad \omega_1 = \omega + (i-i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

und wir haben daher jetzt die fünf folgenden Gleichungen:

$$-r\sin\omega = (r+a)\sin i,\quad -r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

oder

$$r\sin(-\omega) = (r+a)\sin i,\quad r\sin(-\omega_1) = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin(-\omega) = n\sin(-\omega_1),\quad \sin(-\omega_1) = \sin\{(-\omega)-(i-i_1)\},$$
$$\cos(-\omega_1) = \cos\{(-\omega)-(i-i_1)\}.$$

In den beiden letzten der drei in Fig. 60. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(i-180°) : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(i_1-180°) : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : r+a = -\sin i : \sin\omega,$$
$$r : r+a_1 = -\sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$(360°-i) - \omega = (360°-i_1) - \omega_1,\quad \omega_1 = \omega + (i-i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$-r\sin\omega = (r+a)\sin i,\quad -r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

oder

$$r\sin(-\omega) = (r+a)\sin i,\quad r\sin(-\omega_1) = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin(-\omega) = n\sin(-\omega_1),\quad \sin(-\omega_1) = \sin\{(-\omega)-(i-i_1)\},$$
$$\cos(-\omega_1) = \cos\{(-\omega)-(i-i_1)\}.$$

Digitized by Google

Betrachtet man nun aber die Winkel ω, ω_1 nicht mehr, wie bisher, immer als positiv, sondern als positiv oder als negativ, jenachdem der Punkt A und der Winkel ω auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes liegen; so ist, wie aus dem Vorhergehenden sich mit völliger Deutlichkeit ergiebt, ganz allgemein:

$$r\sin\omega = (r+a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

Auf ähnliche Art wollen wir nun auch den Fall betrachten, wenn dem einfallenden Strahle die concave Seite der gegebenen Kugelfläche zugekehrt ist.

In dem ersten der drei in Fig. 61. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(180^\circ - i) : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(180^\circ - i_1) : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : r - a = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : r - a_1 = \sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$i - \omega = i_1 - \omega_1,\quad \omega_1 = \omega - (i - i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

und wir haben daher jetzt die fünf folgenden Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r-a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

In den beiden letzten der drei in Fig. 61. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(180^\circ - i) : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(180^\circ - i_1) : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : r - a = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : r - a_1 = \sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$i - \omega = i_1 - \omega_1,\quad \omega_1 = \omega - (i - i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$r\sin\omega = (r-a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

In dem ersten der drei in Fig. 62. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin i : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin(360^\circ - i_1) : \sin(180^\circ - \omega_1);$$

Digitized by Google

also, wie leicht erhellet:

$$r : -(r-a) = \quad \sin i : \sin\omega,$$
$$r : \quad r-a_1 = -\sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega + i = \omega_1 - (360° - i_1), \quad \omega_1 = \omega + (i - i_1) + 360°;$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\}, \quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

und wir haben daher die fünf folgenden Gleichungen:

$$-r\sin\omega = (r-a)\sin i, \quad -r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1, \quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\}, \quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

oder

$$r\sin(-\omega) = (r-a)\sin i, \quad r\sin(-\omega_1) = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin(-\omega) = n\sin(-\omega_1), \quad \sin(-\omega_1) = \sin\{(-\omega) - (i-i_1)\},$$
$$\cos(-\omega_1) = \cos\{(-\omega) - (i-i_1)\}.$$

In den beiden letzten der drei in Fig. 62. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin i : \sin\omega,$$
$$CE : CS_1 = \sin i_1 : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : -(r-a) = \sin i : \sin\omega,$$
$$r : -(r-a_1) = \sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega + i = \omega_1 + i_1, \quad \omega_1 = \omega + (i - i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\}, \quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$-r\sin\omega = (r-a)\sin i, \quad -r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1, \quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\}, \quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\}.$$

oder

$$r\sin(-\omega) = (r-a)\sin i, \quad r\sin(-\omega_1) = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin(-\omega) = n\sin(-\omega_1), \quad \sin(-\omega_1) = \sin\{(-\omega) - (i-i_1)\},$$
$$\cos(-\omega_1) = \cos\{(-\omega) - (i-i_1)\}.$$

In dem ersten der drei in Fig. 63. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(360° - i) : \sin(180° - \omega),$$
$$CE : CS_1 = \sin i_1 : \sin\omega_1;$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : \quad r - a = -\sin i : \sin\omega,$$
$$r : -(r-a_1) = \quad \sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega - (360° - i) = \omega_1 + i_1, \quad \omega_1 = \omega + (i - i_1) - 360°;$$

Digitized by Google

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

und wir haben daher die fünf folgenden Gleichungen:

$$-r\sin\omega = (r-a)\sin i,\quad -r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

oder

$$r\sin(-\omega) = (r-a)\sin i,\quad r\sin(-\omega_1) = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin(-\omega) = n\sin(-\omega_1),\quad \sin(-\omega_1) = \sin\{(-\omega)-(i-i_1)\},$$
$$\cos(-\omega_1) = \cos\{(-\omega)-(i-i_1)\}.$$

In den beiden letzten der drei in Fig. 63. dargestellten Fälle ist:

$$CE : CS = \sin(360^\circ - i) : \sin(180^\circ - \omega),$$
$$CE : CS_1 = \sin(360^\circ - i_1) : \sin(180^\circ - \omega_1);$$

also, wie leicht erhellet:

$$r : r-a = -\sin i : \sin\omega,$$
$$r : r-a_1 = -\sin i_1 : \sin\omega_1.$$

Ferner ist

$$\omega - (360^\circ - i) = \omega_1 - (360^\circ - i_1),\quad \omega_1 = \omega + (i-i_1);$$

also

$$\sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

und wir haben daher wieder die fünf folgenden Gleichungen:

$$-r\sin\omega = (r-a)\sin i,\quad -r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega+(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega+(i-i_1)\};$$

oder

$$r\sin(-\omega) = (r-a)\sin i,\quad r\sin(-\omega_1) = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin(-\omega) = n\sin(-\omega_1),\quad \sin(-\omega_1) = \sin\{(-\omega)-(i-i_1)\},$$
$$\cos(-\omega_1) = \cos\{(-\omega)-(i-i_1)\}.$$

Betrachtet man nun aber wieder ω, ω_1 unter denselben Bedingungen wie vorher als positiv oder als negativ, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$r\sin\omega = (r-a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}.$$

Vergleicht man jetzt die beiden gefundenen Systeme von Gleichungen, nämlich die Systeme:

$$r\sin\omega = (r+a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r+a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

und

$$r\sin\omega = (r-a)\sin i,\quad r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$
$$\sin\omega = n\sin\omega_1,\quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\},\quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\}$$

mit einander, so fällt auf der Stelle in die Augen, daß das erste aus dem zweiten hervorgeht, wenn man in demselben — r

Digitized by Google

für r setzt. Da nun der Mittelpunkt C im ersten der beiden vorhergehenden Fälle auf der negativen Seite, im zweiten Falle auf der positiven Seite des Punktes A liegt, so ist es am zweckmäßigsten, r nicht mehr immer als positiv, sondern im zweiten Falle als positiv, im ersten Falle als negativ zu betrachten; und unter dieser Voraussetzung hat man dann nach dem Vorhergehenden offenbar die folgenden in völliger Allgemeinheit geltenden Gleichungen:

$$r \sin\omega = (r-a)\sin i, \quad r\sin\omega_1 = (r-a_1)\sin i_1;$$

$$\sin\omega = n\sin\omega_1, \quad \sin\omega_1 = \sin\{\omega-(i-i_1)\}, \quad \cos\omega_1 = \cos\{\omega-(i-i_1)\};$$

welche unsern folgenden Untersuchungen vorzüglich zur Grundlage dienen werden.

Man muß zu diesen Gleichungen aber noch eine sich ebenfalls aus den vorhergehenden Betrachtungen unmittelbar ergebende Gleichung nehmen, welche für das Folgende von großem Nutzen ist, aber einige besondere Bestimmungen erfordert, weshalb wir dieselbe auch erst jetzt besonders hervorheben. Ueberblickt man nämlich die ganze vorhergehende Discussion aller möglichen Fälle nochmals, und nimmt auf die Vorzeichen der Winkel ω und ω_1 gehörig Rücksicht, so wird auf der Stelle in die Augen fallen, daß immer

$$\omega_1 = \omega - (i-i_1) + k \cdot 360^0$$

gesetzt werden kann, wo entweder

$$k = -1, \text{ oder } k = 0, \text{ oder } k = +1$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$i_1 = i - (\omega-\omega_1) - k \cdot 360^0.$$

Die Winkel i, i_1 sind stets positiv und übersteigen 360^0 nicht. Die Winkel ω, ω_1 können positiv und negativ sein, ihre absoluten Werthe übersteigen aber 90^0 nicht. Also ist der absolute Werth von $\omega - \omega_1$ nie größer als 180^0, und folglich der absolute Werth von $i - (\omega-\omega_1)$ nie größer als $360^0 + 180^0 = 3 \cdot 180^0$. Wenn nun zuerst $i - (\omega-\omega_1)$ positiv ist, so ist entweder

$$0 < i - (\omega-\omega_1) < 2 \cdot 180^0$$

oder

$$2 \cdot 180^0 < i - (\omega-\omega_1) < 3 \cdot 180^0.$$

Wäre im ersten Falle $k = -1$, so wäre i_1 positiv, aber größer als 360^0; wäre $k = +1$, so wäre i_1 negativ; da nach dem Obigen beides nicht Statt finden kann, so muß in diesem Falle $k = 0$ sein. Wäre im zweiten Falle $k = 0$ oder $k = -1$, so würde i_1 positiv, aber größer als 360^0 sein, was nach dem Obigen nicht möglich ist; also muß in diesem Falle $k = +1$ sein. Wenn ferner $i - (\omega-\omega_1)$ negativ ist, so würde i_1 für $k = 0$ und $k = +1$ negativ sein, was nicht

Digitized by Google

möglich ist; also muß in diesem Falle $k = -1$ sein. Hieraus sieht man also, daß in der Gleichung

$$i_1 = i - (\omega - \omega_1) - k \cdot 360^0$$
$$k = 0, \text{ oder } k = +1, \text{ oder } k = -1$$

gesetzt werden muß, jenachdem $i - (\omega - \omega_1)$ positiv und kleiner als 360^0, oder positiv und größer als 360^0, oder negativ ist.

Nimmt man diese Gleichung zu den obigen hinzu, so läßt sich, wenn die Lage des einfallenden Strahls gegeben ist, die Lage des gebrochenen Strahls immer leicht mit völliger Sicherheit bestimmen, indem man nämlich die Größen i, a als gegebene, die Größen i_1, a_1 als gesuchte Größen ansieht. Dies wird auf der Stelle erhellen, wenn man die im Obigen entwickelten Gleichungen auf folgende Art darstellt:

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin i,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{n} \sin\omega,$$

$$i_1 = i - (\omega - \omega_1) - k \cdot 360^0,$$

$$a_1 = r\left(1 - \frac{\sin\omega_1}{\sin i_1}\right) = \frac{2r \sin\frac{1}{2}(i_1 - \omega_1) \cos\frac{1}{2}(i_1 + \omega_1)}{\sin i_1};$$

und bemerkt, daß man in den beiden ersten Gleichungen ω und ω_1 zwar positiv und negativ, den absoluten Werthen nach aber nicht größer als 90^0 zu nehmen hat, und in der dritten Gleichung

$$k = 0, \text{ oder } k = +1, \text{ oder } k = -1$$

setzen muß, jenachdem $i - (\omega - \omega_1)$ positiv und kleiner als 360^0, oder positiv und größer als 360^0, oder negativ ist.

§. 59.

Weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$r \sin\omega = (r - a) \sin i, \quad r \sin\omega_1 = (r - a_1) \sin i_1$$

ist, so ist, wie hieraus sogleich durch Division folgt:

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = \frac{r - a}{r - a_1} \cdot \frac{\sin i}{\sin i_1}.$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\sin\omega = n \sin\omega_1, \quad \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n;$$

also erhält man die Gleichung

$$n = \frac{r - a}{r - a_1} \cdot \frac{\sin i}{\sin i_1}.$$

Digitized by Google

Ferner ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i, \quad \cos\omega = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2};$$

wobei man zu beachten hat, daß der absolute Werth von ω nicht größer als 90^0, also $\cos\omega$ stets eine positive Größe ist. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber auch

$$\sin\omega = n\sin\omega_1 = n\sin\{\omega - (i - i_1)\},$$

und es ist also nach dem Obigen offenbar

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i$$

$$= \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i\cos(i - i_1) - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\,.\,\sin(i - i_1)$$

$$= \left\{\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i\cos i - \sin i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\right\}\cos i_1$$

$$+ \left\{\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i\sin i + \cos i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\right\}\sin i_1,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$A = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i\cos i - \sin i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$B = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i\sin i + \cos i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

setzen:

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i = A\cos i_1 + B\sin i_1,$$

wo zwischen den Größen A und B, wie man sich durch leichte Rechnung überzeugt, die Relation

$$A^2 + B^2 = 1$$

Statt findet. Bringt man nun die obige Gleichung zwischen

$$\sin i_1 \text{ und } \cos i_1$$

auf die Form

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i - B\sin i_1 = A\cos i_1,$$

und quadrirt auf beiden Seiten, so erhält man mit Rücksicht auf die Relation

$$A^2 + B^2 = 1$$

nach leichter Rechnung zur Bestimmung von $\sin i_1$ die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\sin i_1^2 - \frac{2}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)B\sin i\sin i_1 = A^2 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2,$$

Digitized by Google

oder zur Bestimmung von

$$\frac{\sin i_1}{\sin i}$$

die Gleichung:

$$\left(\frac{\sin i_1}{\sin i}\right)^2 - \frac{2}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) B \frac{\sin i_1}{\sin i} = \left(\frac{A}{\sin i}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2$$

Löst man diese Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) B \pm \frac{A}{\sin i}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

oder

$$\sin i_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) B \sin i \pm A\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}.$$

Führt man diesen Werth von $\sin i_1$ in die Gleichung

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin i = A \cos i_1 + B \sin i_1$$

ein und bestimmt $\cos i_1$, so erhält man:

$$\cos i_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) A \sin i \mp B\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

und hat also jetzt die beiden Formeln:

$$\sin i_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) B \sin i \pm A\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$\cos i_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) A \sin i \mp B\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin i^2};$$

in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Hauptsächlich ist nun zu ermitteln, wie in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen sind. Denken wir uns zu dem Ende den einfallenden Strahl so um den festen Punkt S gedreht, daß sich der Punkt E dem Punkte A immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, so erhellet aus einer bloßen Ansicht der den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen zum Grunde gelegten Figuren auf der Stelle, daß immer $\sin i$ sich der Gränze 0, $\cos i$ sich der Gränze $+1$ nähert, oder daß immer gleichzeitig

$$\sin i = 0, \quad \cos i = +1$$

ist. Für

$$\sin i = 0$$

Digitized by Google

ist aber wegen der Gleichungen

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{n}\sin\omega = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i$$

offenbar

$$\omega = 0, \quad \omega_1 = 0;$$

wobei man zu beachten hat, daß die absoluten Werthe von ω und ω_1 nie größer als 90° genommen werden. Weil nun allgemein

$$i_1 = i - (\omega - \omega_1) - k \cdot 360°$$

ist, so ist unter der gemachten Voraussetzung

$$i_1 = i - k \cdot 360°,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden nur

$$i = 0 \text{ oder } i = 360°$$

sein kann, da nämlich gleichzeitig

$$\sin i = 0, \quad \cos i = +1$$

ist, offenbar auch

$$i_1 = 0 \text{ oder } i_1 = 360°,$$

also gleichzeitig

$$\sin i_1 = 0, \quad \cos i_1 = +1.$$

Setzen wir nun in den beiden oben gefundenen allgemeinen Ausdrücken von $\sin i_1$ und $\cos i_1$ gleichzeitig

$$\sin i = 0, \quad \cos i = +1;$$

so erhalten wir immer mit Beziehung der obern und untern Vorzeichen auf einander

$$\sin i_1 = 0, \quad \cos i_1 = \mp 1;$$

und da nun, wie unmittelbar vorher gezeigt worden ist, immer gleichzeitig

$$\sin i_1 = 0, \quad \cos i_1 = +1$$

ist, so müssen wir offenbar, wenigstens für solche einfallende Strahlen, welche die Kugelfläche sehr nahe bei dem Punkte A treffen, die im Folgenden auch überhaupt nur zur Betrachtung kommen werden, in den obigen allgemeinen Ausdrücken von $\sin i_1$ und $\cos i_1$ die untern Zeichen nehmen, d. h. wir müssen

$$A = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i \cos i - \sin i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$B = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i \sin i + \cos i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

Digitized by Google

und

$$\sin i_1 = \frac{1}{n}\left(1-\frac{a}{r}\right) B \sin i - A\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$\cos i_1 = \frac{1}{n}\left(1-\frac{a}{r}\right) A \sin i + B\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

setzen.

Es ist also auch

$$\frac{\sin i_1}{\sin i} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{a}{r}\right) B - \frac{A}{\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

und weil nun nach dem Obigen

$$n = \frac{r-a}{r-a_1}\cdot\frac{\sin i}{\sin i_1}, \text{ also } \frac{r-a}{r-a_1} = n\frac{\sin i_1}{\sin i}$$

ist, so ist

$$\frac{r-a}{r-a_1} = \left(1-\frac{a}{r}\right) B - n\frac{A}{\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

oder

$$\frac{r-a}{r-a_1} = \left(1-\frac{a}{r}\right) B - \frac{A}{\sin i}\sqrt{n^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}.$$

Folglich ist

$$r-a_1 = \frac{r-a}{\left(1-\frac{a}{r}\right) B - n\frac{A}{\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}}$$

oder

$$r-a_1 = \frac{r-a}{\left(1-\frac{a}{r}\right) B - \frac{A}{\sin i}\sqrt{n^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}}.$$

Multiplicirt man aber im Zähler und Nenner mit

$$\left(1-\frac{a}{r}\right) B + n\frac{A}{\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

so erhält man

$$r-a_1 = (r-a)\cdot\frac{\left(1-\frac{a}{r}\right) B + n\frac{A}{\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 - n^2\left(\frac{A}{\sin i}\right)^2}$$

oder

Digitized by Google

$$r - a_1 = (r - a) \cdot \frac{\left(1 - \frac{a}{r}\right) B + \frac{A}{\sin i} \sqrt{n^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 - n^2 \left(\frac{A}{\sin i}\right)^4}.$$

Führt man in den obigen Ausdruck von

$$\frac{\sin i_1}{\sin i}$$

die bekannten Ausdrücke von A und B ein, so erhält man

$$\frac{\sin i_1}{\sin i} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)\left\{\left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i^2 + \cos i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\right\}$$

$$- \left\{\left(1 - \frac{a}{r}\right)\cos i - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}\right\}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}.$$

Läßt man den einfallenden Strahl um den festen Punkt S sich so drehen, daß der Einfallspunkt E sich dem Punkte A nähert, so nähern sich nach dem Obigen

$$\sin i \text{ und } \cos i$$

gleichzeitig den Gränzen

$$0 \text{ und } + 1;$$

also nähert

$$\frac{\sin i_1}{\sin i}$$

sich der Gränze

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) - \left\{\left(1 - \frac{a}{r}\right) - 1\right\} = \frac{a}{r} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{a}{r} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a}{r}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{r - a}{r - a_1} = n \frac{\sin i_1}{\sin i}$$

ist, so nähert sich unter derselben Voraussetzung wie vorher

$$\frac{r - a}{r - a_1}$$

der Gränze

$$n\left\{\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{a}{r}\right\} = 1 + (n-1)\frac{a}{r}.$$

Bezeichnen wir also die Gränze, welcher sich unter der in Rede stehenden Voraussetzung a_1 nähert, durch (a_1), so ist

$$\frac{r - a}{r - (a_1)} = 1 + (n-1)\frac{a}{r},$$

Digitized by Google

und folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$(a_1) = \frac{nar}{r + (n-1)a},$$

woraus sich auch leicht

$$\frac{n}{(a_1)} - \frac{1}{a} = \frac{n-1}{r}$$

ergiebt.

Daß $\sin i_1$ und $\cos i_1$ sich respective den Gränzen 0 und + 1 nähern, folgt aus den obigen allgemeinen Ausdrücken dieser Größen auf der Stelle.

Der durch die so eben gefundene Gränze bestimmte Punkt der Axe heißt aus ganz ähnlichen Gründen wie bei der Reflexion oder den Spiegeln das durch Refraction entstandene Bild des Punktes S, von welchem die Strahlen ausgehend angenommen worden sind.

§. 60.

Die im vorhergehenden Paragraphen zur Bestimmung der Lage des Bildes entwickelten, für das Folgende sehr wichtigen Formeln bleiben richtig, wenn man für r, a, (a_1) respective — r, — a, — (a_1) setzt, und gelten also offenbar ganz allgemein, wenn man r, a, (a_1) überhaupt die Abscissen der Punkte C, S, S_1, wo jetzt S_1 das Bild von S bezeichnen soll, in der Axe in Bezug auf den Punkt A als Anfang bedeuten läßt. Daher ist unter dieser Voraussetzung ganz allgemein

$$\frac{r-a}{r-(a_1)} = 1 + (n-1)\frac{a}{r},$$

oder

$$(a_1) = \frac{nar}{r + (n-1)a},$$

oder

$$\frac{n}{(a_1)} - \frac{1}{a} = \frac{n-1}{r}.$$

Nehmen wir aber C als Anfang der Abscissen an, so ist in diesen Formeln für a, (a_1) offenbar respective r + a, r + (a_1) zu setzen, und wir erhalten daher unter dieser Voraussetzung die folgenden allgemein gültigen Formeln:

$$\frac{a}{(a_1)} = 1 + (n-1)\frac{r+a}{r} = 1 + (n-1)\left(1 + \frac{a}{r}\right);$$

ferner

$$r + (a_1) = \frac{n(r+a)r}{r + (n-1)(r+a)}$$

Digitized by Google

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$(a_1) = \frac{ar}{n(r+a) - a} = \frac{ar}{nr + (n-1)a};$$

auch ist

$$\frac{1}{(a_1)} - \frac{n}{a} = \frac{n-1}{r}.$$

Lassen wir aber r nicht mehr wie bisher die Abscisse von C in Bezug auf A als Anfang, sondern vielmehr die Abscisse von A in Bezug auf C als Anfang bezeichnen, so muß in den vorhergehenden Formeln — r für r gesetzt werden, wodurch man

$$\frac{a}{(a_1)} = 1 + (n-1)\frac{r-a}{r} = 1 + (n-1)\left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

und

$$(a_1) = \frac{ar}{n(r-a) + a} = \frac{ar}{nr - (n-1)a},$$

oder

$$\frac{n}{a} - \frac{1}{(a_1)} = \frac{n-1}{r}$$

erhält.

Durch den Punkt C wollen wir jetzt ein ganz beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem legen, und in Bezug auf dasselbe die Coordinaten der Punkte S und S_1 respective durch p, q und p_1, q_1 bezeichnen; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$a : (a_1) = p : p_1 = q : q_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird:

$$nr - (n-1)a : r = p : p_1 = q : q_1.$$

Der absolute Werth der Größe a ist offenbar

$$\sqrt{p^2 + q^2}.$$

Nehmen wir nun aber, was jedenfalls verstattet ist, die vorhergehende Größe r mit demselben Vorzeichen, welches die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der ersten Coordinatenaxe mit dem um C beschriebenen Kreisbogen hat, so wird aus einer bloßen Ansicht von Fig. 64. auf der Stelle erhellen, daß a und p immer gleiche Vorzeichen haben, und folglich nach dem Vorhergehenden völlig allgemein

$$a = p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}$$

Digitized by Google

gesetzt werden kann. Weil nun nach dem Obigen

$$p_1 = \frac{r}{nr - (n-1)a}\,p, \quad q_1 = \frac{r}{nr - (n-1)a}\,q$$

ist, so ist

$$p_1 = \frac{r}{nr - (n-1)p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}}\,p,$$

$$q_1 = \frac{r}{nr - (n-1)p\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}}\,q;$$

wo r die erste Coordinate des Durchschnittspunkts der ersten Coordinatenaxe mit dem um C beschriebenen Kreisbogen ist.

Nehmen wir den Durchschnittspunkt der ersten Coordinatenaxe mit dem um C beschriebenen Kreisbogen als den Anfang eines neuen dem vorhergehenden parallelen Coordinatensystems an, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte S und S_1 in Bezug auf dieses neue System durch P, Q und P_1, Q_1; so ist

$$p = P + r, \quad q = Q$$

und ganz eben so

$$p_1 = P_1 + r, \quad q_1 = Q_1;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$P_1 + r = \frac{r}{nr - (n-1)(P+r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P+r}\right)^2}}\,(P + r),$$

$$Q_1 = \frac{r}{nr - (n-1)(P+r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P+r}\right)^2}}\,Q.$$

Lassen wir aber jetzt r die erste Coordinate des Punktes C in diesem neuen Systeme bezeichnen, so müssen wir in den vorstehenden Formeln offenbar — r für r setzen, wodurch wir erhalten:

$$P_1 - r = \frac{r}{nr + (n-1)(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}\,(P - r),$$

$$Q_1 = \frac{r}{nr + (n-1)(P-r)\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}}\,Q.$$

Die vorher für

p_1 und $P_1 - r$

Digitized by Google

entwickelten Formeln lassen sich, wie man mittelst leichter Rechnung findet, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$p_1 = \frac{rp}{nr-(n-1)p} + \frac{(n-1)\,r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}-1\right\}}{\left\{(n-1)-n\frac{r}{p}\right\}\left\{(n-1)\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}-n\frac{r}{p}\right\}}$$

und

$$P_1 - r = \frac{r\,(P-r)}{nr+(n-1)(P-r)} - \frac{(n-1)\,r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}-1\right\}}{\left\{(n-1)+n\frac{r}{P-r}\right\}\left\{(n-1)\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}+n\frac{r}{P-r}\right\}}.$$

Kommen nun die Brüche

$$\frac{q}{p} \text{ und } \frac{Q}{P-r}$$

der Null sehr nahe, so sind offenbar in Bezug auf diese Größen die Größen

$$\frac{(n-1)\,r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}-1\right\}}{\left\{(n-1)-n\frac{r}{p}\right\}\left\{(n-1)\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}-n\frac{r}{p}\right\}}$$

und

$$\frac{(n-1)\,r\left\{\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}-1\right\}}{\left\{(n-1)+n\frac{r}{P-r}\right\}\left\{(n-1)\sqrt{1+\left(\frac{Q}{P-r}\right)^2}+n\frac{r}{P-r}\right\}}$$

kleine Größen von der zweiten Ordnung, und erst mit Vernachlässigung solcher kleinen Größen ist also nach dem Vorhergehenden

$$p_1 = \frac{rp}{nr-(n-1)p},\quad P_1 - r = \frac{r\,(P-r)}{nr+(n-1)\,(P-r)}$$

oder

$$p_1 = \frac{rp}{nr-(n-1)p},\quad P_1 = \frac{nrP}{r+(n-1)P}.$$

Weil aber nach dem Obigen überhaupt

$$p : p_1 = q : q_1$$

oder

$$P - r : P_1 - r = Q : Q_1$$

Digitized by Google

ist, so ist mit demselben Grade der Genauigkeit auch

$$q_1 = \frac{rq}{nr - (n-1)p}, \quad Q_1 = \frac{rQ}{r + (n-1)P};$$

und wir haben daher jetzt die folgenden wichtigen Näherungsformeln:

$$p_1 = \frac{rp}{nr - (n-1)p}, \quad q_1 = \frac{rq}{nr - (n-1)p}$$

und

$$P_1 = \frac{nrP}{r + (n-1)P}, \quad Q_1 = \frac{rQ}{r + (n-1)P}.$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$\frac{n}{p} - \frac{1}{p_1} = \frac{n-1}{r}, \quad \frac{n}{P_1} - \frac{1}{P} = \frac{n-1}{r}$$

und

$$\frac{n}{q} - \frac{1}{q_1} = \frac{(n-1)p}{rq}, \quad \frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q} = \frac{(n-1)P}{rQ}.$$

§. 61.

In §. 59. haben wir den einfallenden Strahl um den festen Punkt S sich so drehen lassen, daß der Einfallspunkt E sich dem Punkte A näherte, wobei also die Größe a ungeändert blieb. Wir können aber uns auch denken, daß der einfallende Strahl sich um den Einfallspunkt E als einen festen Punkt so drehe, daß der absolute Werth der Größe a ins Unendliche wächst, und demnach sin i sich der Null, cos i sich der Gränze + 1 nähert. Da bei dieser Voraussetzung, die wir jetzt genauer untersuchen wollen, der Punkt E fest ist, so wollen wir im Folgenden die constante Entfernung desselben von der Axe durch q bezeichnen, und brauchen wohl nicht erst noch besonders zu erinnern, daß die in Rede stehende Voraussetzung natürlich von selbst auf Strahlen führt, welche in der bestimmten Entfernung q von der Axe parallel mit derselben einfallen.

Zuerst erhellet nun leicht, daß allgemein

$$q = (a - a')\tang i$$

gesetzt werden kann, wo a' eine constante Größe, nämlich die mit ihrem gehörigen Zeichen genommene Entfernung der Projection des Einfallspunktes E auf der Axe von dem Punkte A bezeichnet. Also ist

$$a\tang i = q + a'\tang i,$$

und folglich

$$a\sin i = q\cos i + a'\sin i.$$

Digitized by Google

Weil nun, wenn der absolute Werth von a sich dem Unendlichen nähert,

$$\sin i \text{ und } \cos i$$

sich respective den Gränzen

$$0 \text{ und } +1$$

nähern, so nähert sich unter derselben Voraussetzung $a \sin i$ offenbar der Gränze q, was man für das Folgende wohl festzuhalten hat, da hierauf unsere folgenden Betrachtungen vorzüglich beruhen.

Die Größe

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin i = \sin i - \frac{a \sin i}{r}$$

nähert sich der Gränze

$$-\frac{q}{r};$$

und die Größe

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2$$

nähert sich folglich der Gränze

$$\left(\frac{q}{r}\right)^2.$$

Also nähern sich die beiden aus §. 59. bekannten Größen

$$A = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin i \cos i - \sin i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$B = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin i \sin i + \cos i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

den Gränzen

$$\left(-\frac{q}{r}\right) \cdot (+1) - 0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2} = -\frac{q}{r},$$

$$\left(-\frac{q}{r}\right) \cdot 0 + (+1) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2};$$

und weil nun bekanntlich

$$\sin i_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) B \sin i - A \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2},$$

$$\cos i_1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{r}\right) A \sin i + B \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \sin i^2}$$

ist, so nähern

$$\sin i_1 \text{ und } \cos i_1$$

Digitized by Google

sich respective den Gränzen

$$\frac{1}{n}\left(-\frac{q}{r}\right)\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-\left(-\frac{q}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2},$$

$$\frac{1}{n}\left(-\frac{q}{r}\right)\left(-\frac{q}{r}\right)+\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2};$$

d. i. respective den Gränzen

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{q}{r}\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+\frac{q}{r}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2};$$

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2+\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2};$$

oder den Gränzen

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{q}{r}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\},$$

$$\frac{1}{n}\cdot\left\{\left(\frac{q}{r}\right)^2+\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}.$$

Nach §. 59. ist ferner

$$r-a_1=\frac{r-a}{\left(1-\frac{a}{r}\right)B-n\frac{A}{\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}},$$

oder

$$r-a_1=\frac{\frac{r}{a}-1}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)B-n\frac{A}{a\sin i}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\sin i^2}}.$$

Also nähert sich $r-a_1$ der Gränze

$$\frac{0-1}{\left(0-\frac{1}{r}\right)\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-n\frac{\left(-\frac{q}{r}\right)}{q}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}},$$

d. i. der Gränze

$$\frac{-1}{-\frac{1}{r}\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+n\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}},$$

oder der Gränze

$$\frac{r}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}},$$

Digitized by Google

oder der Gränze

$$\frac{r}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}}.$$

Multiplicirt man aber im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2},$$

so erhält man für diese Gränze den Ausdruck

$$-\frac{r\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}}{n^2-1}$$

oder

$$-\frac{r\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}}{(n-1)(n+1)}.$$

Für Strahlen, die in der Entfernung q von der Axe parallel mit derselben einfallen, ist also immer

$$\sin i_1 = -\frac{1}{n}\cdot\frac{q}{r}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}-\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\},$$

$$\cos i_1 = \frac{1}{n}\cdot\left\{\left(\frac{q}{r}\right)^2+\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}$$

und

$$a_1 - r = \frac{r\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}}{(n-1)(n+1)}.$$

Bezeichnet man die Gränzen, denen i_1 und a_1 sich nähern, wenn q sich der Null nähert, d. h. wenn der mit der Axe parallele Strahl immer näher und näher bei der Axe einfällt, durch (i_1) und (a_1), so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\sin(i_1) = 0,\quad \cos(i_1) = +1$$

und

$$(a_1) - r = \frac{r}{n-1},\quad \text{also } (a_1) = \frac{nr}{n-1}.$$

Daß in allen diesen Formeln alle Größen ganz eben so wie in §. 58. zu nehmen sind, versteht sich von selbst, und hat man daher in dieser Beziehung die dort gegebenen Bestimmungen nachzusehen, welche natürlich stets festgehalten werden müssen.

Digitized by Google

Eilftes Kapitel.

Von den Linsen im Allgemeinen.

§. 62.

Eine Linse heißt jeder von zwei Theilen oder Segmenten zweier Kugelflächen begränzte Körper, und die gerade Linie, in welcher die Mittelpunkte der Kugelflächen liegen, denen die beiden die Linse begränzenden Kugelflächensegmente angehören, wird die Axe der Linse genannt. Die Entfernung der beiden Punkte, in welchen die Axe von den begränzenden Kugelflächensegmenten geschnitten wird, von einander heißt die Dicke der Linse. Das der beiden die Linse begränzenden Kugelflächensegmente, welches unmittelbar von den einfallenden Strahlen getroffen wird, werden wir im Folgenden die vordere Gränzfläche, das andere begränzende Kugelflächensegment die hintere Gränzfläche der Linse nennen.

§. 63.

Indem wir nun den Weg eines Strahls durch eine Linse verfolgen wollen, werden wir für die vordere Gränzfläche alle in §. 58. eingeführten Symbole beibehalten, für die hintere Gränzfläche dagegen dieselben sämmtlich mit einem obern Accent versehen, wobei es sich von selbst versteht, daß alle Größen ganz eben so, wie in dem angeführten Paragraphen vorgeschrieben worden ist, genommen werden müssen, worüber man also das Weitere dort nachzusehen hat. Die Mittelpunkte der beiden Kugelflächen, denen die vordere und hintere Gränzfläche angehören, werden wir respective durch C und C', die Durchschnittspunkte der vordern und hintern Gränzfläche mit der Axe der Linse respective durch A und A' bezeichnen. Die Dicke der Linse soll immer durch Δ bezeichnet und stets als positiv betrachtet werden; dieselbe nehmen wir immer als sehr klein an, und namentlich als so klein, daß die Einfallspunkte der Strahlen auf der vordern und hintern Gränzfläche auf einer und derselben Seite der Axe liegen. Dies vorausgesetzt, haben wir nun zur Bestimmung des Wegs eines Strahls durch eine Linse nach §. 58. die folgenden Gleichungen:

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{n}\sin\omega,$$

Digitized by Google

$$i_1 = i - (\omega - \omega_1) - k \cdot 360^0,$$

$$a_1 = r\left(1 - \frac{\sin\omega}{\sin i_1}\right) = \frac{2r \sin\frac{1}{2}(i_1 - \omega)\cos\frac{1}{2}(i_1 + \omega)}{\sin i_1};$$

$$\sin\omega' = \left(1 - \frac{a'}{r'}\right)\sin i',$$

$$\sin\omega_1' = \frac{1}{n'}\sin\omega',$$

$$i_1' = i' - (\omega' - \omega_1') - k' \cdot 360^0,$$

$$a_1' = r'\left(1 - \frac{\sin\omega'}{\sin i_1'}\right) = \frac{2r' \sin\frac{1}{2}(i_1' - \omega')\cos\frac{1}{2}(i_1' + \omega')}{\sin i_1'};$$

wo

$$k = 0, \text{ oder } k = +1, \text{ oder } k = -1$$

gesetzt werden muß, jenachdem $i - (\omega - \omega_1)$ positiv und kleiner als 360^0, oder positiv und größer als 360^0, oder negativ ist; und man eben so

$$k' = 0, \text{ oder } k' = +1, \text{ oder } k' = -1$$

zu setzen hat, jenachdem $i' - (\omega' - \omega_1')$ positiv und kleiner als 360^0, oder positiv und größer als 360^0, oder negativ ist.

Damit aber diese Formeln auch wirklich zur numerischen Rechnung angewandt werden können, hat man zu bemerken, daß allgemein

$$a' = \Delta + a_1 \text{ und } i' = i_1$$

ist, wovon man sich leicht überzeugen wird, wenn man nur überlegt, daß a_1 und a' einem und demselben Punkte der Axe entsprechen, aber a_1 von dem Punkte A und a' von dem Punkte A' an gerechnet ist. Um also die obigen Formeln zur Anwendung bei numerischen Rechnungen ganz fertig zu haben, müssen dieselben auf folgende Art dargestellt werden:

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{n}\sin\omega,$$

$$i_1 = i - (\omega - \omega_1) - k \cdot 360^0,$$

$$a_1 = r\left(1 - \frac{\sin\omega}{\sin i_1}\right) = \frac{2r \sin\frac{1}{2}(i_1 - \omega)\cos\frac{1}{2}(i_1 + \omega)}{\sin i_1};$$

$$a' = \Delta + a_1, \quad i' = i_1;$$

$$\sin\omega' = \left(1 - \frac{a'}{r'}\right)\sin i',$$

$$\sin\omega_1' = \frac{1}{n'}\sin\omega',$$

Digitized by Google

$$i_1' = i' - (\omega' - \omega_1') - k' \cdot 360^\circ,$$

$$a_1' = r' \left(1 - \frac{\sin \omega'}{\sin i_1'}\right) = \frac{2r' \sin \frac{1}{2}(i_1' - \omega') \cos \frac{1}{2}(i_1' + \omega')}{\sin i_1'}.$$

Die Größe k ist

$$= 0, +1, -1,$$

jenachdem

$$i - (\omega - \omega_1)$$

positiv und kleiner als 360°, positiv und größer als 360°, negativ ist; die Größe k′ ist

$$= 0, +1, -1,$$

jenachdem

$$i' - (\omega' - \omega_1')$$

positiv und kleiner als 360°, positiv und größer als 360°, negativ ist.

Ist die Linse auf beiden Seiten von demselben durchsichtigen Körper umgeben, was bei weitem der am häufigsten und eigentlich nur allein vorkommende Fall ist, so ist bekanntlich $nn' = 1$, also

$$n' = \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n'} = n.$$

Daß man mittelst der vorhergehenden Formeln auch leicht den Weg eines Strahls durch eine beliebige Anzahl von Linsen auf derselben Axe, deren Entfernungen von einander gegeben sind, verfolgen kann, wird leicht in die Augen fallen. Jedoch ist dabei ein Umstand zu berücksichtigen, den man nie unbeachtet lassen darf. Um dies zu erläutern, wollen wir nur noch eine zweite Linse betrachten, indem der Uebergang von dieser zu einer dritten, von dieser zu einer vierten u. s. w. ganz auf dieselbe Art gemacht werden kann. Die stets als positiv betrachtete Entfernung der zweiten Linse von der ersten wollen wir durch e bezeichnen, und alle vorher für die erste Linse gebrauchten Symbole sollen für die zweite Linse oberhalb mit einer I versehen werden. Dies vorausgesetzt, ist offenbar ganz auf ähnliche Weise wie vorher in völliger Allgemeinheit

$$\overset{1}{a} = e + a_1',$$

und es kann nun $\overset{1}{a}$ entweder positiv oder negativ sein. Wenn aber, indem wir der Kürze und Einfachheit immer bloß sehr nahe bei der Axe einfallende Strahlen ins Auge fassen, $\overset{1}{a}$ positiv und $i_1' < 90^\circ$ ist, so liegen die Einfallspunkte auf der ersten und zweiten Linse offenbar auf einer Seite der Axe, und man muß, um den Uebergang von der ersten zur zweiten Linse zu machen,

$$\overset{1}{i} = i_1''$$

setzen. Wenn dagegen $\overset{1}{a}$ positiv und $i_1' > 270^\circ$ ist, so liegen

Digitized by Google

die Einfallspunkte auf der ersten und zweiten Linse auf entgegengesetzten Seiten der Axe, und man muß also offenbar

$$\frac{1}{i} = 360^0 - i_1'$$

setzen.

Wenn $\frac{1}{a}$ negativ und $i_1' > 270^0$ ist, so liegen die Einfallspunkte auf der ersten und zweiten Linse auf einer Seite der Axe, und man muß also

$$\frac{1}{i} = i_1'$$

setzen. Wenn man diese Regeln befolgt, wird sich immer der Uebergang von der ersten zur zweiten Linse, und eben so von dieser zur dritten, von dieser zur vierten u. s. w. leicht mit völliger Sicherheit machen lassen, was nach dem Vorhergehenden nun keiner weiteren Erläuterung bedürfen wird.

§. 64.

In §. 60. haben wir für die Coordinaten P_1, Q_1 des der vordern Gränzfläche der Linse entsprechenden Bildes des durch die Coordinaten P, Q bestimmten Punktes die folgenden Ausdrücke gefunden:

$$P_1 = \frac{nrP}{r + (n-1)P}, \quad Q_1 = \frac{rQ}{r + (n-1)P}.$$

Betrachten wir aber, was offenbar verstattet ist, das durch die Coordinaten P_1, Q_1 bestimmte Bild als einen neuen leuchtenden Punkt, so entsteht von demselben auch ein neues der hintern Gränzfläche der Linse entsprechendes Bild, welches augenscheinlich das von der Linse selbst hervorgebrachte Bild des durch die Coordinaten P, Q bestimmten Punktes sein wird. Werden nun auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen für die hintere Gränzfläche der Linse alle vorher gebrauchten Symbole mit obern Accenten versehen, so haben wir für die Coordinaten P_1', Q_1' des von der Linse selbst hervorgebrachten Bildes des durch die Coordinaten P, Q bestimmten Punktes die folgenden Ausdrücke:

$$P_1' = \frac{n'r'P'}{r' + (n'-1)P'}, \quad Q_1' = \frac{r'Q'}{r' + (n'-1)P'}.$$

Bezeichnen wir aber die Abscisse des Durchschnittspunkts der hintern Gränzfläche mit der Axe in Bezug auf den Durchschnittspunkt der vordern Gränzfläche mit der Axe als Anfang durch D, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$P' = P_1 - D, \quad Q' = Q_1;$$

und wir haben daher zur Bestimmung von P_1', Q_1' jetzt die folgenden Formeln:

Digitized by Google

$$P_1 = \frac{nrP}{r + (n-1)P}, \quad Q_1 = \frac{rQ}{r + (n-1)P};$$

$$P_1' = \frac{n'r'(P_1 - D)}{r' + (n'-1)(P_1 - D)}, \quad Q_1' = \frac{r'Q_1}{r' + (n'-1)(P_1 - D)}.$$

Auch erhält man aus der ersten und dritten Gleichung leicht:

$$P = \frac{rP_1}{nr - (n-1)P_1}, \quad P_1 - D = \frac{r'P_1'}{n'r' - (n'-1)P_1'}.$$

Also ist

$$\frac{nrP}{r + (n-1)P} - \frac{r'P_1'}{n'r' - (n'-1)P_1'} = D$$

oder

$$\frac{n}{\frac{1}{P} + \frac{n-1}{r}} - \frac{1}{\frac{n'}{P_1'} - \frac{n'-1}{r'}} = D,$$

also

$$n\left(\frac{n'}{P_1'} - \frac{n'-1}{r'}\right) - \left(\frac{1}{P} + \frac{n-1}{r}\right) = D\left(\frac{1}{P} + \frac{n-1}{r}\right)\left(\frac{n'}{P_1'} - \frac{n'-1}{r'}\right),$$

oder

$$\frac{nn'}{P_1'} - \frac{1}{P} - \left\{\frac{n(n'-1)}{r'} + \frac{n-1}{r}\right\} = D\left(\frac{1}{P} + \frac{n-1}{r}\right)\left(\frac{n'}{P_1'} - \frac{n'-1}{r'}\right),$$

oder

$$\left\{\frac{n-1}{r} + \frac{n(n'-1)}{r'}\right\} + \left(\frac{1}{P} - \frac{nn'}{P_1'}\right) = D\left(\frac{n-1}{r} + \frac{1}{P}\right)\left(\frac{n'-1}{r'} - \frac{n'}{P_1'}\right).$$

Ist aber $nn' = 1$, so ist

$$(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P_1'}\right) = -\frac{D}{n}\left(\frac{n-1}{r} + \frac{1}{P}\right)\left(\frac{n-1}{r'} + \frac{1}{P_1'}\right).$$

Auch ist nach dem Obigen

$$P_1' = \frac{n'r'}{n' - 1 - \frac{r'}{D - P_1}} = \frac{n'r'}{n' - 1 - \frac{r'}{D - \frac{nr}{n - 1 + \frac{r}{P}}}},$$

Digitized by Google

und auf ähnliche Weise

$$P = -\frac{r}{n-1-\frac{nr}{P_1}} = -\frac{r}{n-1-\frac{nr}{D-\frac{r'}{n'-1-\frac{n'r'}{P_1'}}}}.$$

Bezeichnen wir die Werthe, welche P_1' und P erhalten, wenn man sich respective die absoluten Werthe von P und P_1' dem Unendlichen nähern läßt, durch F_1' und F, so ist nach dem Vorhergehenden

$$F_1' = \frac{n'r'}{n'-1-\frac{r'}{D-\frac{nr}{n-1}}}$$

und

$$F = -\frac{r}{n-1-\frac{nr}{D-\frac{r'}{n'-1}}}.$$

Wenn $nn' = 1$ ist, so erhält man aus der oben bewiesenen Gleichung

$$(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{P_1'}\right) = -\frac{D}{n}\left(\frac{n-1}{r}+\frac{1}{P}\right)\left(\frac{n-1}{r'}+\frac{1}{P_1'}\right)$$

auch leicht:

$$\frac{1}{P} = -\frac{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}-\left(1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\right)\frac{1}{P_1'}}{1+\frac{D}{n}\left(\frac{n-1}{r'}+\frac{1}{P_1'}\right)},$$

$$\frac{1}{P_1'} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}+\left(1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}\right)\frac{1}{P}}{1-\frac{D}{n}\left(\frac{n-1}{r}+\frac{1}{P}\right)};$$

also

$$\frac{1}{F} = -\frac{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}{1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}},$$

$$\frac{1}{F_1'} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}{1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}};$$

Digitized by Google

oder

$$P = -\frac{1+\frac{D}{n}\left(\frac{n-1}{r'}+\frac{1}{P_1'}\right)}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}-\left(1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\right)\frac{1}{P_1'}},$$

$$P_1' = \frac{1-\frac{D}{n}\left(\frac{n-1}{r}+\frac{1}{P}\right)}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}+\left(1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}\right)\frac{1}{P}}$$

und

$$F = -\frac{1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}},$$

$$F_1' = \frac{1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$F = -\frac{Z}{N},\quad F_1' = \frac{3}{N};$$

so ist

$$P = -\frac{Z+\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{P_1'}}{N-3\cdot\frac{1}{P_1'}},\quad P_1' = \frac{3-\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{P}}{N+Z\cdot\frac{1}{P}};$$

also ist, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$P - F = \frac{NP+Z}{N} = -\frac{\frac{D}{n}N+Z3}{N(NP_1'-3)},$$

$$P_1' - F_1' = \frac{NP_1'-3}{N} = -\frac{\frac{D}{n}N+Z3}{N(NP+Z)};$$

folglich

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -\frac{\frac{D}{n}N+Z3}{N^2}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\frac{D}{n}N+Z3 = 1,$$

Digitized by Google

also

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -\left\{\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}\right\}^2$$

oder

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -\left\{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}\right\}^{-2},$$

wodurch wir zu dem bemerkenswerthen Resultate geführt werden, daß das Product

$$(P-F)(P_1'-F_1')$$

einem constanten negativen Quadrate gleich ist.

Für $D = 0$, d. h. wenn man die Dicke der Linse als verschwindend betrachtet, ist

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -\left\{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\right\}^{-2}.$$

Weil nach dem Obigen

$$Q_1 = \frac{rQ}{r+(n-1)P}, \quad Q_1' = \frac{r'Q_1}{r'+(n'-1)(P_1-D)}$$

ist; so ist

$$Q_1' = \frac{rr'Q}{\{r+(n-1)P\}\{r'+(n'-1)(P_1-D)\}},$$

und folglich

$$\frac{Q}{Q_1'} = \left\{1+(n-1)\frac{P}{r}\right\}\left\{1+(n'-1)\frac{P_1-D}{r'}\right\}.$$

Weil aber

$$P_1 - D = \frac{r'P_1'}{n'r'-(n'-1)P_1'}$$

ist, so ist

$$1+(n'-1)\frac{P_1-D}{r'} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n'}-1\right)\frac{P_1'}{r'}},$$

also

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{1+(n-1)\frac{P}{r}}{1+\left(\frac{1}{n'}-1\right)\frac{P_1'}{r'}},$$

und folglich, wenn $nn' = 1$ ist:

Digitized by Google

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{1 + (n-1)\frac{P}{r}}{1 + (n-1)\frac{P_1'}{r'}}.$$

Also ist auch in diesem Falle

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{1 + (n-1)\frac{F}{r} + (n-1)\frac{P-F}{r}}{1 + (n-1)\frac{F_1'}{r'} + (n-1)\frac{P_1'-F_1'}{r'}}.$$

Aber, wie man mittelst der aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von F und F_1' leicht findet:

$$1 + (n-1)\frac{F}{r} = -\frac{\frac{1}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + (n-1)\cdot\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r'}},$$

$$1 + (n-1)\frac{F_1'}{r'} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + (n-1)\cdot\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r'}}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$K = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}},$$

so ist

$$1 + (n-1)\frac{F}{r} = -\frac{(n-1)K}{r'},\quad 1 + (n-1)\frac{F_1'}{r'} = \frac{(n-1)K}{r};$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{Q}{Q_1'} = -\frac{\frac{K}{r'} - \frac{P-F}{r}}{\frac{K}{r} + \frac{P_1'-F_1'}{r'}}.$$

Nun ist aber, wie vorher gezeigt worden ist:

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -K^2,$$

also

$$P_1' - F_1' = -\frac{K^2}{P-F},$$

und folglich

$$\frac{Q}{Q_1'} = -\frac{\frac{K}{r'} - \frac{P-F}{r}}{\frac{K}{r} - \frac{K}{r'}\cdot\frac{K}{P-F}} = \frac{P-F}{K}\cdot\frac{\frac{K}{r'} - \frac{P-F}{r}}{\frac{K}{r'} - \frac{P-F}{r}},$$

Digitized by Google

d. i.

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K} = -\frac{K}{P_1'-F_1'},$$

und folglich auch

$$\left(\frac{Q}{Q_1'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P_1'-F_1'}.$$

Führt man für K seinen Werth ein, so erhält man:

$$\frac{Q}{Q_1'} = (P-F)\left\{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}\right\},$$

$$\frac{Q_1'}{Q} = -(P_1'-F_1')\left\{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}\right\}.$$

Mittelst dieser eleganten Formeln kann man das Verhältniß

$$\frac{Q}{Q_1'} \text{ oder } \frac{Q_1'}{Q}$$

ohne Schwierigkeit berechnen.

Die oben bewiesene Gleichung

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -K^2$$

kann auch auf die Form

$$\frac{1}{P-F\mp K} - \frac{1}{P_1'-F_1'\pm K} = \mp\frac{1}{K}$$

gebracht werden, wie sich leicht auf folgende Art zeigen läßt. Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten der zu beweisenden Gleichung mit

$$K(P-F\mp K)(P_1'-F_1'\pm K),$$

so erhält man

$$K(P_1'-F_1'\pm K)-K(P-F\mp K)=\mp(P-F\mp K)(P_1'-F_1'\pm K),$$

also

$$K(P_1'-F_1'-P+F)\pm 2K^2$$
$$=\mp(P-F)(P_1'-F_1')+K(P_1'-F_1'-P+F)\pm K^2,$$

folglich, wenn man aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$\pm K^2 = \mp(P-F)(P_1'-F_1')$$

oder

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -K^2,$$

und da nun diese Gleichung nach dem Obigen wirklich Statt findet, so ist auch die zu beweisende Gleichung richtig, d. h. es

Digitized by Google

ist immer, natürlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$\frac{1}{P - F \mp K} - \frac{1}{P_1' - F_1' \pm K} = \mp \frac{1}{K}.$$

Bezeichnen wir die Abscissen der beiden durch die primitiven Abscissen F, F_1' bestimmten Punkte der Axe der Linse in Bezug auf die beiden durch die primitiven Abscissen P, P_1' der Axe bestimmten Punkte als Anfangspunkte respective durch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1'$; so ist

$$F = P + \mathfrak{F}, \quad F_1' = P_1' + \mathfrak{F}_1';$$

also

$$\mathfrak{F} = F - P = -(P - F),$$
$$\mathfrak{F}_1' = F_1' - P_1' = -(P_1' - F_1');$$

und folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1' = -K^2.$$

Bezeichnen wir jetzt in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen P, P_1' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte die Abscissen zweier in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen F, F_1' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte durch die Abscissen $+K$, $-K$ bestimmten Punkte der Axe respective durch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1'$; so ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F} + K, \quad \mathfrak{H}_1' = \mathfrak{F}_1' - K;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{H} = F - P + K, \quad \mathfrak{H}_1' = F_1' - P_1' - K;$$

und folglich

$$P - F - K = -\mathfrak{H}, \quad P_1' - F_1' + K = -\mathfrak{H}_1'.$$

Daher ist nach der obigen Gleichung, wenn man in derselben die obern Zeichen nimmt:

$$\frac{1}{\mathfrak{H}} - \frac{1}{\mathfrak{H}_1'} = \frac{1}{K}.$$

Bezeichnen wir endlich in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen P, P_1' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte die Abscissen zweier in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen F, F_1' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte durch die Abscissen $-K$, $+K$ bestimmten Punkte der Axe respective durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1'$, so ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} - K, \quad \mathfrak{G}_1' = \mathfrak{F}_1' + K;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{G} = F - P - K, \quad \mathfrak{G}_1' = F_1' - P_1' + K;$$

Digitized by Google

und folglich

$$P - F + K = - G, \quad P_1' - F_1' - K = - G_1'.$$

Daher ist nach der obigen Gleichung, wenn man in derselben die untern Zeichen nimmt:

$$\frac{1}{G} - \frac{1}{G_1'} = - \frac{1}{K}.$$

Die in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen P, P_1', welche bekanntlich die Abscissen des leuchtenden Punktes und seines Bildes sind, bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte durch die Abscissen F, F_1'; H, H_1'; G, G_1' bestimmten Punkte der Axe werden gewöhnlich respective die Brennpunkte, Hauptpunkte, Gegenpunkte der Linse genannt; und die Größen F, F_1' nennt man meistens die beiden Brennweiten derselben.

Für

$$K = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'}}$$

oder

$$K = \left\{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'}\right\}^{-}$$

hat man nach dem Vorhergehenden für die Brennpunkte, Hauptpunkte und Gegenpunkte die Gleichungen:

$$FF_1' = - K^2;$$

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{H_1'} = \frac{1}{K}, \quad \frac{1}{G} - \frac{1}{G_1'} = - \frac{1}{K};$$

in denen sich, insofern wir den strahlenden Punkt in der Axe der Linse liegend annehmen, alle Abscissen auf den strahlenden Punkt und sein gleichfalls in der Axe der Linse liegendes Bild als Anfangspunkte beziehen.

Aus den gegebenen Brennweiten F und F_1' der Linse kann man die Halbmesser r und r' ihrer beiden Gränzflächen berechnen. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\frac{1}{F} = - \frac{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'}}{1 + \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r'}},$$

$$\frac{1}{F_1'} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'}}{1 - \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r}};$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{1}{F} = -\frac{\left(1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}\right)\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r'}}{1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}},$$

$$\frac{1}{F_1'} = \frac{\frac{n-1}{r} - \left(1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\right)\frac{n-1}{r'}}{1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}}.$$

Setzen wir nun

$$x = 1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r},\quad y = 1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'};$$

so ist

$$\frac{n-1}{r} = \frac{1-x}{\frac{D}{n}},\quad \frac{n-1}{r'} = -\frac{1-y}{\frac{D}{n}};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{F} = -\frac{(1-x)\,y+(1-y)}{y} = -\frac{1-xy}{y},$$

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{F_1'} = \frac{1-x+x(1-y)}{x} = \frac{1-xy}{x};$$

woraus sich auch sogleich

$$\frac{F}{F_1'} = -\frac{y}{x}$$

ergiebt. Weil nun

$$y = -\frac{F}{F_1'}x$$

ist, so ist

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{F} = \frac{1+\frac{F}{F_1'}x^2}{\frac{F}{F_1'}x},$$

also

$$\frac{F}{F_1'}x^2 - \frac{D}{n}\cdot\frac{1}{F_1'}x + 1 = 0$$

oder

$$x^2 - \frac{D}{n}\cdot\frac{1}{F}x + \frac{F_1'}{F} = 0.$$

Digitized by Google

Löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man

$$x = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4n^2 FF_1'}}{2nF}$$

oder

$$x = \frac{D}{2nF}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n^2 FF_1'}{D^2}}\right);$$

und weil nun nach dem Obigen

$$y = -\frac{F}{F_1'}x$$

ist, so ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$x = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4n^2 FF_1'}}{2nF},$$

$$y = -\frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4n^2 FF_1'}}{2nF_1'}$$

oder

$$x = \frac{D}{2nF}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n^2 FF_1'}{D^2}}\right),$$

$$y = -\frac{D}{2nF_1'}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n^2 FF_1'}{D^2}}\right).$$

Hat man x und y, so findet man r und r' mittelst der folgenden aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$r = \frac{n-1}{n(1-x)}D = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-x}D,$$

$$r' = -\frac{n-1}{n(1-y)}D = -\frac{1-\frac{1}{n}}{1-y}D.$$

Man sieht hieraus zugleich, daß die Aufgabe, aus den Brennweiten einer Linse ihre Halbmesser zu bestimmen, im Allgemeinen zwei Auflösungen zuläßt.

§. 65.

Wir wollen nun noch den Weg eines parallel mit der Axe der Linse einfallenden Strahls durch dieselbe verfolgen.

Nach §. 61. ist, wenn alle Symbole ihre dortigen Bedeutungen behalten, für die vordere Gränzfläche der Linse:

$$\sin i_1 = -\frac{1}{n} \cdot \frac{q}{r}\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2} - \sqrt{n^2 - \left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot \frac{q}{r}\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{r}\right)^2} - n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\},$$

Digitized by Google

$$\cos i_1 = \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{q}{r}\right)^2 + \sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{q}{r}\right)^2 + n\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}$$

und

$$a_1 - r = \frac{r\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+\sqrt{n^2-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{r\left\{\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}+n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}\right\}}{(n-1)(n+1)}.$$

Ferner ist nach §. 59. für die hintere Gränzfläche der Linse, wenn für dieselbe alle dort gebrauchten Symbole mit obern Accenten versehen werden, und wir zugleich $nn' = 1$ setzen:

$$A' = \left(1-\frac{a'}{r'}\right)\sin i'\cos i' - \sin i'\sqrt{1-\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2},$$

$$B' = \left(1-\frac{a'}{r'}\right)\sin i'\sin i' + \cos i'\sqrt{1-\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2}$$

und

$$\frac{A'}{\sin i'} = \left(1-\frac{a'}{r'}\right)\cos i' - \sqrt{1-\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2};$$

ferner

$$\sin i_1' = n\left(1-\frac{a'}{r'}\right)B'\sin i' - A'\sqrt{1-n^2\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2},$$

$$\cos i_1' = n\left(1-\frac{a'}{r'}\right)A'\sin i' + B'\sqrt{1-n^2\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2};$$

und

$$1-\frac{a_1'}{r'} = \frac{1-\frac{a'}{r'}}{\left(1-\frac{a'}{r'}\right)B' - \frac{A'}{\sin i'}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2}}$$

$$= \frac{1-\frac{a'}{r'}}{\left(1-\frac{a'}{r'}\right)B' - \frac{1}{n}\cdot\frac{A'}{\sin i'}\sqrt{1-n^2\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2}}.$$

Nimmt man hierzu nun noch, daß offenbar $i' = i_1$ und, wenn Δ die als positiv betrachtete Dicke der Linse bezeichnet,

$$a' = \Delta + a_1$$

Digitized by Google

ist, so wird auf der Stelle erhellen, daß sich mittelst der obigen Formeln immer die Lage des ausfahrenden Strahls bestimmen läßt.

Unter der Voraussetzung aber, daß Δ und q sehr kleine Größen sind, wollen wir jetzt die vorhergehenden Formeln so weit entwickeln, daß dieselben bis auf Glieder, welche in Bezug auf die beiden in Rede stehenden sehr kleinen Größen von der zweiten Ordnung sind, als genau betrachtet werden können, welche Bestimmung man also im Folgenden stets festzuhalten hat.

Zuerst ist

$$\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}=1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2,\quad \sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}=1-\frac{1}{2n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2;$$

also

$$\sqrt{1-\left(\frac{q}{r}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2}=1-\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{q}{r}\right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\sin i_1=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{q}{r},$$

so wie

$$\cos i_1=\frac{1}{n}\left\{n-\tfrac{1}{2}\left(n-2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\left\{n-\frac{n^2-2n+1}{2n}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\},$$

d. i.

$$\cos i_1=1-\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{q}{r}\right)^2;$$

wie es nach dem Vorhergehenden auch sein muß, weil

$$\cos i_1=\sqrt{1-\sin i_1{}^2}=\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{q}{r}\right)^2},$$

und folglich

$$\cos i_1=1-\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{q}{r}\right)^2$$

ist, was ganz mit dem vorher gefundenen Ausdrucke übereinstimmt.

Ferner ist immer mit demselben Grade der Genauigkeit

$$a_1-r=\frac{r\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{r}\right)^2+n-\frac{1}{2n}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{r\left\{(n+1)-\frac{n+1}{2n}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{(n-1)(n+1)},$$

Digitized by Google

also

$$a_1 - r = \frac{r\left\{1 - \frac{1}{2n}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{n-1},$$

und folglich

$$a_1 = \frac{r\left\{n - \frac{1}{2n}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{n-1}$$

oder

$$a_1 = \frac{nr\left\{1 - \frac{1}{2n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{n-1}.$$

Weil nun $a' = \Delta + a_1$ ist, so ist

$$a' = \Delta + \frac{nr\left\{1 - \frac{1}{2n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{n-1},$$

und folglich

$$1 - \frac{a'}{r'} = 1 - \frac{\Delta}{r'} - \frac{nr\left\{1 - \frac{1}{2n^2}\left(\frac{q}{r}\right)^2\right\}}{(n-1)r'},$$

oder

$$1 - \frac{a'}{r'} = \frac{(n-1)(r'-\Delta) - nr}{(n-1)r'} + \frac{1}{2n(n-1)} \cdot \frac{q^2}{rr'},$$

oder

$$1 - \frac{a'}{r'} = \frac{n}{n-1}\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{r'}\right) - \frac{r}{r'}\right\} + \frac{1}{2n(n-1)} \cdot \frac{q^2}{rr'}.$$

Weil ferner $i' = i_1$ ist, so ist

$$\sin i' \cos i' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{q}{r}, \quad \sin i' \sin i' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{q}{r}\right)^2$$

und

$$\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a'}{r'}\right)^2 \sin i'^2} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)^2\left(\frac{q}{r}\right)^2,$$

wobei man nur stets festzuhalten hat, daß bloß noch solche Glieder berücksichtigt werden, welche in Bezug auf Δ und q von der zweiten Ordnung sind, also schon alle Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden. Also ist

$$\left(1 - \frac{a'}{r'}\right)\sin i' \cos i' = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{r'}\right) - \frac{r}{r'}\right\} \cdot \frac{q}{r},$$

$$\left(1 - \frac{a'}{r'}\right)\sin i' \sin i' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right) \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^2$$

Digitized by Google

und

$$\sin i' \sqrt{1-\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin i'^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{q}{r},$$

$$\cos i' \sqrt{1-\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin i'^2} = 1-\tfrac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$A' = -\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}+\frac{r}{r'}\right\}\cdot\frac{q}{r}$$

und, wie leicht erhellet:

$$B' = 1-\tfrac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\right\}^2\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2,$$

d. i.

$$B' = 1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{r'}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich ferner leicht

$$\left(1-\frac{a'}{r'}\right)B' = \frac{n}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta}{r'}\right)-\frac{r}{r'}\right\} + \frac{1}{2n(n-1)}\cdot\frac{q^2}{rr'} - \frac{n}{2(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\cdot\left(\frac{q}{r'}\right)^2.$$

Nun ist, wie man leicht findet:

$$\left(1-\frac{a'}{r'}\right)\cos i' = \frac{n}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta}{r'}\right)-\frac{r}{r'}\right\} + \frac{1}{2n(n-1)}\cdot\frac{q^2}{rr'} - \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\left(\frac{q}{r}\right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{A'}{\sin i'} = -\frac{n}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}+\frac{r}{r'}\right\} + \frac{1}{2n(n-1)}\cdot\frac{q^2}{rr'} - \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\left(\frac{q}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2,$$

Digitized by Google

also

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{A'}{\sin i'} = -\frac{1}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}+\frac{r}{r'}\right\}$$
$$+\frac{1}{2n^2(n-1)}\cdot\frac{q^2}{rr'}$$
$$-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\left(\frac{q}{r}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2$$

Weil nun, wie man leicht findet:

$$\sqrt{1-n^2\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2} = 1-\tfrac{1}{2}n^2\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2$$

ist, so ist

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{A'}{\sin i'}\sqrt{1-n^2\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2}$$
$$= -\frac{1}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}+\frac{r}{r'}\right\}$$
$$+\frac{1}{2n^2(n-1)}\cdot\frac{q^2}{rr'}$$
$$-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\left(\frac{q}{r}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^2$$
$$+\frac{n^2}{2(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\cdot\frac{q^2}{rr'}.$$

Auch ist nach dem Obigen:

$$\left(1-\frac{a'}{r'}\right)B' = \frac{n}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta}{r'}\right)-\frac{r}{r'}\right\}$$
$$+\frac{1}{2n(n-1)}\cdot\frac{q^2}{rr'}$$
$$-\frac{n}{2(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\cdot\left(\frac{q}{r'}\right)^2,$$

und folglich

$$\left(1-\frac{a'}{r'}\right)B' - \frac{1}{n}\cdot\frac{A'}{\sin i'}\sqrt{1-n^2\left(1-\frac{a'}{r'}\right)^2\sin i'^2}$$

Digitized by Google

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'} - \frac{r}{r'}$$
$$+ \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)\right\}\left(\frac{q}{r}\right)^2$$
$$- \frac{n}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)\cdot\left(\frac{q}{r'}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)^2\right\}\cdot\frac{q^2}{rr'}$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'} - \frac{r}{r'}$$
$$+ \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)\cdot\frac{q^2}{rr'}$$
$$- \frac{n}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)\cdot\left(\frac{q}{r'}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)^2\right\}\cdot\frac{q^2}{rr'}$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'} - \frac{r}{r'}$$
$$- \frac{n}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)\cdot\left(\frac{q}{r'}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right) - \frac{n^2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)^2\right\}\cdot\frac{q^2}{rr'}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$P = \frac{n}{n-1}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{r'}\right) - \frac{r}{r'}\right\},$$
$$Q = \frac{1}{2n(n-1)}\cdot\frac{1}{rr'},$$
$$P_1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'} - \frac{r}{r'},$$
$$Q_1 = -\frac{n}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{rr'}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)r'$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{rr'}\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right) - \frac{n^2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}\right)^2\right\};$$

so ist nach dem Obigen

$$1 - \frac{s'_1}{r'} = \frac{P + Q\,q^2}{P_1 + Q_1\,q^2},$$

und folglich, wie man durch Division leicht findet:

$$1 - \frac{s'_1}{r'} = \frac{P}{P_1} - \frac{PQ_1 - QP_1}{P_1 P_1}\,q^2,$$

oder

$$\frac{s'_1}{r'} = 1 - \frac{P}{P_1} + \frac{PQ_1 - QP_1}{P_1 P_1}\,q^2.$$

Digitized by Google

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{P}{P_1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta}{r'}\right)-\frac{r}{r'}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}-\frac{r}{r'}},$$

und folglich

$$1-\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta}{r'}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{r}{r'}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}-\frac{r}{r'}},$$

oder

$$1-\frac{P}{P_1} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{nr+(n-1)\Delta}{n(r'-r)-(n-1)\Delta};$$

also

$$\left(1-\frac{P}{P_1}\right)r' = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{nr+(n-1)\Delta}{n(r'-r)-(n-1)\Delta}r',$$

oder auch

$$\left(1-\frac{P}{P_1}\right)r' = \frac{1+\frac{\Delta}{n}\cdot\frac{n-1}{r}}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)-\frac{\Delta}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}.$$

Es ist also

$$\frac{a_1'}{r'} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{nr+(n-1)\Delta}{n(r'-r)-(n-1)\Delta}+\frac{PQ_1-QP_1}{P_1P_1}q^2$$

oder

$$a_1' = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{nr+(n-1)\Delta}{n(r'-r)-(n-1)\Delta}r'+\frac{PQ_1-QP_1}{P_1P_1}r'q^2.$$

Da die Größe

$$\frac{PQ_1-QP_1}{P_1P_1}$$

in vorstehender Gleichung in q^2 multiplicirt ist, so können wir, um dieselbe zu berechnen, nach dem Obigen

$$P = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right),$$

$$Q = \frac{1}{2n(n-1)}\cdot\frac{1}{rr'};$$

$$P_1 = 1-\frac{r}{r'},$$

$$Q_1 = -\frac{n}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{rr'}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)\frac{r}{r'}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{rr'}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)-\frac{n^2}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}\right)^2\right\};$$

Digitized by Google

oder, wenn der Kürze wegen

$$u = 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}$$

gesetzt wird:

$$P = \frac{n}{n-1} u,$$

$$Q = \frac{n}{2n(n-1)} \cdot \frac{1}{rr'};$$

$$P_1 = 1 - \frac{r}{r'},$$

$$Q_1 = -\frac{n}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{rr'} \cdot \frac{r}{r'} u + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{rr'} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} u - \frac{n^2}{n-1} u^2 \right\}$$

setzen.

Hieraus erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$rr'(PQ_1 - QP_1) = -\frac{1}{2n(n-1)} \left(1 - \frac{r}{r'}\right) + \frac{1}{2n(n-1)} u + \frac{1}{2(n-1)} \left(1 - \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{r}{r'}\right) u^2 - \frac{n^3}{2(n-1)^2} u^3$$

oder

$$rr'(PQ_1 - QP_1) = -\frac{1}{2n(n-1)} \left(1 - \frac{r}{r'}\right) + \frac{1}{2(n-1)} u \left\{ \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{r}{r'}\right) u - \frac{n^3}{n-1} u^2 \right\}.$$

Führt man aber in die Größe

$$\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{r}{r'}\right) u - \frac{n^3}{n-1} u^2$$

für u seinen aus dem Obigen bekannten Werth ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{r}{r'}\right) u - \frac{n^3}{n-1} u^2 = 1 - n(n-1) - \left\{1 - n(2n-1)\right\} \frac{r}{r'} - n^3 \left(\frac{r}{r'}\right)^2,$$

und folglich, wenn man mit $1 - \frac{r}{r'}$ in die Größe auf der rechten Seite dividirt:

Digitized by Google

$$\frac{1}{n}+\left(1-\frac{n^2}{n-1}\cdot\frac{r}{r'}\right)u-\frac{n^3}{n-1}u^2$$
$$=\left(1-\frac{r}{r'}\right)\left\{1-n(n-1)+n^2\frac{r}{r'}\right\}$$
$$=\left(1-\frac{r}{r'}\right)\left\{n+1-n^2\left(1-\frac{r}{r'}\right)\right\},$$

oder, weil

$$1-\frac{r}{r'}=\frac{1}{n}+u$$

ist:

$$\frac{1}{n}+\left(1-\frac{n^2}{n-1}\cdot\frac{r}{r'}\right)u-\frac{n^3}{n-1}u^2=\left(1-\frac{r}{r'}\right)\left(1-n^2u\right).$$

Also ist nach dem Obigen

$$\frac{2n(n-1)\,rr'(PQ_1-QP_1)}{1-\frac{r}{r'}}=-1+nu(1-n^2u)$$
$$=-1+nu-n^3u^2,$$

und folglich, wenn wir

$$F=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{rr'}{r'-r}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{r}{1-\frac{r}{r'}},$$

also

$$\frac{r}{1-\frac{r}{r'}}=(n-1)F$$

setzen:

$$2n(n-1)^2Fr'(PQ_1-QP_1)=-1+nu-n^3u^2.$$

Daher ist

$$\frac{PQ_1-QP_1}{P_1P_2}r'=-\frac{1}{2n(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^3u^2}{F\left(1-\frac{r}{r'}\right)^2}$$

oder

$$\frac{PQ_1-QP_1}{P_1P_2}r'=-\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^3u^2}{F(1+nu)^2}.$$

Für

$$F=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{rr'}{r'-r}\text{ und }u=1-\frac{1}{n}-\frac{r}{r'}$$

ist also nach dem Obigen

$$a_1'=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{nr+(n-1)\Delta}{n(r'-r)-(n-1)\Delta}r'-\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^3u^2}{F(1+nu)^2}q^2.$$

Digitized by Google

Für $\sin i_1'$ erhält man mittelst der obigen Formeln leicht den folgenden Ausdruck:

$$\sin i_1' = n \cdot \frac{n}{n-1}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta}{r'}\right)-\frac{r}{r'}\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{q}{r} + \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}+\frac{r}{r'}\right\}\cdot\frac{q}{r},$$

also

$$\sin i_1' = (n-1)\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta}{r'}-\frac{r}{r'}\right\}\frac{q}{r}.$$

Für $\Delta = 0$ wird

$$\sin i_1' = (n-1)\left(1-\frac{r}{r'}\right)\frac{q}{r}$$

oder

$$\sin i_1' = (n-1)\cdot\frac{r'-r}{rr'}q,$$

folglich nach dem Obigen

$$\sin i_1' = \frac{q}{F}.$$

Der vorher für die Größe a_1' entwickelte Ausdruck besteht aus den beiden Theilen

$$\frac{1}{n-1}\cdot\frac{nr+(n-1)\Delta}{n(r'-r)-(n-1)\Delta}r' \text{ und } -\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^2u^2}{F(1+nu)^2}q^2.$$

Die erste dieser beiden Größen ist die Gränze, welcher die Größe a_1' sich nähert, wenn q sich der Null nähert, d. h. wenn die der Axe der Linse parallel einfallenden Strahlen sich der Axe nähern, und wird, wie auch schon aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannt ist, die Brennweite der Linse genannt, aus ganz ähnlichen hier nicht zu wiederholenden Gründen wie nach §. 38. bei sphärischen Spiegeln. Um den in diesem Paragraphen gefundenen Ausdruck der Brennweite mit dem im vorhergehenden Paragraphen auf anderem Wege gefundenen Ausdrucke übereinstimmend zu machen, braucht man in ersterem für Δ nur $-D$ zu setzen, wovon die Nothwendigkeit sogleich in die Augen fallen wird, wenn man sich nur an die Bedeutungen erinnert, welche in diesem und in dem vorhergehenden Paragraphen den Symbolen Δ und D beigelegt worden sind.

Die Größe

$$-\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^2u^2}{F(1+nu)^2}q^2$$

heißt die Längenabweichung der Linse für die sogenannte Oeffnung q derselben und für mit ihrer Axe parallel einfallende Strahlen. Die Größe

$$-\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^2u^2}{F(1+nu)^2}\operatorname{tang} i_1'\cdot q^2,$$

Digitized by Google

wofür aber für sehr nahe bei der Axe einfallende Strahlen ohne merklichen Fehler

$$-\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^3u^2}{F(1+nu)^2}\sin i_1'\cdot q^2,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$-\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{1-nu+n^3u^2}{F^3(1+nu)^2}\cdot q^3$$

gesetzt werden kann, heißt dagegen die Seitenabweichung für die sogenannte Oeffnung*) q derselben und für mit ihrer Axe parallel einfallende Strahlen. Die Längenabweichung und die Seitenabweichung einer Linse bilden zusammen die Kugelabweichung oder die sphärische Abweichung oder sphärische Aberration derselben, auf ganz ähnliche Art, wie in §. 37. bei sphärischen Spiegeln weiter erläutert worden ist.

§. 66.

Man kann sich die Frage vorlegen, ob die Halbmesser der eine Linse begränzenden Kugelflächensegmente so bestimmt werden können, daß ihre Kugelabweichung verschwindet, welches nach dem Obigen der Fall sein würde, wenn sich die Größe u so bestimmen ließe, daß

$$1-nu+n^3u^2=0$$

oder

$$u^2-\frac{1}{n^3}u=-\frac{1}{n^3}$$

wäre. Lösen wir diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhalten wir

$$u=\frac{1\pm\sqrt{1-4n}}{2n^2}$$

Nun ist aber für Luft und Glas nahe $n=1{,}5$; also jedenfalls $1-4n$ eine negative Größe, so daß die Wurzeln unserer quadratischen Gleichung beide imaginär sind, und folglich die Halbmesser der Linse, von denen die Größe u bekanntlich abhängt, nicht so bestimmt werden können, daß die Kugelabweichung verschwindet.

Wir müssen daher, wenn wir für die Praxis einigen Gewinn haben wollen, die vorhergehende Frage auf eine andere Art stellen. Ueberlegen wir aber, daß die im Vorhergehenden durch F bezeichnete Größe offenbar der Werth der Brennweite für $\Delta=0$ ist, und daher unter Voraussetzung einer sehr geringen Dicke wenigstens ohne allen merklichen Fehler als die Brennweite selbst betrachtet werden kann, daß ferner q die sogenannte Oeffnung der Linse ist, so kann man sich die Aufgabe stellen: die Halbmesser der Linse so zu bestimmen, daß unter Voraussetzung derselben Brennweite und derselben

*) Eigentlich ist q nur die halbe Oeffnung; m. s. auch §. 37. bei den Spiegeln.

Digitized by Google

ben Oeffnung die Längenabweichung oder die Seitenabweichung ein Minimum oder ein Maximum wird. Um diese Frage beantworten zu können, wollen wir nun zuerst die Größe u so zu bestimmen suchen, daß die Größe

$$\frac{1-nu+n^3u^2}{(1+nu)^2}$$

ein Minimum oder ein Maximum wird, indem dadurch offenbar zugleich die Beantwortung unserer vorhergehenden Frage gegeben sein wird, wie auf der Stelle aus den oben für die beiden Abweichungen gefundenen allgemeinen Ausdrücken selbst erhellet.

Setzen wir aber

$$1+nu = x, \text{ also } u = \frac{x-1}{n};$$

so ist

$$1-nu+n^3u^2 = 1-(x-1)+n(x-1)^2,$$

d. i., wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$1-nu+n^3u^2 = n+2-(2n+1)x+nx^2,$$

und folglich, wenn wir

$$U = \frac{1-nu+n^3u^2}{(1+nu)^2}$$

setzen:

$$U = n-(2n+1)\frac{1}{x}+(n+2)\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

also für $y = \frac{1}{x}$:

$$U = n-(2n+1)y+(n+2)y^2.$$

Lassen wir nun y eine beliebige Veränderung erleiden, die wir durch Δy bezeichnen wollen, und bezeichnen die dadurch herbeigeführte Veränderung von U auf ähnliche Weise durch ΔU, so daß also, wenn y in $y+\Delta y$ übergeht, U in $U+\Delta U$ übergeht; so ist

$$U+\Delta U = n-(2n+1)(y+\Delta y)+(n+2)(y+\Delta y)^2,$$

und folglich, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$U+\Delta U$$
$$= n-(2n+1)y+(n+2)y^2-\{(2n+1)-2(n+2)y\}\Delta y+(n+2)\Delta y^2.$$

Wäre nun, wobei y als eine bestimmte oder constante Größe aufzufassen ist, nicht

$$(2n+1)-2(n+2)y = 0,$$

so würde man jederzeit Δy so nahe bei Null annehmen können, daß der absolute Werth von

$$\{(2n+1)-2(n+2)y\}\Delta y$$

Digitized by Google

größer wäre als der absolute Werth von $(n+2)\Delta y^2$, weil man ja offenbar, um diese Bedingung zu erfüllen, bloß den absoluten Werth von Δy kleiner als den absoluten Werth von

$$\frac{(2n+1)-2(n+2)y}{n+2} = \frac{2n+1}{n+2} - 2y$$

anzunehmen brauchte, was jederzeit möglich ist. Dann würde aber das Vorzeichen der Größe

$$-\{(2n+1)-2(n+2)y\}\,\Delta y+(n+2)\Delta y^2$$

bloß von dem Gliede

$$-\{(2n+1)-2(n+2)y\}\,\Delta y$$

abhängen, und diese Größe also ihr Zeichen wechseln, wenn Δy sein Zeichen wechselte, folglich $U+\Delta U$ das eine Mal größer, das andere Mal kleiner als

$$U = n-(2n+1)y+(n+2)y^2$$

sein, wenn Δy sein Zeichen wechselte, daher offenbar ein Minimum oder ein Maximum überhaupt nicht stattfinden können, so daß also die nothwendige Bedingung, wenn überhaupt ein Minimum oder ein Maximum soll stattfinden können, durch die Gleichung

$$(2n+1)-2(n+2)y=0$$

ausgedrückt wird, aus der sich

$$y = \frac{2n+1}{2(n+2)}$$

ergiebt. Daß aber für diesen Werth von y die Größe

$$U = n-(2n+1)y+(n+2)y^2$$

ein Minimum wird, erhellet auf der Stelle, wenn man nur überlegt, daß für den in Rede stehenden Werth von y nach dem Obigen

$$U+\Delta U = n-(2n+1)y+(n+2)y^2+(n+2)\Delta y^2$$

wird, und das Glied $(n+2)\Delta y^2$ stets positiv bleibt, man mag für Δy einen beliebigen positiven oder einen beliebigen negativen Werth setzen. Daher wird

$$U = \frac{1-nu+n^3u^2}{(1+nu)^2}$$

ein Minimum für

$$y = \frac{2n+1}{2(n+2)},$$

d. i. nach dem Obigen für

$$x = \frac{1}{y} = \frac{2(n+2)}{2n+1},$$

also für

$$u = \frac{x-1}{n} = \frac{3}{n(2n+1)},$$

Digitized by Google

und weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$u = 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{r'}, \text{ also } \frac{r}{r'} = \frac{n-1}{n} - u$$

ist, so wird

$$U = \frac{1 - nu + n^3 u^2}{(1+nu)^2}$$

ein Minimum für

$$\frac{r}{r'} = \frac{(n-1)(2n+1)-3}{n(2n+1)}$$

oder für

$$\frac{r}{r'} = \frac{2n^2 - n - 4}{n(2n+1)}.$$

Für diesen Werth von $\frac{r}{r'}$ wird, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$U = \frac{4n^2 + 7n - 2}{4(n+2)^2} = \frac{4n-1}{4(n+2)}.$$

Weil nun nach dem Obigen, wobei wir q immer als positiv annehmen wollen, die Längenabweichung

$$-\frac{n}{2(n-1)^2} \cdot \frac{1 - nu + n^3 u^2}{F(1+nu)^2} q^2 = -\frac{n}{2(n-1)^2} \cdot \frac{U}{F} q^2$$

ist, so ist dieselbe nach dem Vorhergehenden offenbar:

wenn U positiv und F positiv ist, ein Maximum;
wenn U positiv und F negativ ist, ein Minimum;
wenn U negativ und F positiv ist, ein Maximum;
wenn U negativ und F negativ ist, ein Minimum;

wovon man den Sinn leicht verstehen wird, wenn man sich nur aus der Arithmetik daran erinnert, was es heißt, wenn man sagt, eine positive oder eine negative Größe sei größer oder kleiner als eine andere positive oder negative Größe. Da ferner nach dem Obigen die Seitenabweichung

$$-\frac{n}{2(n-1)^2} \cdot \frac{1 - nu + n^3 u^2}{F^2(1+nu)^2} \cdot q^3 = -\frac{n}{2(n-1)^2} \cdot \frac{U}{F^2} q^3$$

ist, so ist dieselbe nach dem Vorhergehenden offenbar:

wenn U positiv ist, ein Maximum;
wenn U negativ ist, ein Maximum;

wobei man sich wieder an die Theorie der entgegengesetzten Größen aus der Arithmetik gehörig zu erinnern hat, wenn man dies richtig verstehen will.

Die Längenabweichung ist also, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt, ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Brennweite F positiv oder negativ ist; die Seitenabweichung ist dagegen jederzeit ein Maximum, dies immer in dem aus der Lehre von den entgegengesetzten Größen bekannten Sinne genommen.

Digitized by Google

Für Luft und Glas ist nahe $n = \frac{3}{2}$, also $U = \frac{5}{14}$, und folglich U eine positive Größe, so daß also, was natürlich in dem vorliegenden Falle als besonders wichtig betrachtet werden muß, die Größe U ein sogenanntes absolutes Minimum ist, d. h. daß wirklich der numerische Werth von U und folglich auch sowohl der numerische Werth der Längenabweichung, als auch der numerische Werth der Seitenabweichung ein Minimum ist.

Linsen, welche so construirt sind, daß

$$\frac{r}{r'} = \frac{2n^2 - n - 4}{n(2n+1)}$$

ist, werden aus nach den obigen Entwickelungen nun leicht begreiflichen Gründen Linsen von der besten Form genannt. Setzt man $n = \frac{3}{2}$, so ist für solche Linsen

$$\frac{r}{r'} = -\frac{1}{3}.$$

Weil bekanntlich

$$F = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{rr'}{r'-r} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r}{1 - \frac{r}{r'}} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r'}{\frac{r'}{r} - 1}$$

und

$$\frac{r}{r'} = \frac{2n^2 - n - 4}{n(2n+1)}$$

ist, so hat man zwischen F und r, r' zwei Gleichungen, und kann also auch die beiden Halbmesser r und r' durch die Brennweite F ausdrücken. Nach Ausführung der keiner Schwierigkeit unterliegenden Rechnung erhält man:

$$r = \frac{2(n-1)(n+2)}{n(2n+1)} F,$$

$$r' = \frac{2(n-1)(n+2)}{2n^2 - n - 4} F.$$

Die kleinste oder größte Längenabweichung ist

$$-\frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)} \cdot \frac{q^2}{F},$$

und die größte Seitenabweichung ist

$$-\frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)} \cdot \frac{q^3}{F^2}.$$

Man sieht also, daß für der Axe parallele Strahlen der absolute Werth der kleinsten oder größten Längenabweichung gerade dem Quadrate der Oeffnung und verkehrt dem absoluten Werthe der Brennweite, der absolute Werth der größten Seitenabweichung dagegen gerade dem Kubus der Oeffnung

Digitized by Google

und verkehrt dem Quadrate der Brennweite proportional ist.

Setzt man etwas genauer wie vorher $n = 1,55$; so findet man für die kleinste Längenabweichung und die kleinste Seitenabweichung (absolut genommen)

$$0,938 \cdot \frac{q^2}{F} \text{ und } 0,938 \cdot \frac{q^2}{F^2}.$$

Da nun nach §. 37. und §. 38. für den sphärischen Spiegel unter Voraussetzung derselben Brennweite und derselben Oeffnung die Längenabweichung und die Seitenabweichung respective

$$0,125 \cdot \frac{q^2}{F} \text{ und } 0,125 \cdot \frac{q^2}{F^2}$$

sind, so sieht man, daß bei einer Linse von der besten Form die Abweichungen ungefähr $7\frac{1}{2}$mal so groß als die entsprechenden Abweichungen bei dem sphärischen Spiegel sind, unter Voraussetzung gleicher Brennweiten und gleicher Oeffnungen, eine Bemerkung, welche für die gehörige Beurtheilung der von Linsen und Spiegeln zu erwartenden Leistungen von Wichtigkeit ist.

§. 67.

Wenn wir die Dicke Δ einer Linse als verschwindend betrachten, oder wenigstens ihren absoluten Werth so klein annehmen, daß sie auf das Vorzeichen der Brennweite F keinen Einfluß hat, so können wir bei der folgenden Betrachtung, bei welcher es uns nur auf das Vorzeichen der Brennweite ankommt, nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$F = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{rr'}{r'-r}$$

setzen; und rücksichtlich der beiden Halbmesser r und r' sind nun die folgenden Fälle zu unterscheiden, wobei wir immer Linsen von Glas betrachten, für welche $n > 1$, also $n - 1$ positiv ist.

I. Wenn r negativ und r' positiv ist, welchem Falle Fig. 65. entspricht, so ist rr' negativ und $r' - r$ positiv, also F negativ. Folglich convergiren in diesem Falle die parallel mit der Axe der Linse auf deren vordere Gränzfläche fallenden Strahlen nach der Brechung in dem hinter der Linse liegenden Brennpunkte.

II. Wenn r negativ, r' negativ, und $(-r) > (-r')$ ist, welchem Falle Fig. 66. entspricht, so ist rr' positiv und auch $r' - r = (-r) - (-r')$ positiv, also F positiv. Folglich divergiren in diesem Falle die parallel mit der Axe der Linse auf deren vordere Gränzfläche fallenden Strahlen nach der Brechung so, als wenn sie aus dem vor der Linse liegenden Brennpunkte kämen.

III. Wenn r negativ, r' negativ, und $(-r) < (-r')$ ist, welchem Falle Fig. 67. entspricht, so ist rr' positiv und $r' - r = -\{(-r') - (-r)\}$ negativ, also F negativ. Folglich con-

Digitized by Google

vergiren in diesem Falle die parallel mit der Axe der Linse auf deren vordere Gränzfläche fallenden Strahlen nach der Brechung in dem hinter der Linse liegenden Brennpunkte.

IV. Wenn r positiv und r′ negativ ist, welchem Falle Fig. 68. entspricht, so ist rr′ negativ und auch r′ — r negativ, also F positiv. Folglich divergiren in diesem Falle die parallel mit der Axe der Linse auf deren vordere Gränzfläche fallenden Strahlen nach der Brechung so, als wenn sie aus dem vor der Linse liegenden Brennpunkte kämen.

V. Wenn r positiv, r′ positiv, und $r > r'$ ist, welchem Falle Fig. 69. entspricht, so ist rr′ positiv, r′ — r negativ, also F negativ. Folglich convergiren in diesem Falle die parallel mit der Axe der Linse auf deren vordere Gränzfläche fallenden Strahlen nach der Brechung in dem hinter der Linse liegenden Brennpunkte.

VI. Wenn r positiv, r′ positiv, und $r < r'$ ist, welchem Falle Fig. 70. entspricht, so ist rr′ positiv, r′ — r positiv, also F positiv. Folglich divergiren in diesem Falle die parallel mit der Axe der Linse auf deren vordere Gränzfläche fallenden Strahlen nach der Brechung so, als wenn sie aus dem vor der Linse liegenden Brennpunkte kämen.

Hieraus ergiebt sich nun von selbst, weshalb die Linsen I, III, V (Fig. 65., 67., 69.) Sammellinsen oder Sammelgläser, die Linsen II, IV, VI (Fig. 66., 68., 70.) Zerstreuungslinsen oder Zerstreuungsgläser genannt werden. Alle Sammellinsen sind in der Mitte dicker als an den Rändern; alle Zerstreuungslinsen sind dagegen in der Mitte dünner als an den Rändern. Die Linsen I heißen auch doppelt convexe oder biconvexe Linsen; die Linsen IV nennt man dagegen doppelt concave oder biconcave Linsen. Alle übrigen Linsen, nämlich II, III, V, VI, pflegt man auch Menisken zu nennen. Die Menisken II und VI, bei denen die Concavität stärker ist als die Convexität, heißen convex-concave Linsen; dagegen nennt man die Menisken III und V, bei denen die Convexität stärker ist als die Concavität, concav-convexe Linsen. Geht bei der convex-concaven Linse II und VI die convexe Seite in eine Ebene über, wie Fig. 71. darstellt, so nennt man die Linse eine plan-concave Linse; geht eben so bei der concav-convexen Linse III und V die concave Seite in eine Ebene über, wie Fig. 72. darstellt, so nennt man diese Linse eine plan-convexe Linse.

Sammellinsen heißen aus denselben Gründen, aus welchen die sphärischen Hohlspiegel Brennspiegel genannt werden, auch Brenngläser, und können in der That auch als solche benutzt werden, wenn man das kleine Sonnenbild, welches in ihrem Brennpunkte entsteht, auf einen anzuzündenden Körper fallen läßt. Wenn wir wie in §. 38. die Entfernung der Sonne, ihren Halbmesser und den Halbmesser des Sonnenbildes in der Nähe des Brennpunktes respective durch E, R, R_1, den absoluten

Digitized by Google

Werth der Brennweite eines Brennglases aber durch (F) bezeichnen, so kann auf ganz ähnliche Art wie a. a. O. wenigstens näherungsweise

$$R_1 = \frac{(F)}{E} R,$$

d. i.

$$R_1 = \frac{(F)}{215}$$

gesetzt werden. Haben nun W und W_1 ganz ähnliche Bedeutungen wie a. a. O., so ist, wenn q die halbe Oeffnung des Glases bezeichnet,

$$W : W_1 = R_1^2 : q^2,$$

woraus sich ganz auf ähnliche Art wie a. a. O.

$$W_1 = 46225 \cdot \left(\frac{q}{F}\right)^2 \cdot W$$

ergiebt, mittelst welcher Formel sich die Wirkung der Brenngläser in allen Fällen leicht beurtheilen und mit der Wirkung der Brennspiegel vergleichen läßt, was hier weiter zu erläutern nicht nöthig sein wird.

Soll die Seitenabweichung des Glases nicht größer sein als der Halbmesser des Sonnenbildes im Brennpunkte, so muß, unter der Voraussetzung, daß das Glas eine Linse von der besten Form ist, die man demselben immer geben sollte, nach §. 66.

$$0,938 \cdot \frac{q^3}{F^2} = R_1,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$0,938 \cdot \frac{q^3}{F^2} = \frac{(F)}{215},$$

also

$$q^3 = \frac{(F)^3}{215 \,.\, 0,938} = \frac{(F)^3}{201,67},$$

folglich

$$q = \frac{(F)}{\sqrt[3]{201,67}}$$

sein, auf ähnliche Art wie nach §. 38. bei den Brennspiegeln.

§. 68.

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln lassen sich alle Erscheinungen, welche Linsen in den verschiedenen möglichen Fällen hervorbringen müssen, auf das Genügendste und Vollkommenste bestimmen. Es wird, um die Art und Weise, wie man sich bei dieser Untersuchung zu verhalten hat, zu erläutern, hinreichend sein, bloß die doppelt convexe und doppelt concave Linse einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen, indem

Digitized by Google

man sich bei den übrigen Linsen auf ganz ähnliche Art zu verhalten hat.

Der Einfachheit und größeren Deutlichkeit wegen wollen wir zuerst annehmen, daß von einem strahlenden Punkte ausgehende divergirende Strahlen auf die Linse fallen und dieselbe treffen.

Am besten legt man die folgenden in §. 64. bewiesenen Formeln, in denen P, Q die Coordinaten des strahlenden Punktes, dagegen P_1', Q_1' die Coordinaten seines Bildes bezeichnen, zum Grunde:

$$F = -\frac{1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}},$$

$$F_1' = \frac{1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}};$$

$$K = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}};$$

$$(P-F)(P_1'-F_1') = -K^2,$$

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K} = -\frac{K}{P_1'-F_1'};$$

$$\left(\frac{Q}{Q_1'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P_1'-F_1'}.$$

Die Dicke D der Linse nehmen wir der Null so nahe kommend an, daß sie keinen Einfluß auf die Vorzeichen der Größen F, F_1', K ausübt. Die Größe P wollen wir, was unter der gemachten Voraussetzung offenbar verstattet ist, als positiv annehmen, und die Seite der Linse, auf welcher der strahlende Punkt liegt, die vordere Seite, die andere Seite also die hintere Seite derselben nennen.

Bei der doppelt converen Linse ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar r negativ und r' positiv, also nach dem Obigen F positiv, F_1' negativ, K negativ.

Ist nun zuerst $P > F$, so ist $P - F > 0$, und folglich, da

$$P_1' = F_1' - \frac{K^2}{P-F}$$

ist, $P_1' < F_1'$. Also liegt das Bild hinter der Linse und ist weiter als der hintere Brennpunkt von derselben entfernt; es ist ein sogenanntes Luftbild, weil es in der freien Luft schwebt, und kann mit einer ebenen weißen Fläche aufgefangen und da-

Digitized by Google

durch dem Auge sichtbar gemacht werden. Weil K und P − F entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K}$$

negativ, und das Bild steht daher in Bezug auf das Object verkehrt. Ob das Bild vergrößert oder verkleinert ist, muß danach beurtheilt werden, ob der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{P-F}{K}$$

kleiner oder größer als die Einheit ist. Kommt die Dicke D der Null so nahe, daß man dieselbe ohne merklichen Fehler als verschwindend zu betrachten berechtigt ist, so ist $K = -F$, und folglich

$$\frac{Q}{Q_1'} = 1 - \frac{P}{F} = -\left(\frac{P}{F} - 1\right),$$

wo $\frac{P}{F} - 1$ nach dem Obigen eine positive Größe ist. Für

$$\frac{P}{F} - 1 \lessgtr 1$$

ist aber respective

$$\frac{P}{F} \lessgtr 2, \text{ d. i. } P \lessgtr 2F;$$

und für $P < 2F$ ist also das Bild vergrößert, für $P = 2F$ ist das Bild dem Objecte gleich, für $P > 2F$ ist das Bild verkleinert.

Ist ferner $P < F$, so ist $P - F < 0$, und folglich, da

$$P_1' = F_1' - \frac{K^2}{P-F}$$

ist, $P_1' > F_1'$. Weil K und $P - F$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K}$$

positiv, und das Bild steht folglich in Bezug auf das Object jederzeit aufrecht. Ob das Bild vergrößert oder verkleinert ist, muß danach beurtheilt werden, ob der Bruch

$$\frac{P-F}{K}$$

kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $D = 0$ ist $K = -F = F_1'$, also

$$P_1' = -F - \frac{F^2}{P-F} = -\frac{PF}{P-F},$$

und das Bild liegt folglich, weil P positiv, F positiv, $P - F$ negativ, also P_1' positiv ist, vor der Linse, und ist weiter von derselben als das Object entfernt, weil der absolute Werth von

Digitized by Google

$$\frac{PF}{P-F} = -\frac{F}{F-P} \cdot P$$

unter den gemachten Voraussetzungen offenbar größer als P ist. Weil ferner

$$\frac{Q}{Q_1'} = 1 - \frac{P}{F}$$

im vorliegenden Falle offenbar immer kleiner als die Einheit ist, so ist das Bild vergrößert.

Wenn $P = F$, also $P - F = 0$ ist, so giebt es, wie sich aus den obigen Formeln auf der Stelle ergiebt, im eigentlichen Sinne gar kein Bild.

Bei der doppelt concaven Linse ist unter den gemachten Voraussetzungen offenbar r positiv und r' negativ, also nach dem Obigen F negativ, F_1' positiv, K positiv.

Da nun P positiv ist, so ist in diesem Falle immer $P > F$, also $P - F > 0$, und folglich, da

$$P_1' = F_1' - \frac{K^2}{P-F}$$

ist, $P_1' < F_1'$. Weil K und $P - F$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K}$$

positiv, und das Bild steht folglich in Bezug auf das Object jederzeit aufrecht. Ob das Bild vergrößert oder verkleinert ist, muß wieder danach beurtheilt werden, ob der Bruch

$$\frac{P-F}{K}$$

kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $D = 0$ ist $K = -F = F_1'$, also

$$P_1' = -F - \frac{F^2}{P-F} = -\frac{PF}{P-F},$$

und das Bild liegt folglich, weil P positiv, F negativ, $P - F$ positiv, also P_1' positiv ist, vor der Linse zwischen derselben und dem Objecte, weil der absolute Werth von

$$\frac{PF}{P-F} = \frac{F}{P-F} P$$

unter den gemachten Voraussetzungen offenbar kleiner als P ist. Weil ferner

$$\frac{Q}{Q_1'} = 1 - \frac{P}{F}$$

im vorliegenden Falle offenbar immer größer als die Einheit ist, so ist das Bild verkleinert.

Alle diese Resultate stimmen mit dem, was die Erfahrung lehrt, vollkommen überein; und ganz ähnliche Untersuchungen würden sich nun auch leicht über die übrigen Linsen anstellen

Digitized by Google

lassen, die wir aber hier, als keiner Schwierigkeit unterliegend, übergehen und dem Leser selbst anzustellen überlassen.

Den vorhergehenden Betrachtungen liegt die Voraussetzung zum Grunde, daß die Linse von aus einem vor ihr liegenden strahlenden Punkte ausgehenden divergirenden Strahle getroffen werde. Für das Folgende ist es aber in einigen Beziehungen auch von Wichtigkeit, den Fall zu betrachten, wenn die Linse von Strahlen, die nach einem hinter der Linse liegenden Punkte convergiren, getroffen wird. Um diesen Fall einer ähnlichen Betrachtung wie den vorhergehenden zu unterwerfen, hat man bloß die im Vorhergehenden gemachte Annahme, daß P positiv sei, fallen zu lassen, und muß, allen übrigen vorher gebrauchten Symbolen ganz ihre Bedeutung lassend, vielmehr annehmen, daß P negativ sei.

Für die doppelt convexe Linse ist bekanntlich F positiv und F_1' negativ, K negativ. Weil nun P negativ ist, so ist $P-F<0$, und folglich, weil

$$P_1' = F_1' - \frac{K^2}{P-F}$$

ist, $P_1' > F_1'$. Weil K und $P-F$ gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K}$$

positiv, und das Bild steht folglich in Bezug auf das Object jederzeit aufrecht. Ob das Bild vergrößert oder verkleinert ist, muß danach beurtheilt werden, ob der Bruch

$$\frac{P-F}{K}$$

kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $D=0$ ist $K = -F = F_1'$, also

$$P_1' = -F - \frac{F^2}{P-F} = -\frac{PF}{P-F} = \frac{PF_1'}{P+F_1'},$$

und das Bild liegt folglich, weil P negativ, F positiv, $P-F$ negativ, also P_1' negativ ist, hinter der Linse; auch erhellet auf der Stelle, daß das Bild näher bei der Linse als das Object und innerhalb der Brennweite der Linse liegt. Weil ferner

$$\frac{Q}{Q_1'} = 1 - \frac{P}{F}$$

im vorliegenden Falle offenbar immer größer als die Einheit ist, so ist das Bild verkleinert.

Für die doppelt concave Linse ist nach dem Obigen bekanntlich F negativ, F_1' positiv, K positiv.

Ist nun zuerst $P>F$, so ist $P-F>0$, und folglich, da

$$P_1' = F_1' - \frac{K^2}{P-F}$$

Digitized by Google

ist, $P_1' < F_1'$. Weil K und P — F gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K}$$

positiv, und das Bild steht folglich in Bezug auf das Object jederzeit aufrecht. Ob das Bild vergrößert oder verkleinert ist, muß danach beurtheilt werden, ob der Bruch

$$\frac{P-F}{K}$$

kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $D = 0$ ist $K = -F = F_1'$, also

$$P_1' = -F - \frac{F^2}{P-F} = -\frac{PF}{P-F} = \frac{PF_1'}{P+F_1'},$$

und das Bild liegt folglich, weil P negativ, F negativ, P — F positiv, also P_1' negativ ist, hinter der Linse, und ist weiter von derselben als das Object entfernt, weil der Bruch

$$\frac{PF}{P-F} = \frac{F}{(-F)-(-P)} \cdot P$$

unter den gemachten Voraussetzungen offenbar größer ist als der absolute Werth von P. Weil ferner

$$\frac{Q}{Q_1'} = 1 - \frac{P}{F},$$

und nach dem Vorhergehenden $1 - \frac{P}{F}$ und $\frac{P}{F}$ positive Größen sind, so ist das Bild offenbar vergrößert.

Ist ferner $P < F$, so ist $P - F < 0$, und folglich, da

$$P_1' = F_1' - \frac{K^2}{P-F}$$

ist, $P_1' > F_1'$. Also liegt das Bild vor der Linse und ist weiter als der hintere Brennpunkt (welcher aber hier selbst vor der Linse liegt) von derselben entfernt. Weil K und P — F ungleiche Vorzeichen haben, so ist

$$\frac{Q}{Q_1'} = \frac{P-F}{K}$$

negativ, und das Bild steht daher in Bezug auf das Object verkehrt. Ob das Bild vergrößert oder verkleinert ist, muß danach beurtheilt werden, ob der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{P-F}{K}$$

kleiner oder größer als die Einheit ist. Für $D = 0$ ist $K = -F$, also

$$\frac{Q}{Q_1'} = 1 - \frac{P}{F} = -\left(\frac{P}{F} - 1\right),$$

Digitized by Google

wo $\frac{P}{F} - 1$ nach dem Obigen eine positive Größe ist. Für

$$\frac{P}{F} - 1 \lessgtr 1$$

ist aber respective

$$\frac{P}{F} \lessgtr 2 \text{ oder } \frac{-P}{-F} \lessgtr 2,$$

wo nun $-P$ und $-F$ positive Größen sind; also ist

$$-P \lessgtr -2F, \text{ d. i. } P \gtrless 2F,$$

und für $P > 2F$ ist also das Bild vergrößert, für $P = 2F$ ist das Bild dem Objecte gleich, für $P < 2F$ ist das Bild verkleinert.

Wenn $P = F$, also $P - F = 0$ ist, so giebt es, wie sich aus den obigen Formeln auf der Stelle ergiebt, im eigentlichen Sinne gar kein Bild.

Zwölftes Kapitel.

Von den Linsensystemen.

§. 69.

Wenn die Mittelpunkte sämmtlicher Gränzflächen mehrerer Linsen, in beliebiger Anzahl, auf einer und derselben geraden Linie liegen, so bilden diese Linsen ein Linsensystem, und die in Rede stehende gerade Linie wird die Axe dieses Systems genannt.

Die Brechungsexponenten für die einzelnen Linsen des Systems, deren Anzahl wir durch $\mu + 1$ bezeichnen wollen, seien nach der Reihe von der ersten bis zur letzten Linse:

$$n, n_1, n_2, n_3, \ldots n_\mu.$$

Die Halbmesser der vordern Gränzflächen der Linsen, welche als die in der Axe des Systems genommenen Abscissen der Mittelpunkte dieser Gränzflächen in Bezug auf deren Durchschnittspunkte mit der Axe des Systems als Anfangspunkte zu betrachten sind, seien

$$r, r_1, r_2, r_3, \ldots r_\mu.$$

Die Halbmesser der hintern Gränzflächen der Linsen, welche als die in der Axe des Systems genommenenen Abscissen der

Digitized by Google

Mittelpunkte dieser Gränzflächen in Bezug auf deren Durchschnittspunkte mit der Axe des Systems als Anfangspunkte zu betrachten sind, seien

$$r', r_1', r_2', r_3', \ldots r_\mu'.$$

Die Dicken der Linsen, welche als die in der Axe des Systems genommenen Abscissen der Durchschnittspunkte der hintern Gränzflächen der Linsen mit der Axe des Systems in Bezug auf die Durchschnittspunkte der entsprechenden vordern Gränzflächen der Linsen mit der Axe des Systems als Anfangspunkte zu betrachten sind, seien

$$D, D_1, D_2, D_3, \ldots D_\mu.$$

Die Entfernungen der Linsen von einander, welche als die in der Axe des Systems genommenen Abscissen der Durchschnittspunkte der vordern Gränzflächen der Linsen mit der Axe des Systems in Bezug auf die Durchschnittspunkte der hintern Gränzflächen der nächstvorhergehenden Linsen mit der Axe des Systems als Anfangspunkte zu betrachten sind, seien

$$E, E_1, E_2, E_3, \ldots E_{\mu-1}.$$

Nun seien P, Q die Coordinaten eines leuchtenden Punktes (PQ) in Bezug auf den Durchschnittspunkt der vordern Gränzfläche der ersten Linse mit der Axe des Systems als Anfang, und P', Q' seien die Coordinaten seines durch die erste Linse hervorgebrachten Bildes (P'Q') in Bezug auf den Durchschnittspunkt der hintern Gränzfläche der ersten Linse mit der Axe des Systems als Anfang. Die Coordinaten dieses Bildes in Bezug auf den Durchschnittspunkt der vordern Gränzfläche der zweiten Linse mit der Axe des Systems als Anfang seien P_1, Q_1, und die Coordinaten des von der zweiten Linse hervorgebrachten Bildes des Punktes (P_1 Q_1), als ein neues Object betrachtet, in Bezug auf den Durchschnittspunkt der hintern Gränzfläche der zweiten Linse mit der Axe des Systems als Anfang seien P_1', Q_1', so daß also (P_1' Q_1') ein zweites Bild des Punktes (PQ) ist. Ganz auf ähnliche Weise seien die Coordinaten dieses Bildes in Bezug auf den Durchschnittspunkt der vordern Gränzfläche der dritten Linse mit der Axe des Systems als Anfang P_2, Q_2, und die Coordinaten des von der dritten Linse hervorgebrachten Bildes des Punktes (P_2 Q_2), als ein neues Object betrachtet, in Bezug auf den Durchschnittspunkt der hintern Gränzfläche der dritten Linse mit der Axe des Systems als Anfang seien P_2', Q_2', so daß also (P_2' Q_2') ein drittes Bild des Punktes (PQ) ist. Hier erhellet nun auch schon mit völliger Deutlichkeit, wie man auf diese Art weiter gehen kann. Zuletzt wird ein von der $(\mu+1)$ten Linse hervorgebrachtes $(\mu+1)$tes Bild des Punktes (PQ) entstehen, dessen Coordinaten in Bezug auf den Durchschnittspunkt der hintern Gränzfläche der $(\mu+1)$ten Linse mit der Axe des Systems als Anfang wir in Gemäßheit des Vorhergehenden durch P_μ', Q_μ', dieses Bild selbst also durch (P_μ' Q_μ') bezeichnen müssen.

Digitized by Google

Die reciproken Brechungsexponenten

$$n, n_1, n_2, n_3, \ldots n_\mu,$$

nämlich die Brüche

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \ldots \frac{1}{n_\mu},$$

wollen wir endlich noch der Kürze wegen respective durch

$$\nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots \nu_\mu$$

bezeichnen.

§. 70.

In diesen Bezeichnungen haben wir nun zuvörderst nach §. 64. für die dem Objecte (PQ) und seinem ersten Bilde (P'Q') entsprechenden Abscissen P, P' die folgenden Ausdrücke:

$$P' = \cfrac{\nu r'}{\nu - 1 - \cfrac{r'}{D - \cfrac{nr}{n - 1 + \frac{r}{P}}}}$$

und

$$P = -\cfrac{r}{n - 1 - \cfrac{nr}{D - \cfrac{r'}{\nu - 1 - \frac{\nu r'}{P'}}}}.$$

Ganz auf ähnliche Art ist aber offenbar

$$P_1' = \cfrac{\nu_1 r_1'}{\nu_1 - 1 - \cfrac{r_1'}{D_1 - \cfrac{n_1 r_1}{n_1 - 1 + \frac{r_1}{P_1}}}}$$

und

$$P_1 = -\cfrac{r_1}{n_1 - 1 - \cfrac{n_1 r_1}{D_1 - \cfrac{r_1'}{\nu_1 - 1 - \frac{\nu_1 r_1'}{P_1'}}}}.$$

Weil nun P' und P_1 demselben Punkte entsprechen, sich nur auf verschiedene Anfangspunkte beziehen, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$P' - P_1 = E,$$

also

$$P_1 = -E + P', \quad P' = E + P_1;$$

Digitized by Google

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$P_2' = \cfrac{\nu_2 r_2'}{\nu_2 - 1 - \cfrac{r_2'}{D_2 - \cfrac{n_2 r_2}{n_2 - 1 + \cfrac{r_2}{-E + \cfrac{\nu r'}{\nu - 1 - \cfrac{r'}{D - \cfrac{nr}{n - 1 + \cfrac{r}{P}}}}}}}}$$

und

$$P = -\cfrac{r}{n - 1 - \cfrac{nr}{D - \cfrac{r'}{\nu - 1 - \cfrac{\nu r'}{E - \cfrac{r_2}{n_2 - 1 - \cfrac{n_2 r_2}{D_2 - \cfrac{r_2'}{\nu_2 - 1 - \cfrac{\nu_2 r_2}{P_2'}}}}}}}}$$

Ganz auf ähnliche Art ist aber ferner

$$P_2' = \cfrac{\nu_2 r_2'}{\nu_2 - 1 - \cfrac{r_2'}{D_2 - \cfrac{n_2 r_2}{n_2 - 1 + \cfrac{r_2}{P_2}}}}$$

und

$$P_2 = -\cfrac{r_2}{n_2 - 1 - \cfrac{n_2 r_2}{D_2 - \cfrac{r_2'}{\nu_2 - 1 - \cfrac{\nu_2 r_2}{P_2'}}}},$$

so wie, weil P_1' und P_2 einem und demselben Punkte entsprechen,

$$P_2' - P_2 = E_1,$$

also

$$P_2 = -E_1 + P_2'; \quad P_2' = E_1 + P_2;$$

Digitized by Google

woraus sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden nach gehöriger Substitution die beiden folgenden Ausdrücke ergeben:

$$P_2' = \cfrac{\nu_2 r_2'}{\nu_2 - 1 - \cfrac{r_2'}{D_2 - \cfrac{n^2 r_2}{n_2 - 1 + \cfrac{r_2}{-E_1 + \cfrac{\nu_1 r_1'}{\nu_1 - 1 - \cfrac{r_1'}{D_1 - \cfrac{n_1 r_1}{n_1 - 1 + \cfrac{r_1}{-E + \cfrac{\nu r'}{\nu - 1 - \cfrac{r'}{D - \cfrac{nr}{n - 1 + \frac{r}{p}}}}}}}}}}}}$$

und

$$P = -\cfrac{r}{n - 1 - \cfrac{nr}{D - \cfrac{r'}{\nu - 1 - \cfrac{\nu r'}{E - \cfrac{r_1'}{n_1 - 1 - \cfrac{n_1 r_1}{D_1 - \cfrac{r_1}{\nu_1 - 1 - \cfrac{\nu_1 r_1'}{E_1 - \cfrac{r_2}{n_2 - 1 - \cfrac{n_2 r_2}{D_2 - \cfrac{r_2'}{\nu_2 - 1 - \frac{\nu_2 r_2'}{P_2'}}}}}}}}}}}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet nun schon. Es ist nämlich allgemein:

Digitized by Google

$$P_\mu' = \frac{\nu_\mu r_\mu'}{\nu_\mu - 1 - \dfrac{r_\mu'}{D_\mu - \dfrac{n_\mu r_\mu}{n_\mu - 1 + \dfrac{r_\mu}{-E_{\mu-1} + \dfrac{\nu_{\mu-1} r_{\mu-1}'}{\nu_{\mu-1} - 1 - \dfrac{r_{\mu-1}'}{D_{\mu-1} - \dfrac{n_{\mu-1} r_{\mu-1}}{n_{\mu-1} - 1 + \cdots + \dfrac{r_1}{-E + \dfrac{\nu r'}{\nu - 1 - \dfrac{r'}{D - \dfrac{nr}{n - 1 + \frac{r}{P}}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

und

$$P = -\cfrac{r}{n-1-\cfrac{nr}{D-\cfrac{r'}{\nu-1-\cfrac{\nu r'}{E-\cfrac{r_1}{n_1-1-\cfrac{n_1 r_1}{D_1-\cfrac{r_1'}{\nu_1-1-\cfrac{\nu_1 r_1'}{E_1-\cdots-\cfrac{\nu_{\mu-1} r_{\mu-1}'}{E_{\mu-1}-\cfrac{r_\mu}{n_\mu-1-\cfrac{n_\mu r_\mu}{D_\mu-\cfrac{r_\mu'}{\nu_\mu-1-\cfrac{\nu_\mu r_\mu'}{P_\mu'}}}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

Wenn wir die Gränzen, denen die Größen P_μ' und P sich nähern, wenn sich respective die absoluten Werthe von P und P_μ' dem Unendlichen nähern, respective durch F_μ' und F bezeichnen, so ist, wie aus den vorhergehenden allgemeinen Formeln sich auf der Stelle ergiebt:

$$F_\mu' = \cfrac{\nu_\mu r_\mu'}{\nu_\mu - 1 - \cfrac{r_\mu'}{D_\mu - \cfrac{n_\mu r_\mu}{n_\mu - 1 + \cfrac{r_\mu}{-E_{\mu-1} + \cfrac{\nu_{\mu-1} r_{\mu-1}'}{\nu_{\mu-1} - 1 - \cfrac{r_{\mu-1}'}{D_{\mu-1} - \cfrac{n_{\mu-1} r_{\mu-1}}{n_{\mu-1} - 1 + \cdots + \cfrac{r_1}{-E + \cfrac{\nu r'}{n-1-\cfrac{r'}{D-\cfrac{nr}{n-1}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

und

$$P = -\cfrac{r}{n-1-\cfrac{nr}{D-\cfrac{r'}{\nu-1-\cfrac{\nu r'}{E-\cfrac{r_1}{n_1-1-\cfrac{n_1 r_1}{D_1-\cfrac{r_1'}{\nu_1-1-\cfrac{\nu_1 r_1'}{E_1-\cdots-\cfrac{\nu_{\mu-1} r_{\mu-1}'}{E_{\mu-1}-\cfrac{r_\mu}{n_\mu-1-\cfrac{n_\mu r_\mu}{D_\mu-\cfrac{r_\mu'}{\nu_\mu-1-\cfrac{\nu_\mu r_\mu'}{P_\mu}}}}}}}}}}}}}.$$

Digitized by Google

Wenn wir die Gränzen, denen die Größen P_μ' und P sich nähern, wenn sich respective die absoluten Werthe von P und P_μ' dem Unendlichen nähern, respective durch F_μ' und F bezeichnen, so ist, wie aus den vorhergehenden allgemeinen Formeln sich auf der Stelle ergiebt:

$$F_\mu' = \cfrac{\nu_\mu r_\mu'}{\nu_\mu - 1 - \cfrac{r_\mu'}{D_\mu - \cfrac{n_\mu r_\mu}{n_\mu - 1 + \cfrac{r_\mu}{-E_{\mu-1} + \cfrac{\nu_{\mu-1} r_{\mu-1}'}{\nu_{\mu-1}' - 1 - \cfrac{r_{\mu-1}'}{D_{\mu-1} - \cfrac{n_{\mu-1} r_{\mu-1}}{n_{\mu-1} - 1 + \cdots + \cfrac{r_1}{-E + \cfrac{\nu r'}{n-1-\cfrac{r'}{D-\cfrac{nr}{n-1}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

und

$$F = -\cfrac{r}{n-1-\cfrac{nr}{D-\cfrac{r'}{\nu-1-\cfrac{\nu r'}{E-\cfrac{r_1}{n_1-1-\cfrac{n_1 r_1}{D_1-\cfrac{r_1'}{\nu_1-1-\cfrac{\nu_1 r_1'}{E_1-\cdots-\cfrac{\nu_{\mu-1} r_{\mu-1}'}{E_{\mu-1}-\cfrac{r_\mu}{n_\mu-1-\cfrac{n_\mu r_\mu}{D_\mu-\cfrac{r_\mu'}{\nu_\mu-1}}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

Drückt man aber die vorhergehenden Kettenbrüche auf die in der elementaren Lehre von denselben meistens gewöhnliche Art aus, daß nämlich alle Zähler die Einheit sind, so erhält man nach einigen ganz leichten Verwandlungen:

$$P_{\mu}' = \frac{1}{\frac{1-n_{\mu}}{r_{\mu}'}} - \frac{1}{\frac{D_{\mu}}{n_{\mu}}} - \frac{1}{\frac{n_{\mu}-1}{r_{\mu}}} - \frac{1}{E_{\mu-1}} - \frac{1}{\frac{1-n_{\mu-1}}{r_{\mu-1}'}} - \frac{1}{\frac{D_{\mu-1}}{p_{\mu-1}}} - \frac{1}{\frac{n_{\mu-1}-1}{r_{\mu-1}}} - \frac{1}{E_{\mu-2}} - \cdots - \frac{1}{E} - \frac{1}{\frac{1-n}{r'}} - \frac{1}{\frac{D}{n}} - \frac{1}{\frac{n-1}{r}} + \frac{1}{P}$$

Digitized by Google

und

$$P = -\frac{1}{\frac{n-1}{r}} - \frac{1}{\frac{D}{n}} - \frac{1}{\frac{1-n}{r'}} - \frac{1}{E} - \frac{1}{\frac{n_1-1}{r_1}} - \frac{1}{\frac{D_1}{n_1}} - \frac{1}{\frac{1-n_1}{r_1'}} - \frac{1}{E_1} - \cdots - \frac{1}{E_{\mu-1}} - \frac{1}{\frac{n_\mu-1}{r_\mu}} - \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu}} - \frac{1}{\frac{1-n_\mu}{r_\mu'}} - \frac{1}{P_\mu'}$$

Digitized by Google

oder auch

$$P'_{\mu} = -\frac{1}{\frac{n_{\mu}-1}{r_{\mu}}} + \frac{1}{\frac{D_{\mu}}{n_{\mu}}} + \frac{1}{\frac{1-n_{\mu}}{r_{\mu}} + \frac{1}{E_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{n_{\mu-1}-1}{r_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{D_{\mu-1}}{n_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{1-n_{\mu-1}}{r_{\mu-1}} + \frac{1}{E_{\mu-2}} + \cdots + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{n-1}{r} + \frac{1}{D} + \frac{1}{\frac{1-n}{r} - P}}}}}}}$$

Digitized by Google

und

$$P = \frac{1}{\frac{1-n}{r} + \frac{1}{\frac{D}{n} + \frac{1}{\frac{n-1}{r'} + \frac{1}{E + \frac{1}{\frac{1-n_1}{r_1} + \frac{1}{\frac{D_1}{n_1} + \frac{1}{\frac{n_1-1}{r_1'} + \frac{1}{E_1 + \cdots + \frac{1}{E_{\mu-1} + \frac{1}{\frac{1-n_\mu}{r_\mu} + \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu} + \frac{1}{\frac{n_\mu-1}{r_\mu'} + \frac{1}{P_\mu'}}}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

Also ist auch

$$F_\mu' = \frac{1}{\frac{1-n_\mu}{r_\mu'} - \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu} - \frac{1}{\frac{n_\mu - 1}{r_\mu} - \frac{1}{E_{\mu-1} - \frac{1}{\frac{1-n_{\mu-1}}{r_{\mu-1}'} - \frac{1}{\frac{D_{\mu-1}}{n_{\mu-1}} - \frac{1}{\frac{n_{\mu-1}-1}{r_{\mu-1}} - \frac{1}{E_{\mu-2} - \cdots - \frac{1}{E} - \frac{1}{\frac{1-n}{r'} - \frac{1}{\frac{D}{n} - \frac{1}{\frac{n-1}{r}}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

$$F = -\frac{1}{\frac{n-1}{r}} - \frac{1}{\frac{D}{n}} - \frac{1}{\frac{1-n}{r'}} - \frac{1}{E} - \frac{1}{\frac{n_1-1}{r_1}} - \frac{1}{\frac{D_1}{n_1}} - \frac{1}{\frac{1-n_1}{r_1'}} - \frac{1}{E_1} - \cdots - \frac{1}{E_{\nu-1}} - \frac{1}{\frac{n_\nu-1}{r_\nu}} - \frac{1}{\frac{D_\nu}{n_\nu}} - \frac{1}{\frac{1-n_\nu}{r_\nu'}}$$

und

oder

$$F_\mu' = -\frac{1}{\frac{n_\mu - 1}{r_\mu'}} + \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu}} + \frac{1}{\frac{1 - n_\mu}{r_\mu}} + \frac{1}{E_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{n_{\mu-1} - 1}{r_{\mu-1}'}} + \frac{1}{\frac{D_{\mu-1}}{n_{\mu-1}}} + \frac{1}{\frac{1 - n_{\mu-1}}{r_{\mu-1}}} + \frac{1}{E_{\mu-2}} + \cdots + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{n-1}{r'}} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{1-n}{r}}$$

Digitized by Google

und

$$F = \frac{1}{\frac{1-n}{r}} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{r'}} + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{1-n_1}{r_1}} + \frac{1}{\frac{D_1}{n_1}} + \frac{1}{\frac{n_1-1}{r_1'}} + \frac{1}{E_1} + \cdots + \frac{1}{E_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{1-n_\mu}{r_\mu}} + \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu}} + \frac{1}{\frac{n_\mu-1}{r_\mu'}}.$$

Digitized by Google

§. 71.

Bevor wir in dieser Untersuchung weiter fortschreiten können, müssen wir zuvörderst die folgenden arithmetischen Betrachtungen über die Kettenbrüche im Allgemeinen vorausschicken, von denen wir nachher wichtige Anwendungen machen werden. Diese Betrachtungen betreffen die beiden folgenden Kettenbrüche:

$$\frac{Z_\mu}{N_\mu} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{\mu-1}} + \frac{1}{a_\mu}$$

und

$$\frac{\mathfrak{Z}_\mu}{\mathfrak{N}_\mu} = \frac{1}{a_\mu} + \frac{1}{a_{\mu-1}} + \frac{1}{a_{\mu-2}} + \ldots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0},$$

von denen der zweite gewissermaßen als die Umkehrung des ersten zu betrachten ist.

Zuerst ist nun offenbar

$$\frac{Z_0}{N_0} = \frac{1}{a_0} \qquad \frac{Z_1}{N_1} = \frac{a_1}{1 + a_0 a_1}$$

und

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_2}}{1 + a_0\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right)} = \frac{1 + a_1 a_2}{a_0 + (1 + a_0 a_1) a_2} = \frac{Z_0 + Z_1 a_2}{N_0 + N_1 a_2},$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{Z_0 + Z_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right)}{N_0 + N_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right)} = \frac{Z_1 + (Z_0 + Z_1 a_2) a_3}{N_1 + (N_0 + N_1 a_2) a_3} = \frac{Z_1 + Z_2 a_3}{N_1 + N_2 a_3},$$

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{Z_1 + Z_2\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right)}{N_1 + N_2\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right)} = \frac{Z_2 + (Z_1 + Z_2 a_3) a_4}{N_2 + (N_1 + N_2 a_3) a_4} = \frac{Z_2 + Z_3 a_4}{N_2 + N_3 a_4},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist also:

$Z_0 = 1,$	$N_0 = a_0;$
$Z_1 = a_1,$	$N_1 = 1 + a_0 a_1;$
$Z_2 = Z_0 + Z_1 a_2,$	$N_2 = N_0 + N_1 a_2;$
$Z_3 = Z_1 + Z_2 a_3,$	$N_3 = N_1 + N_2 a_3;$
$Z_4 = Z_2 + Z_3 a_4,$	$N_4 = N_2 + N_3 a_4;$
u. s. w.	u. s. w.

Digitized by Google

Eine ähnliche Betrachtung wollen wir nun auch auf den zweiten der beiden obigen Kettenbrüche anwenden. Zuerst ist offenbar

$$\frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_0} = \frac{1}{a_0}, \quad \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1} = \frac{a_0}{1+a_0 a_1}.$$

Also ist, wie sogleich in die Augen fallen wird:

$$\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}_2} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_0}}{1 + \left(a_1 + \frac{1}{a_0}\right) a_2} = \frac{1+a_0 a_1}{a_0 + (1+a_0 a_1) a_2} = \frac{\mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1 a_1}{\mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_1 a_2}.$$

Folglich ist auf ähnliche Art:

$$\frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{N}_3} = \frac{1 + \left(a_1 + \frac{1}{a_0}\right) a_2}{a_1 + \frac{1}{a_0} + \left\{1 + \left(a_1 + \frac{1}{a_0}\right) a_2\right\} a_3}$$

$$= \frac{a_0 + (1+a_0 a_1) a_2}{1 + a_0 a_1 + \left\{a_0 + (1+a_0 a_1) a_2\right\} a_3}$$

$$= \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 a_2}{\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 a_3},$$

und hieraus ergiebt sich ferner:

$$\frac{\mathfrak{Z}_4}{\mathfrak{N}_4} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_0} + \left\{1 + \left(a_1 + \frac{1}{a_0}\right) a_2\right\} a_3}{1 + \left(a_1 + \frac{1}{a_0}\right) a_2 + \left\{a_1 + \frac{1}{a_0} + \left(1 + \left(a_1 + \frac{1}{a_0}\right) a_2\right) a_3\right\} a_4}$$

$$= \frac{1 + a_0 a_1 + \left\{a_0 + (1+a_0 a_1) a_2\right\} a_3}{a_0 + (1+a_0 a_1) a_2 + \left\{1 + a_0 a_1 + (a_0 + (1+a_0 a_1) a_2) a_3\right\} a_4}$$

$$= \frac{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3 a_3}{\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 a_4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und auch das allgemeine Gesetz erhellet schon. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_0 &= 1, & \mathfrak{N}_0 &= a_0; \\
\mathfrak{Z}_1 &= a_0, & \mathfrak{N}_1 &= 1 + a_0 a_1; \\
\mathfrak{Z}_2 &= \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1 a_1, & \mathfrak{N}_2 &= \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_1 a_2; \\
\mathfrak{Z}_3 &= \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 a_2, & \mathfrak{N}_3 &= \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 a_3; \\
\mathfrak{Z}_4 &= \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3 a_3, & \mathfrak{N}_4 &= \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 a_4; \\
&\text{u. s. w.} & &\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Dieses Gesetz kann auf folgende Art leicht allgemein bewiesen werden. Weil überhaupt

$$\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x} = \frac{1}{a_x} + \frac{1}{a_{x-1}} + \ldots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

und

$$\frac{\mathfrak{Z}_{x+1}}{\mathfrak{N}_{x+1}} = \frac{1}{a_{x+1}} + \frac{1}{a_x} + \frac{1}{a_{x-1}} + \ldots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

ist, so wird offenbar

$$\frac{\mathfrak{Z}_{x+1}}{\mathfrak{N}_{x+1}} \text{ aus } \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}$$

erhalten, wenn man in dem letzteren Bruche $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für a_0 setzt und alle übrigen Indices von a um eine Einheit erhöhet. Also wird offenbar $\mathfrak{Z}_{x+1}$ aus $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{N}_{x+1}$ aus $\mathfrak{N}_x$ erhalten, wenn man $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für a_0 setzt, alle übrigen Indices von a um eine Einheit erhöhet, und die dadurch sich ergebenden Größen mit a_0 multiplicirt. Sei nun

$$\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x} = \frac{\mathfrak{Z}_{x-2} + \mathfrak{Z}_{x-1}\, a_{x-1}}{\mathfrak{N}_{x-2} + \mathfrak{N}_{x-1}\, a_x}.$$

Um $\frac{\mathfrak{Z}_{x+1}}{\mathfrak{N}_{x+1}}$ zu erhalten, muß man $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für a_0 setzen, alle übrigen Indices von a um eine Einheit erhöhen, und im Zähler und Nenner mit a_0 multipliciren, wodurch jede der Größen $\mathfrak{Z}_{x-2}$, $\mathfrak{Z}_{x-1}$ und $\mathfrak{N}_{x-2}$, $\mathfrak{N}_{x-1}$ mit a_0 multiplicirt wird. Bei der Anwendung dieses Verfahrens gehen also die Größen a_{x-1}, a_x respective in a_x, a_{x+1}, und nach dem Obigen gehen offenbar $\mathfrak{Z}_{x-2}$, $\mathfrak{Z}_{x-1}$ respective in $\mathfrak{Z}_{x-1}$, $\mathfrak{Z}_x$, so wie $\mathfrak{N}_{x-2}$, $\mathfrak{N}_{x-1}$ respective in $\mathfrak{N}_{x-1}$, $\mathfrak{N}_x$ über. Also ist offenbar

$$\frac{\mathfrak{Z}_{x+1}}{\mathfrak{N}_{x+1}} = \frac{\mathfrak{Z}_{x-1} + \mathfrak{Z}_x\, a_x}{\mathfrak{N}_{x-1} + \mathfrak{N}_x\, a_{x+1}},$$

und das bemerkte Gesetz ist folglich nach einer bekannten Schlußweise allgemein.

Vergleicht man jetzt die so eben für den zweiten Kettenbruch gefundenen Zähler und Nenner mit den vorher für den ersten Kettenbruch gefundenen Nennern, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{Z}_0 = 1 \quad (\quad) \quad (\quad)(\quad)$$
$$\mathfrak{Z}_1 = a_0 = \mathfrak{N}_0,$$
$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1\, a_1 = 1 + a_0\, a_1 = \mathfrak{N}_1,$$
$$\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2\, a_2 = \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_1\, a_2 = \mathfrak{N}_2,$$
$$\mathfrak{Z}_4 = \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3\, a_3 = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2\, a_3 = \mathfrak{N}_3,$$
$$\mathfrak{Z}_5 = \mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{Z}_4\, a_4 = \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3\, a_4 = \mathfrak{N}_4,$$
$$\text{u. s. w.}$$

Digitized by Google

und

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_0 &= a_0 = N_0, \\
\mathfrak{N}_1 &= 1 + a_0 a_1 = N_1, \\
\mathfrak{N}_2 &= \mathfrak{N}_0 + \mathfrak{N}_1 a_2 = N_0 + N_1 a_2 = N_2, \\
\mathfrak{N}_3 &= \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 a_3 = N_1 + N_2 a_3 = N_3, \\
\mathfrak{N}_4 &= \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 a_4 = N_2 + N_3 a_4 = N_4, \\
\mathfrak{N}_5 &= \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_4 a_5 = N_3 + N_4 a_5 = N_5,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Also hat man auch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_0 &= N_0 = \mathfrak{Z}_1, \\
\mathfrak{N}_1 &= N_1 = \mathfrak{Z}_2, \\
\mathfrak{N}_2 &= N_2 = \mathfrak{Z}_3, \\
\mathfrak{N}_3 &= N_3 = \mathfrak{Z}_4, \\
\mathfrak{N}_4 &= N_4 = \mathfrak{Z}_5, \\
\mathfrak{N}_5 &= N_5 = \mathfrak{Z}_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Ueberhaupt wollen wir jetzt

$$p_\mu = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{\mu-1}} + \frac{1}{a_\mu} + \frac{1}{q_\mu}$$

setzen, so ist zuvörderst

$$p_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{q_0}{1 + a_0 q_0}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{Z_0}{N_0} = \frac{1}{a_0}, \quad \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_0} = \frac{1}{a_0};$$

also

$$p_0 - \frac{Z_0}{N_0} = \frac{q_0}{1 + a_0 q_0} - \frac{1}{a_0} = -\frac{1}{a_0 (1 + a_0 q_0)},$$

$$q_0 + \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_0} = q_0 + \frac{1}{a_0} = \frac{1 + a_0 q_0}{a_0};$$

und folglich

$$\left(p_0 - \frac{Z_0}{N_0}\right)\left(q_0 + \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_0}\right) = -\left(\frac{1}{a_0}\right)^2.$$

Ferner ist

$$p_1 = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_0 + \frac{q_1}{1 + a_1 q_1}},$$

Digitized by Google

d. i.

$$p_1 = \frac{1 + a_1 q_1}{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{a_1}{1 + a_0 a_1}, \quad \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1} = \frac{a_0}{1 + a_0 a_1};$$

und folglich, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$p_1 - \frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{(1 + a_0 a_1)\{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1\}},$$

$$q_1 + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1} = \frac{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1}{1 + a_0 a_1}.$$

Daher ist

$$\left(p_1 - \frac{Z_1}{N_1}\right)\left(q_1 + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1}\right) = \left(\frac{1}{1 + a_0 a_1}\right)^2.$$

Man sieht also, daß die Producte

$$\left(p_0 - \frac{Z_0}{N_0}\right)\left(q_0 + \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_0}\right),$$

$$\left(p_1 - \frac{Z_1}{N_1}\right)\left(q_1 + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1}\right)$$

respective von p_0, q_0 und p_1, q_1 ganz unabhängig sind.

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu prüfen, wollen wir jetzt, indem

$$L_0, L_1, L_2, L_3, \ldots L_{x-1}$$

respective von

$$p_0, q_0; p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots, p_{x-1}, q_{x-1}$$

ganz unabhängige Größen bezeichnen,

$$\left(p_0 - \frac{Z_0}{N_0}\right)\left(q_0 + \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_0}\right) = L_0,$$

$$\left(p_1 - \frac{Z_1}{N_1}\right)\left(q_1 + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{N}_1}\right) = L_1,$$

$$\left(p_2 - \frac{Z_2}{N_2}\right)\left(q_2 + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{N}_2}\right) = L_2,$$

u. s. w.

$$\left(p_{x-1} - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}\right)\left(q_{x-1} + \frac{\mathfrak{Z}_{x-1}}{\mathfrak{N}_{x-1}}\right) = L_{x-1}$$

setzen.

Weil nun

$$p_{x-1} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}\left(+ \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{x-1}} + \frac{1}{q_{x-1}}\right.$$

Digitized by Google

und

$$p_x = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{x-1}} + \frac{1}{a_x} + \frac{1}{q_x}$$

ist, so ist wegen der Gleichung

$$\left(p_{x-1} - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}\right)\left(q_{x-1} + \frac{\mathfrak{Z}_{x-1}}{\mathfrak{N}_{x-1}}\right) = L_{x-1},$$

wo L_{x-1} von p_{x-1}, q_{x-1} ganz unabhängig ist, deren Richtigkeit vorausgesetzt wurde, offenbar

$$\left(p_x - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right) = L_{x-1}.$$

Weil aber

$$\frac{\mathfrak{Z}_{x-1}}{\mathfrak{N}_{x-1}} = \frac{1}{a_{x-1}} + \frac{1}{a_{x-2}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0},$$

also

$$a_x + \frac{\mathfrak{Z}_{x-1}}{\mathfrak{N}_{x-1}} = a_x + \frac{1}{a_{x-1}} + \frac{1}{a_{x-2}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0},$$

und folglich, weil

$$\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x} = \frac{1}{a_x} + \frac{1}{a_{x-1}} + \frac{1}{a_{x-2}} + \cdots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0}$$

ist,

$$a_x + \frac{\mathfrak{Z}_{x-1}}{\mathfrak{N}_{x-1}} = \frac{\mathfrak{N}_x}{\mathfrak{Z}_x}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\left(p_x - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}\right)\left(\frac{1}{q_x} + \frac{\mathfrak{N}_x}{\mathfrak{Z}_x}\right) = L_{x-1},$$

d. i.

$$\frac{\left(p_x - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right)}{q_x \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}} = L_{x-1}.$$

Digitized by Google

Nun ist aber nach den aus dem Obigen bekannten Relationen

$$p_x - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}} = \frac{Z_{x-1} + Z_x\, q_x}{N_{x-1} + N_x\, q_x} - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}$$
$$= -\frac{(Z_{x-1}\, N_x - Z_x\, N_{x-1})\, q_x}{N_{x-1}\,(N_{x-1} + N_x\, q_x)},$$

$$p_x - \frac{Z_x}{N_x} = \frac{Z_{x-1} + Z_x\, q_x}{N_{x-1} + N_x\, q_x} - \frac{Z_x}{N_x}$$
$$= \frac{Z_{x-1}\, N_x - Z_x\, N_{x-1}}{N_x\,(N_{x-1} + N_x\, q_x)},$$

und folglich offenbar

$$\frac{p_x - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}}{q_x} = -\frac{N_x}{N_{x-1}}\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right).$$

Führt man dies in die oben gefundene Gleichung

$$\frac{\left(p_x - \frac{Z_{x-1}}{N_{x-1}}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right)}{q_x\,\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}} = L_{x-1}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right) = -\frac{N_{x-1}\,\mathfrak{Z}_x}{N_x\,\mathfrak{N}_x}\,L_{x-1},$$

aus der man sieht, daß das Product

$$\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right)$$

von p_x, q_x ganz unabhängig ist; und nach einer bekannten Schlußweise ist also das oben bemerkte Gesetz ganz allgemein gültig, d. h. das Product

$$\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right)$$

ist immer von den Größen p_x, q_x ganz unabhängig.

Setzen wir, analog mit der oben eingeführten Bezeichnung,

$$\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right) = L_x,$$

so erhalten wir nach dem Vorhergehenden zugleich die Relation

$$L_x = -\frac{N_{x-1}\,\mathfrak{Z}_x}{N_x\,\mathfrak{N}_x}\,L_{x-1}.$$

Digitized by Google

Hiernach und nach dem Obigen ist:

$$L_0 = -\left(\frac{1}{a_0}\right)^0 = -\frac{\mathfrak{Z}_0}{N_0\,\mathfrak{N}_0},$$

$$L_1 = -\frac{N_0\,\mathfrak{Z}_1}{N_1\,\mathfrak{N}_1}\,L_0 = \frac{\mathfrak{Z}_0}{N_0\,\mathfrak{N}_0}\cdot\frac{N_0\,\mathfrak{Z}_1}{N_1\,\mathfrak{N}_1},$$

$$L_2 = -\frac{N_1\,\mathfrak{Z}_2}{N_2\,\mathfrak{N}_2}\,L_1 = -\frac{\mathfrak{Z}_0}{N_0\,\mathfrak{N}_0}\cdot\frac{N_0\,\mathfrak{Z}_1}{N_1\,\mathfrak{N}_1}\cdot\frac{N_1\,\mathfrak{Z}_2}{N_2\,\mathfrak{N}_2},$$

$$L_3 = -\frac{N_2\,\mathfrak{Z}_3}{N_3\,\mathfrak{N}_3}\,L_2 = \frac{\mathfrak{Z}_0}{N_0\,\mathfrak{N}_0}\cdot\frac{N_0\,\mathfrak{Z}_1}{N_1\,\mathfrak{N}_1}\cdot\frac{N_1\,\mathfrak{Z}_2}{N_2\,\mathfrak{N}_2}\cdot\frac{N_2\,\mathfrak{Z}_3}{N_3\,\mathfrak{N}_3},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also allgemein

$$L_x = (-1)^{x-1}\left(\frac{\mathfrak{Z}_0}{N_0\,\mathfrak{N}_0}\cdot\frac{N_0\,\mathfrak{Z}_1}{N_1\,\mathfrak{N}_1}\cdot\frac{N_1\,\mathfrak{Z}_2}{N_2\,\mathfrak{N}_2}\cdots\frac{N_{x-2}\,\mathfrak{Z}_{x-1}}{N_{x-1}\,\mathfrak{N}_{x-1}}\cdot\frac{N_{x-1}\,\mathfrak{Z}_x}{N_x\,\mathfrak{N}_x}\right),$$

d. i.

$$L_x = \frac{(-1)^{x-1}}{N_x}\left(\frac{\mathfrak{Z}_0\,\mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{Z}_2\,\mathfrak{Z}_3\cdots\mathfrak{Z}_{x-1}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2\,\mathfrak{N}_3\cdots\mathfrak{N}_{x-1}\,\mathfrak{N}_x}\right).$$

Nach dem Obigen ist aber bekanntlich

$$\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{Z}_1,$$
$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Z}_2,$$
$$\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{Z}_3,$$
u. s. w.
$$\mathfrak{N}_{x-1} = \mathfrak{Z}_x$$

und $\mathfrak{N}_x = N_x$. Also ist offenbar

$$L_x = \frac{(-1)^{x-1}}{N_x}\cdot\frac{\mathfrak{Z}_0}{N_x} = \frac{(-1)^{x-1}}{\mathfrak{N}_x}\cdot\frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{N}_x},$$

und folglich, weil nach dem Obigen $\mathfrak{Z}_0 = 1$ und

$$\mathfrak{N}_x = N_x = \mathfrak{Z}_{x+1}$$

ist:

$$L_x = \frac{(-1)^{x-1}}{(N_x)^2} = \frac{(-1)^{x-1}}{(\mathfrak{N}_x)^2} = \frac{(-1)^{x-1}}{(\mathfrak{Z}_{x+1})^2}.$$

Wir haben daher die folgenden merkwürdigen Gleichungen:

$$\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right) = \frac{(-1)^{x-1}}{(N_x)^2} = \frac{(-1)^{x-1}}{(\mathfrak{N}_x)^2} = \frac{(-1)^{x-1}}{(\mathfrak{Z}_{x+1})^2}$$

oder

$$(-1)^{x-1}\left(p_x - \frac{Z_x}{N_x}\right)\left(q_x + \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{N}_x}\right) = \left(\frac{1}{N_x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathfrak{N}_x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_{x+1}}\right)^2,$$

von denen im folgenden Paragraphen eine wichtige Anwendung auf die Linsensysteme gemacht werden wird.

Digitized by Google

§. 72.

Die in §. 70. gefundenen Kettenbrüche wollen wir jetzt mit einer geringen Abänderung auf folgende Art darstellen:

$$F = \frac{1}{\frac{1-n}{r}} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{r'}} + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{1-n_1}{r_1}} + \frac{1}{\frac{D_1}{n_1}} + \frac{1}{\frac{n_1-1}{r_1'}} + \frac{1}{E_1} + \cdots + \frac{1}{E_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{1-n_\mu}{r_\mu}} + \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu}} + \frac{1}{\frac{n_\mu-1}{r_\mu'}}$$

Digitized by Google

und

$$-F_{\mu'} = \frac{1}{\frac{n_{\mu'}-1}{r_{\mu'}}} + \frac{1}{\frac{D_{\mu'}}{n_{\mu'}}} + \frac{1}{\frac{1-n_{\mu'}}{r_{\mu'}}} + \frac{1}{E_{\mu'-1}} + \frac{1}{\frac{n_{\mu'-1}-1}{r_{\mu'-1}}} + \frac{1}{\frac{D_{\mu'-1}}{n_{\mu'-1}}} + \frac{1}{\frac{1-n_{\mu'-1}}{r_{\mu'-1}}} + \frac{1}{E_{\mu'-2}} + \cdots + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{n-1}{r}} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{1-n}{r}},$$

Digitized by Google

so wie

$$P = \frac{1}{\frac{1-n}{r}} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{r'}} + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{1-n_1}{r_1}} + \frac{1}{\frac{D_1}{n_1}} + \frac{1}{\frac{n_1-1}{r_1'}} + \frac{1}{E_1} + \cdots + \frac{1}{E_{\mu-1}} + \frac{1}{\frac{1-n_\mu}{r_\mu}} + \frac{1}{\frac{D_\mu}{n_\mu}} + \frac{1}{\frac{n_\mu-1}{r_\mu'}} + \frac{1}{P_\mu'}$$

Digitized by Google

und

$$-P'_{\nu'} = \frac{1}{\frac{n_{\nu'}-1}{r_{\nu'}}} + \frac{1}{\frac{D_{\nu'}}{n_{\nu'}}} + \frac{1}{\frac{1-n_{\nu'}}{r_{\nu'}}} + \frac{1}{E_{\nu'-1}} + \frac{1}{\frac{n_{\nu'-1}-1}{r_{\nu'-1}}} + \frac{1}{\frac{D_{\nu'-1}}{n_{\nu'-1}}} + \frac{1}{\frac{1-n_{\nu'-1}}{r_{\nu'-1}}} + \frac{1}{E_{\nu'-2}} + \cdots + \frac{1}{E} + \frac{1}{\frac{n-1}{r}} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{1-n}{r}} + \frac{1}{-P}.$$

Digitized by Google

Die Anzahl der Glieder der Kettenbrüche, durch welche F_μ und $-F_\mu'$ dargestellt werden, ist offenbar

$$3(\mu+1)+\mu=4\mu+3.$$

Bezeichnen wir also den gemeinschaftlichen Nenner der diesen beiden Kettenbrüchen gleichen gemeinen Brüche, welche man durch successive Berechnung der Partialwerthe dieser Kettenbrüche nach bekannten Regeln erhält, jetzt durch N_μ; so ist nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satze offenbar

$$(-1)^{4\mu+3-2}.(P-F)\{P_\mu'+(-F_\mu')\}=\left(\frac{1}{N_\mu}\right)^2,$$

d. i.

$$(-1)^{4\mu+1}.(P-F)(P_\mu'-F_\mu')=\left(\frac{1}{N_\mu}\right)^2,$$

und folglich offenbar

$$(P-F)(P_\mu'-F_\mu')=-\left(\frac{1}{N_\mu}\right)^2,$$

so daß also das Product

$$(P-F)(P_\mu'-F_\mu')$$

jederzeit einem constanten negativen Quadrate gleich ist, was man als eine Verallgemeinerung des in §. 64. für eine Linse bewiesenen analogen Satzes zu betrachten hat.

Setzen wir der Kürze wegen

$$K_\mu=\frac{1}{N_\mu},$$

so wird die obige Gleichung

$$(P-F)(P_\mu'-F_\mu')=-K_\mu^2,$$

und kann nun auch auf die Form

$$\frac{1}{P-F\mp K_\mu}-\frac{1}{P_\mu'-F_\mu'\pm K_\mu}=\mp\frac{1}{K_\mu}$$

gebracht werden, was sich leicht auf folgende Art zeigen läßt.

Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten der zu beweisenden Gleichung mit

$$K_\mu(P-F\mp K_\mu)(P_\mu'-F_\mu'\pm K_\mu),$$

so erhält man

$$K_\mu(P_\mu'-F_\mu'\pm K_\mu)-K_\mu(P-F\mp K_\mu)=\mp(P-F\mp K_\mu)(P_\mu'-F_\mu'\pm K_\mu),$$

also

$$K_\mu(P_\mu'-F_\mu'-P+F)\pm 2K_\mu^2$$
$$=\mp(P-F)(P_\mu'-F_\mu')+K_\mu(P_\mu'-F_\mu'-P+F)\pm K_\mu^2,$$

folglich, wenn man aufhebt, was sich aufheben läßt:

$$\pm K_\mu^2=\mp(P-F)(P_\mu'-F_\mu')$$

oder

$$(P-F)(P_\mu'-F_\mu')=-K_\mu^2,$$

Digitized by Google

und da nun diese Gleichung nach dem Obigen wirklich Statt findet, so ist auch die zu beweisende Gleichung richtig, d. h. es ist immer, natürlich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$\frac{1}{P-F\mp K_\mu} - \frac{1}{P_\mu'-F_\mu'\pm K_\mu} = \mp\frac{1}{K_\mu}.$$

Bezeichnen wir die Abscissen der beiden durch die primitiven Abscissen F, F_μ' bestimmten Punkte der Axe des Linsensystems in Bezug auf die beiden durch die primitiven Abscissen P, P_μ' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte respective durch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\mu'$; so ist

$$F = P + \mathfrak{F},\ F_\mu' = P_\mu' + \mathfrak{F}_\mu';$$

also

$$\mathfrak{F} = F - P = -(P-F),$$
$$\mathfrak{F}_\mu' = F_\mu' - P_\mu' = -(P_\mu' - F_\mu');$$

und folglich nach dem Obigen

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}_\mu' = -K_\mu^2.$$

Bezeichnen wir jetzt in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen P, P_μ' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte die Abscissen zweier in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen F, F_μ' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte durch die Abscissen $+K_\mu$, $-K_\mu$ bestimmten Punkte der Axe respective durch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\mu'$; so ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F} + K_\mu,\ \mathfrak{H}_\mu' = \mathfrak{F}_\mu' - K_\mu;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{H} = F - P + K_\mu,\ \mathfrak{H}_\mu' = F_\mu' - P_\mu' - K_\mu;$$

und folglich

$$P - F - K_\mu = -\mathfrak{H},\ P_\mu' - F_\mu' + K_\mu = -\mathfrak{H}_\mu'.$$

Daher ist nach der oben bewiesenen Gleichung, wenn man in derselben die obern Zeichen nimmt:

$$\frac{1}{\mathfrak{H}} - \frac{1}{\mathfrak{H}_\mu'} = \frac{1}{K_\mu}.$$

Bezeichnen wir endlich in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen P, P_μ' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte die Abscissen zweier in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen F, F_μ' bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte durch die Abscissen $-K_\mu$, $+K_\mu$ bestimmten Punkte der Axe respective durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\mu'$; so ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} - K_\mu,\ \mathfrak{G}_\mu' = \mathfrak{F}_\mu' + K_\mu;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{G} = F - P - K_\mu,\ \mathfrak{G}_\mu' = F_\mu' - P_\mu' + K_\mu;$$

und folglich

$$P - F + K_\mu = -\mathfrak{G},\ P_\mu' - F_\mu' - K_\mu = -\mathfrak{G}_\mu'.$$

Digitized by Google

Daher ist nach der oben bewiesenen Gleichung, wenn man in derselben die untern Zeichen nimmt:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}} - \frac{1}{\mathfrak{G}_\mu'} = -\frac{1}{K_\mu}.$$

Die in Bezug auf die durch die primitiven Abscissen P, P_μ', welche bekanntlich die Abscissen des leuchtenden Punktes und seines Bildes sind, bestimmten Punkte der Axe als Anfangspunkte durch die Abscissen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\mu'$; $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\mu'$; $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\mu'$ bestimmten Punkte der Axe werden gewöhnlich respective die Brennpunkte, Hauptpunkte, Gegenpunkte des Linsensystems genannt; und die Größen F, F_μ' nennt man meistens die beiden Brennweiten desselben.

Man hat nicht unbeachtet zu lassen, daß in den drei vorher bewiesenen Gleichungen:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}_\mu' = -K_\mu^2,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{H}} - \frac{1}{\mathfrak{H}_\mu'} = \frac{1}{K_\mu}, \quad \frac{1}{\mathfrak{G}} - \frac{1}{\mathfrak{G}_\mu'} = -\frac{1}{K_\mu}$$

alle Abscissen sich, insofern wir den strahlenden Punkt in der Axe des Linsensystems liegend annehmen, auf den strahlenden Punkt und sein gleichfalls in der Axe des Linsensystems liegendes Bild als Anfangspunkte beziehen.

Auch ist auf der Stelle ersichtlich, daß die ganze vorher angestellte Untersuchung über Linsensysteme nur als eine Verallgemeinerung der in §. 64. über einzelne Linsen angestellten analogen Untersuchung zu betrachten ist.

§. 73.

Nach §. 64. haben wir in den in diesem Kapitel eingeführten Bezeichnungen offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1 + (n-1)\frac{P}{r}}{1 + (n-1)\frac{P'}{r'}},$$

$$\frac{Q_1}{Q_1'} = \frac{1 + (n_1-1)\frac{P_1}{r_1}}{1 + (n_1-1)\frac{P_1'}{r_1'}},$$

$$\frac{Q_2}{Q_2'} = \frac{1 + (n_2-1)\frac{P_2}{r_2}}{1 + (n_2-1)\frac{P_2'}{r_2'}},$$

u. s. w.

$$\frac{Q_\mu}{Q_\mu'} = \frac{1 + (n_\mu-1)\frac{P_\mu}{r_\mu}}{1 + (n_\mu-1)\frac{P_\mu'}{r_\mu}}.$$

Digitized by Google

Weil nun offenbar

$$Q' = Q_1,\ Q_1' = Q_2,\ Q_2' = Q_3,\ \ldots\ Q_{\mu-1}' = Q_\mu$$

ist; so ergiebt sich aus diesen Gleichungen durch Multiplication auf der Stelle die Gleichung:

$$\frac{Q}{Q_\mu'} =$$

$$\frac{1+(n-1)\frac{P}{r}}{1+(n-1)\frac{P'}{r'}} \cdot \frac{1+(n_1-1)\frac{P_1}{r_1}}{1+(n_1-1)\frac{P_1'}{r_1'}} \cdot \frac{1+(n_2-1)\frac{P_2}{r_2}}{1+(n_2-1)\frac{P_2'}{r_2'}} \cdots \frac{1+(n_\mu-1)\frac{P_\mu}{r_\mu}}{1+(n_\mu-1)\frac{P_\mu'}{r_\mu'}}.$$

Weil aber nach §. 70.

$$P_1 = P' - E,$$
$$P_2 = P_1' - E_1,$$
$$P_3 = P_2' - E_2,$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$P_\mu = P_{\mu-1}' - E_{\mu-1}$$

ist, so lassen sich aus der obigen Gleichung leicht die Größen

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots P_\mu$$

eliminiren; und weil nun zur Berechnung von

$$P', P_1', P_2', P_3', \ldots P_\mu'$$

im Vorhergehenden die nöthigen Formeln vollständig entwickelt worden sind, so ist man auch mittelst der obigen Gleichung immer das Verhältniß

$$\frac{Q}{Q_\mu'}$$

zu bestimmen im Stande. Wegen der weitern Entwickelung dieser Gleichung, welche, wenn sie in möglichster Einfachheit gegeben werden sollte, eine ganz andere Anlage der obigen Untersuchungen über Linsensysteme, die dem Zwecke des vorliegenden Werks nicht ganz angemessen gewesen sein dürfte, erfordert haben würde, erlaube ich mir auf meine Optischen Untersuchungen. Thl. I. Leipzig. 1846. §. 22. zu verweisen.

§. 74.

Zu dem bisher betrachteten Systeme von $\mu + 1$ Linsen wollen wir jetzt noch eine $(\mu+2)$te Linse hinzufügen, und deren auf ähnliche Art wie im Vorhergehenden genommene Entfernung von der $(\mu+1)$ten Linse durch E_μ bezeichnen.

In Bezug auf die $(\mu+2)$te Linse, wenn man dieselbe für sich allein als ein Linsensystem betrachtet, und in Bezug auf das ganze System der $\mu+2$ Linsen, sollen jetzt f, f' und Φ, $\Phi_{\mu+1}'$ eine ganz ähnliche Bedeutung haben wie im Vorhergehenden F, F_μ' in Bezug auf das bisher betrachtete System

Digitized by Google

von $\mu + 1$ Linsen. Sind dann K_μ^2 und k^2 zwei constante Quadrate, so ist nach dem früher Bewiesenen, wo die Bedeutung der Symbole $P_{\mu+1}$, $P'_{\mu+1}$ nach dem Vorhergehenden leicht von selbst ohne weitere Erläuterung erhellen wird:

$$(P - F)(P'_\mu - F'_\mu) = -K_\mu^2$$

und

$$(P_{\mu+1} - f)(P'_{\mu+1} - f') = -k^2.$$

Für $P = \Phi$ wird offenbar $P'_{\mu+1}$ unendlich, und daher, wie leicht erhellen wird,

$$P'_\mu = E_\mu + f.$$

Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$(\Phi - F)(E_\mu + f - F'_\mu) = -K_\mu^2.$$

Wenn man P unendlich werden läßt, so wird offenbar

$$P'_{\mu+1} = \Phi'_{\mu+1},$$

und, wie sogleich erhellen wird,

$$P_{\mu+1} = -E_\mu + F'_\mu.$$

Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$(E_\mu + f - F'_\mu)(\Phi'_{\mu+1} - f') = k^2.$$

Also hat man jetzt die folgenden Gleichungen:

$$(P - F)(P'_\mu - F'_\mu) = (\Phi - F)(E_\mu + f - F'_\mu),$$

$$(P_{\mu+1} - f)(P'_{\mu+1} - f') = -(\Phi'_{\mu+1} - f')(E_\mu + f - F'_\mu).$$

Schreibt man diese Gleichungen als Proportionen, so erhält man:

$$P - F : E_\mu + f - F'_\mu = \Phi - F : P'_\mu - F'_\mu,$$

$$P'_{\mu+1} - f' : E_\mu + f - F'_\mu = -(\Phi'_{\mu+1} - f') : P_{\mu+1} - f;$$

und aus diesen Proportionen ergiebt sich nach einem bekannten Satze von den Proportionen:

$$P - F : E_\mu + f - F'_\mu = P - \Phi : E_\mu + f - P'_\mu,$$

$$P'_{\mu+1} - f' : E_\mu + f - F'_\mu = P'_{\mu+1} - \Phi'_{\mu+1} : E_\mu - F'_\mu + P_{\mu+1}.$$

Weil nun aber offenbar

$$P'_\mu = E_\mu + P_{\mu+1}$$

ist, so gehen diese beiden Proportionen in die folgenden über:

$$P - F : E_\mu + f - F'_\mu = P - \Phi : -(P_{\mu+1} - f),$$

$$P'_{\mu+1} - f' : E_\mu + f - F'_\mu = P'_{\mu+1} - \Phi'_{\mu+1} : P'_\mu - F'_\mu;$$

und führen nun sogleich zu der Gleichung

$$\frac{(P - F)(P_{\mu+1} - f)}{(P'_\mu - F'_\mu)(P'_{\mu+1} - f')} = -\frac{P - \Phi}{P'_{\mu+1} - \Phi'_{\mu+1}},$$

von welcher sich jetzt die folgende Anwendung machen läßt.

Für eine Linse ist nach §. 64. in der in diesem Kapitel eingeführten Bezeichnung:

$$\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2 = -\frac{P - F}{P' - F'}$$

Digitized by Google

Kommt nun noch eine zweite Linse hinzu, so ist hiernach für diese Linse

$$\left(\frac{Q_1}{Q_1'}\right)^2 = -\frac{P_1 - f}{P_1' - f'};$$

und folglich durch Multiplication, weil offenbar $Q' = Q_1$ ist:

$$\left(\frac{Q}{Q_1'}\right)^2 = \frac{(P-F)(P_1-f)}{(P'-F')(P_1'-f')}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\frac{(P-F)(P_1-f)}{(P'-F')(P_1'-f')} = -\frac{P-\Phi}{P_1'-\Phi_1'},$$

also

$$\left(\frac{Q}{Q_1'}\right)^2 = -\frac{P-\Phi}{P_1'-\Phi_1'},$$

d. h. es ist, wenn man jetzt für Φ, Φ_1' respective F, F_1' setzt, für zwei Linsen:

$$\left(\frac{Q}{Q_1'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P_1'-F_1'}.$$

Kommt nun noch eine dritte Linse hinzu, so ist für diese Linse nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{Q_2}{Q_2'}\right)^2 = -\frac{P_2-f}{P_2'-f'},$$

also durch Multiplication, weil offenbar $Q_1' = Q_2$ ist:

$$\left(\frac{Q}{Q_2'}\right)^2 = \frac{(P-F)(P_2-f)}{(P_1'-F_1')(P_2'-f')}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\frac{(P-F)(P_2-f)}{(P_1'-F_1')(P_2'-f')} = -\frac{P-\Phi}{P_2'-\Phi_2'},$$

also

$$\left(\frac{Q}{Q_2'}\right)^2 = -\frac{P-\Phi}{P_2'-\Phi_2'},$$

d. h. es ist, wenn man jetzt für Φ, Φ_2' respective F, F_2' setzt, für drei Linsen:

$$\left(\frac{Q}{Q_2'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P_2'-F_2'}.$$

Läßt man jetzt noch eine vierte Linse hinzutreten, so ist für diese Linse nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{Q_3}{Q_3'}\right)^2 = -\frac{P_3-f}{P_3'-f'},$$

also durch Multiplication, weil offenbar $Q_2' = Q_3$ ist:

$$\left(\frac{Q}{Q_3'}\right)^2 = \frac{(P-F)(P_3-f)}{(P_2'-F_2')(P_3'-f')}.$$

Digitized by Google

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\frac{(P-F)\,(P_2-f)}{(P_2'-F_2')\,(P_3'-f')} = -\frac{P-\Phi}{P_3'-\Phi_3'},$$

also

$$\left(\frac{Q}{Q_3'}\right)^2 = -\frac{P-\Phi}{P_3'-\Phi_3'},$$

d. h. es ist, wenn man für Φ, Φ_3' respective F, F_3' setzt, für vier Linsen:

$$\left(\frac{Q}{Q_3'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P_3'-F_3'}.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist daher allgemein für ein System von $\mu+1$ Linsen:

$$\left(\frac{Q}{Q_\mu'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P_\mu'-F_\mu'}.$$

So merkwürdig und wichtig für die Berechnung des absoluten Werths des Verhältnisses

$$\frac{Q}{Q_\mu'}$$

diese Formel auch ist, so hat dieselbe doch den Nachtheil, daß sich aus ihr nicht unmittelbar das Vorzeichen dieses Verhältnisses beurtheilen läßt, worüber man also bei der Anwendung derselben jederzeit aus andern Gründen entscheiden muß, was auch meistens keine Schwierigkeit hat, indem dazu oft schon die bloße Anschauung genügt.

Dreizehntes Kapitel.

Von den achromatischen Linsen.

§. 75.

Wir denken uns jetzt zwei Linsen auf derselben Axe, und nehmen an, daß auf die vordere Linse parallel mit der gemeinschaftlichen Axe und ganz nahe bei derselben Strahlen fallen. Für die vordere Linse behalten wir die früher eingeführten Symbole auch hier bei, jedoch mit dem Unterschiede, daß wir jetzt für diese Linse m und n die Brechungsexponenten für die beiden äußersten farbigen Strahlen bedeuten lassen. Werden dann die den äußersten farbigen Strahlen entsprechenden Brenn-

Digitized by Google

weiten dieser Linse jetzt respective durch F und $\mathfrak{F}$ bezeichnet, so ist nach §. 64. oder §. 72., wenn man nur immer festhält, daß die früher durch Δ und D bezeichneten Größen absolut gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt sind:

$$F = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{mr + (m-1)\Delta}{m(r'-r) - (m-1)\Delta} r',$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{nr + (n-1)\Delta}{n(r'-r) - (n-1)\Delta} r'.$$

Bezeichnen wir aber die als positiv betrachtete Entfernung der beiden Linsen von einander durch E, und versehen für die hintere Linse die vorher für die vordere Linse gebrauchten Symbole mit unteren Accenten, so sind nach §. 64. die Vereinigungsweiten der äußersten farbigen Strahlen mit der Axe bei ihrem Durchgange durch die beiden Linsen offenbar respective:

$$\frac{1 + \frac{\Delta_1}{m_1}\left(\frac{m_1-1}{r_1} + \frac{1}{F+E}\right)}{\left(m_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\Delta_1}{m_1} \cdot \frac{m_1-1}{r_1} \cdot \frac{m_1-1}{r_1'} + \left(1 - \frac{\Delta_1}{m_1} \cdot \frac{m_1-1}{r_1'}\right)\frac{1}{F+E}},$$

$$\frac{1 + \frac{\Delta_1}{n_1}\left(\frac{n_1-1}{r_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)}{\left(n_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\Delta_1}{n_1} \cdot \frac{n_1-1}{r_1} \cdot \frac{n_1-1}{r_1'} + \left(1 - \frac{\Delta_1}{n_1} \cdot \frac{n_1-1}{r_1'}\right)\frac{1}{\mathfrak{F}+E}};$$

und sollen also diese Vereinigungsweiten einander gleich, d. h. soll, wie man zu sagen pflegt, das System achromatisch, oder bei demselben die chromatische Abweichung gehoben sein, so muß die Gleichung

$$\frac{1 + \frac{\Delta_1}{m_1}\left(\frac{m_1-1}{r_1} + \frac{1}{F+E}\right)}{\left(m_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\Delta_1}{m_1} \cdot \frac{m_1-1}{r_1} \cdot \frac{m_1-1}{r_1'} + \left(1 - \frac{\Delta_1}{m_1} \cdot \frac{m_1-1}{r_1'}\right)\frac{1}{F+E}}$$

$$= \frac{1 + \frac{\Delta_1}{n_1}\left(\frac{n_1-1}{r_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)}{\left(n_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\Delta_1}{n_1} \cdot \frac{n_1-1}{r_1} \cdot \frac{n_1-1}{r_1'} + \left(1 - \frac{\Delta_1}{n_1} \cdot \frac{n_1-1}{r_1'}\right)\frac{1}{\mathfrak{F}+E}},$$

welche die Bedingungsgleichung des Achromatismus genannt wird, Statt finden.

Diese Gleichung bringt man zuerst sogleich auf die Form

$$\frac{1 + \left(\frac{m_1-1}{r_1} + \frac{1}{F+E}\right)\frac{\Delta_1}{m_1}}{\left(m_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + \frac{1}{F+E} - \frac{m_1-1}{r_1'}\left(\frac{m_1-1}{r_1} + \frac{1}{F+E}\right)\frac{\Delta_1}{m_1}}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1 + \left(\frac{n_1 - 1}{r_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)\frac{\Delta_1}{n_1}}{\left(n_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + \frac{1}{\mathfrak{F}+E} - \frac{n_1 - 1}{r_1'}\left(\frac{n_1 - 1}{r_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)\frac{\Delta_1}{n_1}},$$

und erhält dann ferner aus derselben mittelst leichter Rechnung die folgende Gleichung:

$$0 = \left(m_1 - n_1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + \frac{1}{F+E} - \frac{1}{\mathfrak{F}+E}$$
$$- \left(\frac{m_1 - 1}{r_1} + \frac{1}{F+E}\right)\left(\frac{n_1 - 1}{r_1} + \frac{m_1 - n_1}{r_1'} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)\frac{\Delta_1}{m_1}$$
$$+ \left(\frac{n_1 - 1}{r_1'} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)\left(\frac{m_1 - 1}{r_1} - \frac{m_1 - n_1}{r_1'} + \frac{1}{F+E}\right)\frac{\Delta_1}{n_1}$$
$$- \frac{m_1 - n_1}{r_1'}\left(\frac{m_1 - 1}{r_1} + \frac{1}{F+E}\right)\left(\frac{n_1 - 1}{r_1'} + \frac{1}{\mathfrak{F}+E}\right)\frac{\Delta_1}{m_1}\cdot\frac{\Delta_1}{n_1}.$$

§. 76.

Sehr vereinfacht wird die im vorhergehenden Paragraphen gefundene Bedingungsgleichung des Achromatismus, wenn man die Dicke Δ_1 als verschwindend betrachtet oder $\Delta_1 = 0$ setzt, indem dieselbe dann die einfache Gestalt

$$0 = \left(m_1 - n_1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + \frac{1}{F+E} - \frac{1}{\mathfrak{F}+E}$$

annimmt. Betrachtet man dann aber auch noch Δ als verschwindend, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$F = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{rr'}{r'-r} = \frac{1}{\left(m-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)},$$
$$\mathfrak{F} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{rr'}{r'-r} = \frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)};$$

und die vorhergehende Gleichung wird also:

$$0 = \left(m_1 - n_1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)$$
$$+ \frac{\left(m-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}{1 + \left(m-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)E} - \frac{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}{1 + \left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)E},$$

Digitized by Google

d. i., wie leicht erhellet:

$$0 = \left(m_1 - n_1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + \frac{\left(m-n\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)}{\left\{1+\left(m-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)E\right\}\left\{1+\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)E\right\}},$$

oder

$$\frac{m-n}{m_1-n_1}\cdot\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}} = -\left\{1+\left(m-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)E\right\}\left\{1+\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)E\right\},$$

oder

$$0 = \left(m-n\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) + \left(m_1-n_1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)\left\{1+\left(m-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)E\right\}\left\{1+\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)E\right\}.$$

Setzen wir

$$F_1 = \frac{1}{m_1-1}\cdot\frac{r_1\,r_1'}{r_1'-r_1} = \frac{1}{\left(m_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)},$$

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{n_1-1}\cdot\frac{r_1\,r_1'}{r_1'-r_1} = \frac{1}{\left(n_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)};$$

so wird die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{m-n}{m_1-n_1}\cdot\frac{m_1-1}{m-1}\cdot\frac{F_1}{F} = -\left(1+\frac{E}{F}\right)\left(1+\frac{E}{\mathfrak{F}}\right)$$

oder

$$\frac{m-n}{m_1-n_1}\cdot\frac{n_1-1}{n-1}\cdot\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}} = -\left(1+\frac{E}{F}\right)\left(1+\frac{E}{\mathfrak{F}}\right),$$

woraus sich auch die Gleichung

$$\frac{m-1}{m_1-1}\cdot\frac{F}{F_1} = \frac{n-1}{n_1-1}\cdot\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}_1}$$

oder

$$\frac{(m-1)(n_1-1)}{(n-1)(m_1-1)} = \frac{F F_1}{\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1}$$

ergiebt.

Für $E = 0$ ist nach dem Vorhergehenden

$$\left(m-n\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) + \left(m_1-n_1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right) = 0,$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{m-n}{m_1-n_1}\cdot\frac{m_1-1}{m-1}\cdot\frac{F_1}{F}=-1,$$

oder

$$\frac{m-n}{m_1-n_1}\cdot\frac{n_1-1}{n-1}\cdot\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}}=-1.$$

Also ist auch für $E=0$:

$$F:F_1=(m-n)(m_1-1):-(m_1-n_1)(m-1)=\frac{m-n}{m-1}:-\frac{m_1-n_1}{m_1-1}$$

oder

$$\mathfrak{F}:\mathfrak{F}_1=(m-n)(n_1-1):-(m_1-n_1)(n-1)=\frac{m-n}{n-1}:-\frac{m_1-n_1}{n_1-1}.$$

Setzt man überhaupt für die mittlern Strahlen

$$f=\frac{1}{\mu-1}\cdot\frac{rr'}{r'-r}=\frac{1}{(\mu-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)},$$

$$f_1=\frac{1}{\mu_1-1}\cdot\frac{r_1r_1'}{r_1'-r_1}=\frac{1}{(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)};$$

so ist

$$(m-1)F=(n-1)\mathfrak{F}=(\mu-1)f,$$

$$(m_1-1)F_1=(n_1-1)\mathfrak{F}_1=(\mu_1-1)f_1;$$

folglich

$$F=\frac{\mu-1}{m-1}f,\quad \mathfrak{F}=\frac{\mu-1}{n-1}f;$$

$$F_1=\frac{\mu_1-1}{m_1-1}f_1,\quad \mathfrak{F}_1=\frac{\mu_1-1}{n_1-1}f_1;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}\cdot\frac{f_1}{f}=-\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)\left(1+\frac{n-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)$$

oder

$$0=\frac{m-n}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f}+\frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1}\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)\left(1+\frac{n-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right).$$

Für $E=0$ wird diese Bedingungsgleichung:

$$\frac{m-n}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f}+\frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1}=0,$$

oder in Form einer Proportion geschrieben:

$$f:f_1=\frac{m-n}{\mu-1}:-\frac{m_1-n_1}{\mu_1-1},$$

oder auch

$$f:f_1=(m-n)(\mu_1-1):-(m_1-n_1)(\mu-1).$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir die den mittlern Strahlen entsprechende Brennweite der Doppellinse durch Φ, so ist nach §. 75.

$$\Phi = \frac{1}{\frac{1}{f} + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}.$$

Verbindet man hiermit die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$\frac{m-n}{\mu-1} \cdot \frac{1}{f} + \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1} \cdot \frac{1}{f_1} = 0,$$

so erhält man:

$$\frac{m-n}{\mu-1} \cdot \frac{1}{f} + \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}\left(\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{f}\right) = 0,$$

$$\frac{m_1-n_1}{\mu_1-1} \cdot \frac{1}{f_1} + \frac{m-n}{\mu-1}\left(\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{f_1}\right) = 0;$$

also

$$\frac{1}{f} = -\frac{\frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}}{\frac{m-n}{\mu-1} - \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}} \cdot \frac{1}{\Phi},$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{\frac{m-n}{\mu-1}}{\frac{m-n}{\mu-1} - \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}} \cdot \frac{1}{\Phi};$$

oder

$$f = \left\{1 - \frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}\right\}\Phi,$$

$$f_1 = \left\{1 - \frac{(m_1-n_1)(\mu-1)}{(m-n)(\mu_1-1)}\right\}\Phi;$$

oder

$$f = \left\{1 - \frac{m-n}{\mu-1} : \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}\right\}\Phi,$$

$$f_1 = \left\{1 - \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1} : \frac{m-n}{\mu-1}\right\}\Phi;$$

und kann also mittelst dieser Formeln f und f_1 bestimmen, wenn Φ gegeben ist.

Weil nach dem Obigen oder auch nach diesen Formeln

$$\frac{f}{f_1} = -\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)} = -\frac{m-n}{\mu-1} : \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}$$

ist, so haben f und f_1 offenbar jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. die eine der beiden Linsen muß immer eine Sammellinse, die andere eine Zerstreuungslinse sein.

Digitized by Google

Soll die Doppellinse eine Sammellinse sein, so muß Φ, also auch $\frac{1}{\Phi}$, negativ sein; und weil nun

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}$$

ist, so muß rücksichtlich der absoluten Werthe die Brennweite der Zerstreuungslinse größer als die Brennweite der Sammellinse sein.

Wenn wie vorher m, n; m_1, n_1 die Brechungsexponenten für die äußersten farbigen Strahlen, und μ, μ_1 die Brechungsexponenten für die mittleren farbigen Strahlen sind; so nennt man die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{m-n}{\mu-1} \text{ und } \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}$$

in der Optik die Zerstreuungsverhältnisse der Glasarten, aus denen die Linsen geschliffen sind. Weil nun nach dem Obigen

$$f : f_1 = \frac{m-n}{\mu-1} : -\frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}$$

ist, so muß nach dem Vorhergehenden die Zerstreuungslinse immer aus dem Glase geschliffen werden, welches das größere Zerstreuungsverhältniß hat, die Sammellinse dagegen aus dem Glase, welches das kleinere Zerstreuungsverhältniß hat, d. h. die Zerstreuungslinse muß immer aus Flintglas, die Sammellinse aus Kronglas geschliffen werden.

Welche der beiden Linsen vorangestellt werden muß, läßt die vorhergehende Theorie unentschieden, und rücksichtlich des bloßen Achromatismus ist es auch, wie aus der vorhergehenden Theorie sich unmittelbar ergiebt, ganz gleichgültig, ob man die Sammellinse voran stellt und die Zerstreuungslinse auf dieselbe folgen läßt, oder die umgekehrte Anordnung wählt; aber freilich können andere Gründe die eine oder die andere dieser beiden Anordnungen bedingen, wie wir im nächstfolgenden Kapitel zu sehen Gelegenheit haben werden.

§. 77.

Es ist hier der schicklichste Ort, nur ganz in der Kürze noch die Grundsätze zu entwickeln, nach denen achromatische Prismen construirt werden können, wobei wir aber der Einfachheit wegen alle Einfallswinkel und alle Brechungswinkel so klein annehmen wollen, daß ohne merklichen Fehler das Verhältniß derselben dem Verhältnisse ihrer Sinus gleich gesetzt werden kann.

In Fig. 73. seien MM′M″ und NN′N″ zwei Prismen, deren Seitenflächen MM′ und NN′ einander parallel sind. Die Brechungsexponenten für zwei Arten farbiger Strahlen für das Prisma MM′M″ seien m, m', und die Brechungsexponenten für dieselben Arten farbiger Strahlen für das Prisma NN′N″ seien n, n'. Für das Prisma MM′M″ seien ferner die Ein-

Digitized by Google

fallswinkel und die Brechungswinkel für die erste Art farbiger Strahlen:

$$\varphi\,,\ \psi\,;\ \varphi_1\,,\ \psi_1\,;$$

und für die zweite Art farbiger Strahlen:

$$\varphi\,,\ \psi'\,;\ \varphi_1'\,,\ \psi_1'\,.$$

Für das Prisma NN'N'' seien die Einfallswinkel und die Brechungswinkel für die erste Art farbiger Strahlen:

$$\psi_1\,,\ \omega_1\,;\ \psi_2\,,\ \omega_2\,;$$

und für die zweite Art farbiger Strahlen:

$$\psi_1'\,,\ \omega_1'\,;\ \psi_2'\,,\ \omega_2'\,.$$

Dann hat man unter den gemachten Voraussetzungen die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\varphi}{\psi} = m\,,\ \frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{1}{m}\,,\ \frac{\psi_1}{\omega_1} = n\,,\ \frac{\psi_2}{\omega_2} = \frac{1}{n}$$

und

$$\frac{\varphi}{\psi'} = m'\,,\ \frac{\varphi_1'}{\psi_1'} = \frac{1}{m'}\,,\ \frac{\psi_1'}{\omega_1'} = n'\,,\ \frac{\psi_2'}{\omega_2'} = \frac{1}{n'}\,.$$

Sollen aber die beiden Arten farbiger Strahlen aus dem zweiten Prisma nach einander parallelen Richtungen heraustreten, so muß $\omega_2 = \omega_2'$ sein, und die vorhergehenden Gleichungen nehmen, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll, die folgende Gestalt an:

$$\frac{\varphi}{\psi} = m\,,\ \frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{1}{m}\,,\ \frac{\psi_1}{\omega_1} = n\,,\ \frac{\psi_2}{\omega_2} = \frac{1}{n}$$

und

$$\frac{\varphi}{\psi'} = m'\,,\ \frac{\varphi_1'}{\psi_1'} = \frac{1}{m'}\,,\ \frac{\psi_1'}{\omega_1'} = n'\,,\ \frac{\psi_2'}{\omega_2'} = \frac{1}{n'}\,.$$

In dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist offenbar

$$M + (90° - \psi) + (90° - \varphi_1) = 180°\,,$$
$$N + (90° - \omega_1) + (90° - \psi_2) = 180°\,;$$

d. i.

$$M = \psi + \varphi_1\,,\ N = \psi_2 + \omega_1\,.$$

In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist dagegen

$$M + (90° - \psi) + (90° - \varphi_1) = 180°\,,$$
$$N + (90° + \omega_1) + (90° - \psi_2) = 180°\,;$$

d. i.

$$M = \psi + \varphi_1\,,\ N = \psi_2 - \omega_1\,.$$

Also ist überhaupt

$$M = \psi + \varphi_1\,,\ N = \psi_2 \pm \omega_1\,;$$

und ganz eben so

$$M = \psi' + \varphi_1'\,,\ N = \psi_2' \pm \omega_1'\,;$$

wo sich das obere Zeichen auf den ersten, das untere Zeichen auf den zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle bezieht.

Digitized by Google

Nach den obigen Gleichungen ist nun

$$\frac{\varphi_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}, \quad \frac{\varphi_1'}{\omega_2'} = \frac{n'}{m'};$$

also

$$\frac{n}{m} = \pm \frac{M-\psi}{N-\psi_2}, \quad \frac{n'}{m'} = \pm \frac{M-\psi'}{N-\psi_2'}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{m}{m'}, \quad \frac{\psi_2'}{\psi_2} = \frac{n}{n'}$$

ist, so ist

$$\frac{n}{m} = \pm \frac{M-\psi}{N-\psi_2}, \quad \frac{n'}{m'} = \pm \frac{M-\frac{m}{m'}\psi}{N-\frac{n}{n'}\psi_2};$$

folglich

$$\psi_2 = N \mp \frac{m}{n}(M-\psi),$$

$$\frac{n}{n'}\psi_2 = N \mp \frac{m'}{n'}\left(M - \frac{m}{m'}\psi\right);$$

also

$$\frac{n}{n'}N \mp \frac{m}{n'}(M-\psi) = N \mp \frac{m'}{n'}\left(M - \frac{m}{m'}\psi\right),$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\psi = \frac{t}{m}\varphi$$

ist:

$$\frac{n}{n'}N \mp \frac{m}{n'}\left(M - \frac{1}{m}\varphi\right) = N \mp \frac{m'}{n'}\left(M - \frac{1}{m'}\varphi\right)$$

oder

$$nN \mp mM \pm \varphi = n'N \mp m'M \pm \varphi,$$

d. i.

$$(m-m')M = \pm (n-n')N,$$

so daß also hiernach offenbar, wenn diese Gleichung erfüllt ist, für jedes φ, d. i. für jeden Einfallswinkel des weißen Lichts auf das erste Prisma, die vorher betrachteten zwei Arten farbiger Strahlen nach einander parallelen Richtungen aus dem zweiten Prisma heraustreten. Weil aber $m-m'$ und $n-n'$ offenbar gleiche Vorzeichen haben, so ist die Gleichung $(m-m')M = -(n-n')N$ unstatthaft, und die Bedingung, daß das aus den beiden Prismen, die man sich nun ganz nahe an einander gelegt und zu einem Prisma verbunden denken kann, bestehende Prisma achromatisch sei, ist also unter der Voraussetzung, daß die beiden Prismen die erste der beiden in der Figur dargestellten Lagen gegen einander haben, in der Gleichung

$$(m-m')M = (n-n')N$$

Digitized by Google

oder in der Proportion

$$M : N = n - n' : m - m',$$

durch welche das Verhältniß der brechenden Winkel der beiden Prismen zu einander bestimmt wird, ausgesprochen, wenn man sich nur für m, m′ und n, n′ die den äußersten farbigen Strahlen entsprechenden Brechungsexponenten gesetzt denkt.

Vierzehntes Kapitel.

Von den aplanatischen Linsen.

§. 78.

Wenn wir wie im vorhergehenden Kapitel den Brechungsexponenten für die mittleren farbigen Strahlen wieder durch μ bezeichnen, übrigens aber die sämmtlichen in §. 63. eingeführten Bezeichnungen beibehalten, so haben wir nach diesem Paragraphen die folgenden Gleichungen:

$$\sin\omega = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\sin i,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{\mu}\sin\omega,$$

$$i_1 = i - (\omega - \omega_1) - k'.360°,$$

$$a_1 = r\left(1 - \frac{\sin\omega}{\sin i_1}\right);$$

$$a' = \Delta + a_1,\ i' = i_1;$$

$$\sin\omega' = \left(1 - \frac{a'}{r'}\right)\sin i',$$

$$\sin\omega_1' = \mu\sin\omega',$$

$$i_1' = i' - (\omega' - \omega_1') - k'.360°,$$

$$a_1' = r'\left(1 - \frac{\sin\omega'}{\sin i_1'}\right);$$

wo k und k′ ganze Zahlen bezeichnen, über die das Weitere a. a. O. nachzusehen ist.

Setzen wir nun

$$a\sin i = q,\ \text{also}\ \sin i = \frac{q}{a};$$

Digitized by Google

so lassen sich die vier ersten dieser Gleichungen auf folgende Art ausdrücken:

$$\sin\omega = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q\,,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q\,,$$

$$\sin i_1 = \sin\{i - (\omega - \omega_1)\}\,,$$

$$a_1 = r\left(1 - \frac{\sin\omega}{\sin i_1}\right).$$

Entwickeln wir aber alle Größen so weit, daß dieselben bis auf Glieder, welche in Bezug auf die Größe q, die als der Null sehr nahe kommend angenommen wird, von der dritten Ordnung sind, als genau betrachtet werden können, und erinnern uns, daß unter den früher gemachten Voraussetzungen jedenfalls $\cos i$, $\cos\omega$, $\cos\omega_1$ positive Größen sind; so erhalten wir zuvörderst sogleich:

$$\cos i = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{a^2}\,,$$

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^2\,,$$

$$\cos\omega_1 = 1 - \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^2\,.$$

Also ist

$$\sin(\omega - \omega_1) = \sin\omega\,\cos\omega_1 - \cos\omega\,\sin\omega_1$$

$$= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q - \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^3 q^3$$

$$- \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^3 q^3$$

und

$$\cos(\omega - \omega_1) = \cos\omega\,\cos\omega_1 + \sin\omega\,\sin\omega_1$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^2$$

$$- \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^2$$

$$+ \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^2\,,$$

folglich, wie man leicht findet:

$$\sin(\omega - \omega_1) = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q + \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^3 q^3\,,$$

$$\cos(\omega - \omega_1) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^2\,.$$

Digitized by Google

Also ist

$$\sin i_1 = \sin i \cos(\omega - \omega_1) - \cos i \sin(\omega - \omega_1)$$

$$= \frac{1}{a} q - \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2 q^3$$

$$- \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q - \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^3 q^3$$

$$+ \frac{1}{2a^2}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) q^3,$$

folglich

$$\sin i_1 = \left\{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right\} q$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\left\{\frac{1}{a^2} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2\right\} q^3.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{a_1}{r} = 1 - \frac{\sin \omega}{\sin i_1}$$

ist, so erhält man, wenn man in den Bruch

$$\frac{\sin \omega}{\sin i_1}$$

die aus dem Vorhergehenden bekannten Werthe von $\sin \omega$ und $\sin i_1$ einführt und denselben bis auf Glieder der dritten Ordnung genau entwickelt, ohne Schwierigkeit:

$$\frac{a_1}{r} = 1 - \frac{\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)}{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2\left\{\frac{1}{a^2} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2\right\}}{\left\{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right\}^2} q^2,$$

oder

$$\frac{a_1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{r}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2\left\{\frac{1}{a^2} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2\right\}}{\left\{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right\}^2} q^2,$$

Digitized by Google

oder

$$a_1 = \frac{\mu a r}{r + (\mu - 1) a}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2\mu}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) r \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)^2 \left\{\frac{1}{a^2} - \left(1-\frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)^2\right\}}{\left\{\frac{1}{a} - \left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\right\}^3} q^2$$

Setzen wir aber

$$u = \frac{\mu a r}{r + (\mu - 1) a} = \frac{1}{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{u}}{1 - \frac{1}{\mu}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{\mu}},$$

und folglich

$$\frac{1}{a^2} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right) - \frac{\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2}$$

$$= \frac{\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2 \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u} - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right)^2}{\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2},$$

oder, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{a^2} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)^2$$

$$= -\frac{\frac{1}{a^2} - \left\{2 + \mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2\right\}\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}}{\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{a^2} - \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}}{\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2}.$$

Dividirt man nun mit

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{u}$$

Digitized by Google

in den Zähler des vorhergehenden Bruchs hinein, wie nachfolgende Rechnung zeigt:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\Big|\frac{1}{a^2}-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\Big|\frac{\mu}{a}-\frac{1}{u}$$

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\mu\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u}}{-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u}}$$

$$\frac{-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}{0}$$

so erhält man

$$\frac{1}{a^2}-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}=\left(\frac{\mu}{a}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right),$$

und folglich

$$\frac{1}{a^2}-\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)^2$$

$$=-\frac{\left(\frac{\mu}{a}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right)}{\mu\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^2}.$$

Also ist nach dem Obigen, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\sin i_1=\frac{q}{u}-\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{\mu}{a}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right)}{2\mu\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^2}q^3$$

oder

$$\sin i_1=\frac{q}{u}-\frac{(u-a)\,(\mu u-a)\,(u-\mu a)}{2\,(\mu-1)^2\,a^3\,u^3}q^3,$$

und

$$a_1=u+\frac{\left(\frac{\mu}{a}-\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right)^2u^2}{2\mu^2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^2}q^2$$

oder

$$a_1=u+\frac{(\mu u-a)\,(u-a)^2}{2\,(\mu-1)^2\,a^3\,u}q^2.$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$a_1=u+Mq^2,\quad \sin i_1=\frac{q}{u}+Nq^3;$$

wo

$$M=\frac{(\mu u-a)\,(u-a)^2}{2\,(\mu-1)^2\,a^3\,u},\quad N=-\frac{(u-a)\,(\mu u-a)\,(u-\mu a)}{2\,(\mu-1)^2\,a^3\,u^3}$$

Digitized by Google

iſt; ſo iſt nach dem Obigen

$$a' = \Delta + a_1 = \Delta + u + Mq^2,$$

$$\sin i' = \sin i_1 = \frac{q}{u} + Nq^3;$$

und wir haben alſo nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\sin\omega' = \left(\frac{1}{\Delta + u + Mq^2} - \frac{1}{r'}\right)\left(\Delta + u + Mq^2\right)\left(\frac{1}{u} + Nq^2\right)q,$$

$$\sin\omega_1' = \mu\left(\frac{1}{\Delta + u + Mq^2} - \frac{1}{r'}\right)\left(\Delta + u + Mq^2\right)\left(\frac{1}{u} + Nq^2\right)q,$$

$$\sin i_1' = \sin\left\{i_1 - (\omega' - \omega_1')\right\},$$

$$a_1' = r'\left(1 - \frac{\sin\omega'}{\sin i_1'}\right).$$

Vergleicht man dieſe Gleichungen mit den Gleichungen:

$$\sin\omega = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)q,$$

$$\sin\omega_1 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)q,$$

$$\sin i_1 = \sin\left\{i - (\omega - \omega_1)\right\},$$

$$a_1 = r\left(1 - \frac{\sin\omega}{\sin i_1}\right);$$

ſo wird man ſich auf der Stelle überzeugen, daß man, um a_1' und $\sin i_1'$ zu finden, in den obigen Ausdrücken von a_1 und $\sin i_1$ für

$$\mu,\ a,\ r,\ q$$

reſpective

$$\frac{1}{\mu},\ \Delta + u + Mq^2,\ r',\ (\Delta + u + Mq^2)\left(\frac{1}{u} + Nq^2\right)q$$

ſetzen muß. Setzen wir alſo jetzt

$$U = \frac{\frac{1}{\mu}\left(\Delta + u + Mq^2\right)r'}{r' - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(\Delta + u + Mq^2)},$$

oder

$$U = \frac{(\Delta + u + Mq^2)\,r'}{\mu r' - (\mu - 1)(\Delta + u + Mq^2)},$$

oder

$$U = \frac{(\Delta + u)\,r' + Mr'q^2}{\mu r' - (\mu - 1)(\Delta + u) - (\mu - 1)\,Mq^2};$$

Digitized by Google

so ist nach dem Obigen

$$a_1' = U + \frac{\left\{\frac{1}{\mu}U-(\Delta+u+Mq^2)\right\}\left\{U-(\Delta+u+Mq^2)\right\}^2}{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^2\left(\Delta+u+Mq^2\right)^3 U}\left(\Delta+u+Mq^2\right)^2\left(\frac{1}{u}+Nq^2\right)^2 q^2.$$

Setzen wir nun

$$v = \frac{(\Delta+u)\,r'}{\mu r' - (\mu-1)(\Delta+u)},$$

so ist, wenn wir bloß bis auf Glieder gehen, welche in Bezug auf q von der zweiten Ordnung sind, wie leicht erhellen wird:

$$U = v + \frac{\left\{\mu r' - (\mu-1)(\Delta+u)\right\} Mr' + (\mu-1)(\Delta+u)\,Mr'}{\left\{\mu r' - (\mu-1)(\Delta+u)\right\}^2} q^2,$$

d. i.

$$U = v + \frac{\mu M r'^2}{\left\{\mu r' - (\mu-1)(\Delta+u)\right\}^2} q^2,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{r'}{\mu r' - (\mu-1)(\Delta+u)} = \frac{v}{\Delta+u}$$

ist:

$$U = v + \frac{\mu M v^2}{(\Delta+u)^2} q^2,$$

oder, wenn man für M seinen aus dem Obigen bekannten Werth

$$M = \frac{(\mu u - a)(u-a)^2}{2(\mu-1)^2 a^3 u}$$

einführt:

$$U = v + \frac{\mu(\mu u - a)(u-a)^2 v^2}{2(\mu-1)^2 a^3 u (\Delta+u)^2} q^2.$$

Geht man nun immer bloß bis auf Glieder, die in Bezug auf q von der zweiten Ordnung sind, so ist nach dem Obigen:

$$a_1' = v + \frac{\mu(\mu u - a)(u-a)^2 v^2}{2(\mu-1)^2 a^3 u (\Delta+u)^2} q^2 + \frac{\left\{\frac{1}{\mu}v-(\Delta+u)\right\}\left\{v-(\Delta+u)\right\}^2}{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^2\left(\Delta+u\right)^3 v}\cdot\left(\frac{\Delta+u}{u}\right)^2\cdot q^2$$

oder

$$a_1' = v + \frac{\mu v^2}{2(\mu-1)^2}\left\{\frac{(\mu u - a)(u-a)^2}{a^3 u (\Delta+u)^2} + \frac{(v-\mu(\Delta+u))(v-(\Delta+u))^2}{u^2(\Delta+u)v^3}\right\} q^2.$$

Digitized by Google

Bleibt man aber bloß bei Gliedern stehen, welche in Bezug auf Δ und q von der zweiten Ordnung sind, so kann man in dem zweiten Theile des Ausdrucks von a_1' die Größe $\Delta = 0$ setzen, und erhält dadurch, wenn

$$w = \frac{ur'}{\mu r' - (\mu - 1)u}$$

gesetzt wird, für a_1' den folgenden einfachen Ausdruck:

$$a_1' = v + \frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\left\{\left(\frac{\mu}{a} - \frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{u} - \frac{\mu}{w}\right)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{w}\right)^2\right\} q^2$$

oder

$$a_1' = v + \frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\left\{\left(\frac{\mu}{a} - \frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{w} - \frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{u}\right)^2\right\} q^2.$$

Durch leichte Entwickelung erhält man auch

$$\left(\frac{\mu}{a} - \frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{w} - \frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{u}\right)^2$$

$$= \mu\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{w^3}\right) - \frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{w^2}\right) + \frac{\mu+2}{u^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{w}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{w}\right)\left\{\begin{array}{l} \mu\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}\right) \\ -\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) \\ +\frac{\mu+2}{u^2} \end{array}\right\},$$

und folglich nach dem Obigen

$$a_1' = v + \frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{w}\right)\left\{\begin{array}{l} \mu\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}\right) \\ -\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) \\ +\frac{\mu+2}{u^2} \end{array}\right\} q^2.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{w} = \frac{1}{a} + \frac{\mu-1}{r'} - \frac{\mu}{u},$$

d. i., weil

$$\frac{\mu}{u} = \frac{1}{a} + \frac{\mu-1}{r}$$

ist:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{w} = -(\mu-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

und folglich, wenn wir

$$f = \frac{1}{\mu-1} \cdot \frac{rr'}{r'-r} = \frac{1}{(\mu-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}$$

Digitized by Google

setzen:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{w} = \frac{\rho}{} - \frac{1}{f},$$

also

$$a_1' = v - \frac{\mu w^3}{2(\mu-1)^2 f} \left\{ \begin{array}{l} \mu\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}\right) \\ -\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) \\ +\frac{\mu+2}{u^2} \end{array} \right\} q^2.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a} + \left(\mu - 1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Folglich ist

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}$$

$$= \left(\mu-1\right)^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)^2 + 2\left(\mu-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$$

$$+ \left(\mu-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$$

$$+ \frac{1}{a^2}$$

$$= \left(\mu-1\right)^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)^2 + 3\left(\mu-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2},$$

$$\frac{1}{u}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right)$$

$$= \frac{(\mu-1)^2}{\mu} \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{\mu-1}{\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{a}$$

$$+ \frac{2(\mu-1)}{\mu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{a} + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{(\mu-1)^2}{\mu} \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{\mu-1}{\mu}\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r'}\right)\frac{1}{a} + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{(\mu-1)^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{2(\mu-1)}{\mu^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{1}{a^2};$$

und daher, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$\mu\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}\right)$$

$$-\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right)$$

$$+\frac{\mu+2}{u^2}$$

Digitized by Google

$$= (\mu-1)^2 \left\{\frac{\mu^3-2\mu^2+2}{\mu^2}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu^2-2\mu-1}{\mu}\cdot\frac{1}{rr'} + \frac{\mu}{r'^2}\right\}$$

$$+ (\mu-1)^2 \left\{\frac{3\mu^2-3\mu-4}{\mu^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{3\mu+1}{\mu}\cdot\frac{1}{r'}\right\}\frac{1}{a}$$

$$+ (\mu-1)^2 \cdot \frac{3\mu+2}{\mu^2}\cdot\frac{1}{a^2},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$A = \frac{\mu^3-2\mu^2+2}{\mu^2}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu^2-2\mu-1}{\mu^2}\cdot\frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2},$$

$$B = \frac{3\mu^2-3\mu-4}{\mu^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{3\mu+1}{\mu^2}\cdot\frac{1}{r'},$$

$$C = \frac{3\mu+2}{\mu^2}$$

setzen:

$$\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)$$

$$-\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{w}\right)$$

$$+\frac{\mu+2}{u^2}$$

$$= \mu(\mu-1)^2\left(A+\frac{B}{a}+\frac{C}{a^2}\right),$$

und folglich nach dem Obigen

$$a_1' = v - \frac{\mu^2 w^2}{2f}\left(A+\frac{B}{a}+\frac{C}{a^2}\right)q^2.$$

Bis auf Glieder genau, welche in Bezug auf Δ und q von der erſten Ordnung ſind, erhält man aus dem Obigen ſehr leicht:

$$\sin i_1' = \frac{q}{w}.$$

Führt man in den obigen Ausdruck von v den bekannten Werth von u ein, ſo erhält man

$$v = \frac{\left\{\Delta + \frac{\mu ar}{r+(\mu-1)a}\right\}r'}{\mu r' - (\mu-1)\left\{\Delta + \frac{\mu ar}{r+(\mu-1)a}\right\}}$$

oder

$$v = \frac{\mu ar + \{r+(\mu-1)a\}\Delta}{\{r+(\mu-1)a\}\{\mu r' - (\mu-1)\Delta\} - \mu(\mu-1)ar}r'.$$

Digitized by Google

Dividirt man nun im Zähler und Nenner mit $\mu a r r'$, so erhält man:

$$v = \frac{1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{\mu-1}{r}\right)\frac{\Delta}{\mu}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{\mu-1}{r}\right)\left(1 - \frac{\mu-1}{r'}\cdot\frac{\Delta}{\mu}\right) - \frac{\mu-1}{r'}},$$

oder

$$v = \frac{1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{\mu-1}{r}\right)\frac{\Delta}{\mu}}{\left(\mu-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - \frac{\mu-1}{r}\cdot\frac{\mu-1}{r'}\cdot\frac{\Delta}{\mu} + \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\mu-1}{r'}\cdot\frac{\Delta}{\mu}\right)},$$

welches ganz mit dem, was wir in §. 64. für P_1 gefunden haben, übereinstimmt, wenn man, wie es erforderlich ist, $-\Delta$ für das dortige D, μ für das dortige n und a für P setzt.

Die Größe w erhält man, wenn man in dem obigen Ausdrucke von v die Größe $\Delta = 0$ setzt. Dies giebt

$$w = \frac{1}{\frac{1}{a} + \left(\mu-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}.$$

Mit der bisher betrachteten Linse wollen wir uns jetzt auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Kapitel eine zweite Linse auf derselben Axe verbunden denken, wollen aber der Kürze und Einfachheit wegen die Entfernung dieser beiden Linsen von einander als verschwindend betrachten. Setzen wir dann, wo gewiß die Bedeutung aller Symbole ohne weitere Erläuterung für sich selbst verständlich sein wird:

$$f_1 = \frac{1}{\mu_1 - 1}\cdot\frac{r_1 r_1'}{r_1' - r_1} = \frac{1}{\left(\mu_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)}$$

und

$$A_1 = \frac{\mu_1^3 - 2\mu_1^2 + 2}{\mu_1^3}\cdot\frac{1}{r_1^2} - \frac{2\mu_1^2 - 2\mu_1 - 1}{\mu_1^3}\cdot\frac{1}{r_1 r_1'} + \frac{1}{r_1'^2},$$

$$B_1 = \frac{3\mu_1^2 - 3\mu_1 - 4}{\mu_1^3}\cdot\frac{1}{r_1} - \frac{3\mu_1 + 1}{\mu_1^3}\cdot\frac{1}{r_1'},$$

$$C_1 = \frac{3\mu_1 + 2}{\mu_1^3};$$

ferner

$$V_1 = \frac{1 + \left(\frac{1}{a_1'} + \frac{\mu_1 - 1}{r_1}\right)\frac{\Delta_1}{\mu_1}}{\left(\mu_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\mu_1-1}{r_1}\cdot\frac{\mu_1-1}{r_1'}\cdot\frac{\Delta_1}{\mu_1} + \frac{1}{a_1'}\left(1 - \frac{\mu_1-1}{r_1'}\cdot\frac{\Delta_1}{\mu_1}\right)},$$

$$W_1 = \frac{1}{\frac{1}{a_1'} + \left(\mu_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)}, \quad q_1 = a_1' \sin i_1';$$

Digitized by Google

so ist nach dem Vorhergehenden, wenn a_2'' eine ganz ähnliche Bedeutung wie a_1' hat:

$$a_2'' = V_1 - \frac{\mu_1^2 w_2^2}{2f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{a_1'} + \frac{C_1}{a_1'^2}\right) q_1^2.$$

Setzt man nun aber

$$w_1 = \frac{1}{\frac{1}{w} + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)},$$

und bleibt immer bloß bei Gliedern stehen, die in Bezug auf Δ, Δ_1, q von der zweiten Ordnung sind; so kann man offenbar

$$a_2'' = V_1 - \frac{\mu_1^2 w_1^2}{2f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{w} + \frac{C_1}{w^2}\right) \cdot \left(w\,\frac{q}{w}\right)^2,$$

d. i.

$$a_2'' = V_1 - \frac{\mu_1^2 w_2^2}{2f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{w} + \frac{C_1}{w^2}\right) q^2$$

setzen, wo es nun bloß noch auf die Entwickelung von V_1 ankommt. Setzen wir aber

$$v_1 = \frac{1 + \left(\frac{1}{v} + \frac{\mu_1 - 1}{r_1}\right)\frac{\Delta_1}{\mu_1}}{\left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\mu_1 - 1}{r_1} \cdot \frac{\mu_1 - 1}{r_1'} \cdot \frac{\Delta_1}{\mu_1} + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{\mu_1 - 1}{r_1'} \cdot \frac{\Delta_1}{\mu_1}\right)}$$

und der Kürze wegen

$$a_1' = v - \frac{\mu^2 w^2}{2f} P q^2,$$

so wird leicht erhellen, daß man unter Voraussetzung desselben Grades der Genauigkeit wie bisher immer die Entwickelung von V_1 erhält, wenn man zu der Größe v_1 das zweite Glied der Entwickelung der Größe

$$\frac{1}{\frac{1}{w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} P q^2} + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)},$$

d. i. der Größe

$$\frac{w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} P q^2}{1 + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)\left(w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} P q^2\right)},$$

oder nach dem Obigen der Größe

$$\frac{w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} P q^2}{1 + \frac{w}{f_1} - \frac{\mu^2 w^2}{2ff_1} P q^2}$$

addirt. Dieses zweite Glied ist aber nach den bekannten Regeln der algebraischen Division

Digitized by Google

$$- \frac{\left(1+\frac{w}{f_1}\right)\frac{\mu^2 w^2}{2f} P - \frac{\mu^2 w^2}{2ff_1} P}{\left(1+\frac{w}{f_1}\right)^2} q^2,$$

d. i.

$$- \frac{\frac{\mu^2 w^2}{2f} P}{\left(1+\frac{w}{f_1}\right)^2} q^2.$$

Nun ist aber nach dem Obigen, wie leicht erhellet:

$$\frac{1}{w_1} = \frac{1}{w} + \frac{1}{f_1},$$

also

$$\frac{w}{w_1} = 1 + \frac{w}{f_1},$$

und folglich das obige Glied

$$- \frac{\mu^2 w_1^2}{2f} P q^2$$

oder

$$- \frac{\mu^2 w_1^2}{2f} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) q^2;$$

also ist

$$V_1 = v_1 - \frac{\mu^2 w_1^2}{2f} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) q^2,$$

und folglich, wenn man diesen Werth von V_1 in den obigen Ausdruck von a_2'' einführt:

$$a_2'' = v_1 - \tfrac{1}{2} w_1^2 \left\{\frac{\mu^2}{f}\left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{w} + \frac{C_1}{w^2}\right)\right\} q^2,$$

oder, wenn man

$$Q = \frac{\mu^2}{f}\left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right),$$

$$Q_1 = \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{w} + \frac{C_1}{w^2}\right)$$

setzt:

$$a_2'' = v_1 - \tfrac{1}{2} w_1^2 (Q + Q_1) q^2.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a}$$

ist, so ist auch

$$Q + Q_1 = \frac{\mu^2}{f}\left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{A_1 + B_1\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a}\right) + C_1\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a}\right)^2\right\},$$

Digitized by Google

d. i., wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$Q + Q_1 = \frac{\mu^2}{f} A + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{f} + \frac{C_1}{f^2}\right)$$
$$+ \left\{\frac{\mu^2}{f} B + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(B_1 + \frac{2C_1}{f}\right)\right\}\frac{1}{a}$$
$$+ \left(\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^3}{f_1} C_1\right)\frac{1}{a^2}.$$

§. 79.

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln lassen sich die Principien, nach denen gegenwärtig die besseren aplanatischen Linsen gebaut werden, zu vollständiger Deutlichkeit bringen, wodurch zugleich ein Jeder in den Stand gesetzt werden wird, die dazu erforderlichen Rechnungen ohne Schwierigkeit anzustellen.

Die Brennweite der zu bauenden aplanatischen Doppellinse für die mittleren farbigen Strahlen wird als gegeben angesehen, und soll wie im vorhergehenden Kapitel durch Φ bezeichnet werden, indem wir auch den Symbolen m, n, μ und m_1, n_1, μ_1 die denselben im vorhergehenden Kapitel beigelegten Bedeutungen lassen.

Zuerst und vor allen Dingen wird nun die Doppellinse in dem aus dem vorhergehenden Kapitel bekannten Sinne achromatisch eingerichtet. Dies erreicht man nach §. 76., wenn man die beiden Größen f und f_1, deren Bedeutung aus dem Vorhergehenden bekannt ist, mittelst der beiden einfachen Formeln

$$f = \left\{1 - \frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}\right\}\Phi,$$

$$f_1 = \left\{1 - \frac{(m_1-n_1)(\mu-1)}{(m-n)(\mu_1-1)}\right\}\Phi;$$

oder, wenn

$$\omega = \frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)} = \frac{m-n}{\mu-1} : \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}$$

gesetzt wird, mittelst der Formeln

$$f = (1-\omega)\Phi, \quad f_1 = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\Phi$$

bestimmt. Freilich sind bei diesen Formeln die Dicken der Linsen als verschwindend betrachtet worden, was aber bei diesen Rechnungen gegenwärtig meistens immer noch geschieht.

Die aus dem Vorhergehenden bekannte Größe

$$-\tfrac{1}{2} w_1^2 (Q + Q_1) q^2$$

wird im Allgemeinen die der Entfernung a entsprechende Längenabweichung der Doppellinse genannt, und es ist

Digitized by Google

leicht ersichtlich, daß sich die Linse der absoluten Vollkommenheit dann am meisten nähern und ihrem Zwecke dann am besten entsprechen wird, d. h. daß sich wenigstens die mittleren farbigen Strahlen für alle Entfernungen des strahlenden Punktes von der Linse nach der Brechung dann möglichst nahe in einem Punkte der Axe der Linse vereinigen werden, wenn die Längenabweichung

$$-\tfrac{1}{4} w_1^2 (Q + Q_1) q^2$$

für alle Werthe der Entfernung a des strahlenden Punktes von der Linse verschwindet. Dies wird aber offenbar der Fall sein, wenn die Größe $Q + Q_1$, d. h. nach dem Obigen die Größe

$$\begin{aligned} &\frac{\mu^2}{f} A + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{f} + \frac{C_1}{f^2}\right) \\ &+ \left\{\frac{\mu^2}{f} B + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(B_1 + \frac{2C_1}{f}\right)\right\}\frac{1}{a} \\ &+ \left\{\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1\right\}\frac{1}{a^2}, \end{aligned}$$

wo f und f_1 nach dem Vorhergehenden bekannte Größen sind, für alle Werthe von a verschwindet, und wir erhalten also die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\mu^2}{f} A + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{f} + \frac{C_1}{f^2}\right) \\ &+ \left\{\frac{\mu^2}{f} B + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(B_1 + \frac{2C_1}{f}\right)\right\}\frac{1}{a} \\ &+ \left\{\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1\right\}\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

für alle Werthe von a. Ebendeshalb aber, weil diese Bedingungsgleichung für alle Werthe von a erfüllt sein soll, zerfällt dieselbe nothwendig in die drei Bedingungsgleichungen

$$\frac{\mu^2}{f} A + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{f} + \frac{C_1}{f^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\mu^2}{f} B + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(B_1 + \frac{2C_1}{f}\right) = 0,$$

$$\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1 = 0;$$

von denen jede für sich erfüllt werden muß. Nun ist aber nach dem Obigen

$$C = \frac{3\mu + 2}{\mu^3}, \quad C_1 = \frac{3\mu_1 + 2}{\mu_1^3}$$

und die Größe

$$\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1$$

enthält also, da f und f_1 vorher schon bestimmt worden sind, gar keine unbekannten Größen mehr, namentlich keinen der zu

Digitized by Google

bestimmenden vier Halbmesser der Linse mehr, so daß also natürlich die Gleichung

$$\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1 = 0$$

unstatthaft ist, und ihre Erfüllung daher aufgegeben werden muß. Dies ist aber, wenn nur, — wie bei Fernröhren immer —, die Entfernung a des strahlenden Punktes von der Linse nicht zu klein ist, auch sehr wohl zulässig, weil in dem Gliede

$$\left\{\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1\right\} \frac{1}{a^2}$$

der Größe $Q + Q_1$, die für jedes a verschwinden soll, die Größe

$$\frac{\mu^2}{f} C + \frac{\mu_1^2}{f_1} C_1$$

in das Quadrat der sehr kleinen Größe $\frac{1}{a}$ multiplicirt ist, und daher nur einen unbedeutenden Einfluß auf den Werth der Größe $Q + Q_1$, die für jedes a verschwinden soll, ausüben kann, der natürlich desto unbedeutender ist, je größer a ist, so daß also die Linse doch immer für weiter entfernte Objecte besser als für nähere Objecte wirken wird, was ja aber wenigstens bei Fernröhren auch ganz ihrem eigentlichen Zwecke entspricht, wie wir späterhin noch weiter sehen werden. Wir behalten daher jetzt bloß noch die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\mu^2}{f} A + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{f} + \frac{C_1}{f^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\mu^2}{f} B + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(B_1 + \frac{2C_1}{f}\right) = 0;$$

welche, wie aus den aus dem Obigen bekannten Ausdrücken der Größen A, B; A_1, B_1 auf der Stelle erhellet, bloß noch die vier Halbmesser r, r'; r_1, r_1' der Linse als unbekannte Größen enthalten. Daß sich diese vier unbekannten Größen bloß mittelst der zwei vorhergehenden Gleichungen nicht bestimmen lassen, versteht sich von selbst. Weil aber bekanntlich

$$f = \frac{1}{(\mu-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}, \quad f_1 = \frac{1}{(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)}$$

ist; so treten zu den zwei obigen Gleichungen noch die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{\mu-1} \cdot \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} = \frac{1}{\mu_1-1} \cdot \frac{1}{f_1}$$

hinzu, und man hat also jetzt gerade Gleichungen genug, um die vier Halbmesser r, r'; r_1, r_1' der Linse bestimmen zu können.

Digitized by Google

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{\mu^3 - 2\mu^2 + 2}{\mu^3}, \qquad \alpha_1 = \frac{\mu_1^3 - 2\mu_1^2 + 2}{\mu_1^3};$$

$$\beta = -\frac{2\mu^2 - 2\mu - 1}{\mu^3}, \qquad \beta_1 = -\frac{2\mu_1^2 - 2\mu_1 - 1}{\mu_1^3};$$

$$\gamma = \frac{3\mu^2 - 3\mu - 4}{\mu^3}, \qquad \gamma_1 = \frac{3\mu_1^2 - 3\mu_1 - 4}{\mu_1^3};$$

$$\delta = -\frac{3\mu + 1}{\mu^3}, \qquad \delta_1 = -\frac{3\mu_1 + 1}{\mu_1^3};$$

$$\varepsilon = \frac{3\mu + 2}{\mu^3}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{3\mu_1 + 2}{\mu_1^3};$$

so ist

$$A = \alpha\frac{1}{r^2} + \beta\frac{1}{rr'} + \frac{1}{r'^2},$$

$$B = \gamma\frac{1}{r} + \delta\frac{1}{r'},$$

$$C = \varepsilon$$

und

$$A_1 = \alpha_1\frac{1}{r_1^2} + \beta_1\frac{1}{r_1 r_1'} + \frac{1}{r_1'^2},$$

$$B_1 = \gamma_1\frac{1}{r_1} + \delta_1\frac{1}{r_1'},$$

$$C_1 = \varepsilon_1.$$

Weil aber bekanntlich

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\mu - 1}\cdot\frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{r_1'} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\mu_1 - 1}\cdot\frac{1}{f_1}$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$A = \frac{1}{(\mu-1)^2}\cdot\frac{1}{f^2} - \frac{2+\beta}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{r} + (1+\alpha+\beta)\left(\frac{1}{r}\right)^2,$$

$$B = -\frac{\delta}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f} + (\gamma+\delta)\frac{1}{r},$$

$$C = \varepsilon$$

und

$$A_1 = \frac{1}{(\mu_1-1)^2}\cdot\frac{1}{f_1^2} - \frac{2+\beta_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{r_1} + (1+\alpha_1+\beta_1)\left(\frac{1}{r_1}\right)^2,$$

$$B_1 = -\frac{\delta_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1} + (\gamma_1+\delta_1)\frac{1}{r_1},$$

$$C_1 = \varepsilon_1.$$

Digitized by Google

Setzen wir aber ferner der Kürze wegen:

$$\alpha' = \frac{1}{(\mu-1)^2}\cdot\frac{1}{f^2}, \qquad \alpha_1' = \frac{1}{(\mu_1-1)^2}\cdot\frac{1}{f_1^2};$$

$$\beta' = -\frac{2+\beta}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f}, \qquad \beta_1' = -\frac{2+\beta_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1};$$

$$\gamma' = 1+\alpha+\beta, \qquad \gamma_1' = 1+\alpha_1+\beta_1;$$

$$\delta' = -\frac{\delta}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f}, \qquad \delta_1' = -\frac{\delta_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1};$$

$$\varepsilon' = \gamma+\delta, \qquad \varepsilon_1' = \gamma_1+\delta_1;$$

$$\zeta' = \varepsilon, \qquad \zeta_1' = \varepsilon_1;$$

so ist

$$A = \alpha' + \beta'\frac{1}{r} + \gamma'\left(\frac{1}{r}\right)^2,$$

$$B = \delta' + \varepsilon'\frac{1}{r},$$

$$C = \zeta'$$

und

$$A_1 = \alpha_1' + \beta_1'\frac{1}{r_1} + \gamma_1'\left(\frac{1}{r_1}\right)^2,$$

$$B_1 = \delta_1' + \varepsilon_1'\frac{1}{r_1},$$

$$C_1 = \zeta_1';$$

und man erhält nun, wenn man diese Ausdrücke von A, B, C und A_1, B_1, C_1 in die beiden Gleichungen

$$\frac{\mu^2}{f}A + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(A_1 + \frac{B_1}{f} + \frac{C_1}{f^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\mu^2}{f}B + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(B_1 + \frac{2C_1}{f}\right) = 0$$

einführt, nach einigen leichten Reductionen die beiden folgenden Gleichungen zur Bestimmung der beiden reciproken Halbmesser $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r_1}$:

$$0 = \frac{\mu^2\alpha'}{f} + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(\alpha_1' + \frac{\delta_1'}{f} + \frac{\zeta_1'}{f^2}\right)$$
$$+ \frac{\mu^2\beta'}{f}\cdot\frac{1}{r}$$
$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(\beta_1' + \frac{\varepsilon_1'}{f}\right)\frac{1}{r_1}$$
$$+ \frac{\mu^2\gamma'}{f}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2$$
$$+ \frac{\mu_1^2\gamma_1'}{f_1}\cdot\left(\frac{1}{r_1}\right)^2,$$

Digitized by Google

$$0 = \frac{\mu^2 \delta'}{f} + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left(\delta_1' + \frac{2\zeta_1'}{f}\right)$$
$$+ \frac{\mu^2 \varepsilon'}{f} \cdot \frac{1}{r}$$
$$+ \frac{\mu_1^2 \varepsilon_1'}{f_1} \cdot \frac{1}{r_1} .$$

Bestimmt man aus der zweiten dieser beiden Gleichungen, welche nur vom ersten Grade ist, $\frac{1}{r_1}$ durch $\frac{1}{r}$, und führt den gefundenen Ausdruck in die erste Gleichung ein, so erhält man zur Bestimmung von $\frac{1}{r}$ eine gewöhnliche Gleichung des zweiten Grades. Jenachdem dieselbe zwei reelle oder zwei imaginäre Wurzeln hat, ist die Aufgabe möglich oder unmöglich. Findet das Erstere Statt, so führt man die beiden durch Auflösung der quadratischen Gleichung gefundenen Werthe von $\frac{1}{r}$ in die zweite Gleichung des ersten Grades, oder vielmehr in den schon vorher gefundenen Ausdruck von $\frac{1}{r_1}$ durch $\frac{1}{r}$ ein, und erhält dadurch die beiden entsprechenden Werthe von $\frac{1}{r_1}$. Endlich findet man die entsprechenden Werthe von $\frac{1}{r'}$ und $\frac{1}{r_1'}$ mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\mu - 1} \cdot \frac{1}{f},$$
$$\frac{1}{r_1'} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\mu_1 - 1} \cdot \frac{1}{f_1};$$

und hat also nun alle vier Halbmesser der Linse, daher diese selbst vollständig bestimmt. Zweckmäßig setzt man bei den vorhergehenden Rechnungen $\Phi = -1$ oder $\Phi = +1$, jenachdem die zusammengesetzte Linse als Sammellinse oder als Zerstreuungslinse wirken soll.

Im Allgemeinen läßt die Aufgabe nach dem Vorhergehenden, wenn sie überhaupt möglich ist, zwei Auflösungen zu. Man pflegt bei dem Bau der aplanatischen Doppellinsen diejenige dieser beiden Auflösungen zu benutzen, welche die schwächsten Krümmungen der Gränzflächen, d. h. absolut genommen die größten Halbmesser liefert. Die äußere Form einer nach diesen Principien gebauten Linse zeigt Fig. 74. Die vordere doppelt convexe Linse wird aus Kronglas, die hintere concave Linse aus Flintglas verfertigt, wie es bekanntlich nach dem vorhergehenden Kapitel überhaupt erforderlich ist, wenn die zusammengesetzte Linse als Sammellinse wirken soll.

Nach den obigen Principien gebaute Doppellinsen nennt man zum Unterschiede von den gewöhnlichen achromatischen Linsen, über die man das vorhergehende Kapitel zu vergleichen

Digitized by Google

hat, aplanatische Linsen, weil bei ihnen die beiden sogenannten Abweichungen, nämlich die chromatische und die Längenabweichung, zugleich gehoben sind, indem bei den gewöhnlichen achromatischen Linsen bloß die chromatische Abweichung beseitigt ist. Da man aber auf ähnliche Art wie in §. 65. die der Entfernung a entsprechende Seitenabweichung der Doppellinse erhält, wenn man die Längenabweichung mit $\tang i_2''$ oder $\sin i_2''$, wo die Bedeutung von i_2'' aus dem Obigen leicht von selbst erhellen wird, d. i., weil nach dem Vorhergehenden bis auf Glieder der ersten Ordnung genau offenbar

$$\sin i_2'' = \frac{q_1}{w_1} = \frac{w\frac{q}{w}}{w_1} = \frac{q}{w_1}$$

ist, mit $\frac{q}{w_1}$ multiplicirt, so ist klar, daß mit der Längenabweichung zugleich auch die Seitenabweichung aufgehoben ist, und man daher sagen kann, daß bei den aplanatischen Linsen nicht bloß die chromatische Abweichung, sondern außerdem überhaupt auch die Kugelabweichung oder die sphärische Abweichung beseitigt ist.

Freilich sind bei den vorhergehenden Rechnungen die Dicken der Linsen als verschwindend betrachtet worden, was insbesondere rücksichtlich der Beseitigung der chromatischen Abweichung gilt. Hat man nur aber erst mittelst der vorhergehenden Methode erste Näherungswerthe der vier Halbmesser gefunden, so kann man dieselben dann mit gehöriger Berücksichtigung der Dicken der Linsen auch leicht noch weiter corrigiren, wobei man die aus dem vorhergehenden Kapitel bekannte genaue Bedingungsgleichung des Achromatismus und andere bekannte Gleichungen in Anwendung zu bringen haben würde, was aber hier noch weiter zu erläutern zu weitläufig sein möchte, indem übrigens auch die beste Methode solcher successiven Annäherungen sich einem Jeden, der sich für diesen wichtigen Gegenstand besonders interessirt, leicht von selbst darbieten wird, da im Vorhergehenden alle dazu nöthigen Formeln enthalten sind.

Um die obigen Rechnungen praktischen Optikern, welche in analytischen Entwickelungen nicht geübt sind, zu erleichtern und zugänglicher zu machen, haben J. Herschel, dem man überhaupt die erste Entwickelung der obigen schönen Theorie verdankt, und vorzüglich Barlow, Näherungsregeln zur Bestimmung der Halbmesser angegeben und Tafeln berechnet, die man am besten in J. J. Prechtl's praktischer Dioptrik. Wien. 1828. S. 79. findet, einem Buche, welches auch in manchen anderen Beziehungen für Künstler unentbehrlich ist. Wer aber nur quadratische Gleichungen aufzulösen versteht, wird, wenn es auf die Herstellung einer guten aplanatischen Linse ankommt, gewiß immer lieber die obige Rechnung selbst anstellen und den keineswegs sehr großen Zeitaufwand, welchen dieselbe erfordert, nicht scheuen.

Digitized by Google

Daß die alle früheren Leistungen weit übertreffenden Fraunhofer'schen Linsen nach derselben oder wenigstens nach einer ganz ähnlichen Theorie geschliffen sein müssen, hat Stampfer durch an mehreren aus dem Fraunhofer'schen optischen Institute hervorgegangenen Linsen vorgenommene genaue Messungen nachgewiesen, indem Fraunhofer selbst, so viel ich weiß, die Theorie, nach welcher seine Gläser geschliffen worden sind und jetzt wohl noch geschliffen werden, aus leicht begreiflichen Gründen niemals bekannt gemacht hat.

§. 80.

Für eine Linse ist nach §. 78. die der Entfernung a entsprechende Längenabweichung:

$$\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{w}\right)\left\{\begin{array}{l}\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)\\ -\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)\\ +\frac{\mu+2}{u^2}\end{array}\right\}q^2,$$

und wir wollen am Schlusse dieses Kapitels nun noch die Halbmesser der Linse so zu bestimmen suchen, daß unter Voraussetzung derselben Brennweite und derselben Oeffnung diese der Entfernung a entsprechende Längenabweichung ein Minimum oder ein Maximum wird, was nach einer der in §. 66. angewandten Methode ganz ähnlichen Methode leicht auf folgende Art geschehen kann.

Da nach dem Obigen bekanntlich

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{f}+\frac{1}{a}$$

ist, so ist w eben so wie f und a eine constante oder beständige Größe, und es wird daher bloß darauf ankommen, die veränderliche Größe $\frac{1}{u}=x$ so zu bestimmen, daß die Größe

$$X=\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)-(2\mu+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)x+(\mu+2)x^2$$

ein Minimum oder ein Maximum wird. Zu dem Ende lasse man x in $x+\Delta x$ übergehen, und bezeichne die dadurch herbeigeführte Aenderung von X durch ΔX; so ist

Digitized by Google

$$X + \Delta X = \mu \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}\right)$$

$$- (2\mu + 1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) (x + \Delta x) + (\mu + 2) (x + \Delta x)^2,$$

d. i.

$$X + \Delta X$$

$$= \mu \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{aw} + \frac{1}{w^2}\right) - (2\mu + 1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) x + (\mu + 2) x^2$$

$$- \left\{(2\mu + 1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) - 2 (\mu + 2) x\right\} \Delta x + (\mu + 2) \Delta x^2,$$

und nach einem ganz ähnlichen Räſonnement wie in §. 66. muß alſo, wenn X ein Minimum oder ein Maximum ſein ſoll,

$$(2\mu + 1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right) - 2 (\mu + 2) x = 0,$$

alſo

$$x = \frac{1}{u} = \frac{2\mu + 1}{2 (\mu + 2)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{w}\right),$$

d. i. nach dem Obigen

$$x = \frac{1}{u} = \frac{2\mu + 1}{2 (\mu + 2)} \left(\frac{1}{f} + \frac{2}{a}\right)$$

ſein. Weil aber nach §. 78.

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{1}{r}$$

iſt, ſo erhalten wir zur Beſtimmung von $\frac{1}{r}$ die Gleichung

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{1}{r} = \frac{2\mu + 1}{2 (\mu + 2)} \left(\frac{1}{f} + \frac{2}{a}\right),$$

aus welcher ſich leicht

$$\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{1}{r} = \frac{2\mu + 1}{2 (\mu + 2)} \cdot \frac{1}{f} + \frac{2 (\mu - 1) (\mu + 1)}{\mu (\mu + 2)} \cdot \frac{1}{a},$$

alſo

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu (2\mu + 1)}{2 (\mu - 1) (\mu + 2)} \cdot \frac{1}{f} + \frac{2 (\mu + 1)}{\mu + 2} \cdot \frac{1}{a}$$

ergiebt. Weil ferner bekanntlich

$$\frac{1}{f} = \left(\mu - 1\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

alſo

$$(\mu - 1) \frac{1}{r'} = (\mu - 1) \frac{1}{r} - \frac{1}{f}$$

Digitized by Google

ist, so ist

$$(\mu-1)\frac{1}{r'}=\left\{\frac{\mu(2\mu+1)}{2(\mu+2)}-1\right\}\frac{1}{f}+\frac{2(\mu-1)(\mu+1)}{\mu+2}\cdot\frac{1}{a},$$

d. i.

$$(\mu-1)\frac{1}{r'}=\frac{2\mu^2-\mu-4}{2(\mu+2)}\cdot\frac{1}{f}+\frac{2(\mu-1)(\mu+1)}{\mu+2}\cdot\frac{1}{a},$$

und wir haben daher zur Bestimmung von $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r'}$ die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu(2\mu+1)}{2(\mu-1)(\mu+2)}\cdot\frac{1}{f}+\frac{2(\mu+1)}{\mu+2}\cdot\frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{r'}=\frac{2\mu^2-\mu-4}{2(\mu-1)(\mu+2)}\cdot\frac{1}{f}+\frac{2(\mu+1)}{\mu+2}\cdot\frac{1}{a}.$$

Daß in diesem Falle ein Minimum Statt findet, erhellet auf der Stelle, weil in dem obigen Ausdrucke von $X+\Delta X$ das Glied $(\mu+2)\Delta x^2$ positiv ist.

Für ein unendliches große a ist

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu(2\mu+1)}{2(\mu-1)(\mu+2)}\cdot\frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{r'}=\frac{2\mu^2-\mu-4}{2(\mu-1)(\mu+2)}\cdot\frac{1}{f};$$

oder

$$r=\frac{2(\mu-1)(\mu+2)}{\mu(2\mu+1)}f,$$

$$r'=\frac{2(\mu-1)(\mu+2)}{2\mu^2-\mu-4}f;$$

welche Formeln völlig mit den in §. 66. für diesen Fall auf ganz anderem Wege gefundenen Formeln übereinstimmen, wenn man nur, wie es erforderlich ist, μ für das dortige n und f für F setzt.

Weil nach dem Obigen die Längenabweichung

$$\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{w}\right)Xq^2=-\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{f}q^2$$

ist, so ist dieselbe auf ganz ähnliche Art wie in §. 66. ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Brennweite f positiv oder negativ ist.

Die kleinste oder größte Längenabweichung selbst kann man leicht auf folgende Art entwickeln. Weil für die kleinste oder größte Längenabweichung nach dem Obigen

$$\frac{1}{u}=\frac{2\mu+1}{2(\mu+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)$$

Digitized by Google

ist, so ist

$$\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)-\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)+\frac{\mu+2}{u^2}$$

$$=\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)-\frac{(2\mu+1)^2}{2(\mu+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)^2$$

$$+\frac{(2\mu+1)^2}{4(\mu+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)^2$$

$$=\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)-\frac{(2\mu+1)^2}{4(\mu+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)^2$$

$$=\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{w}\right)^2+\frac{3\mu}{aw}$$

$$-\frac{(2\mu+1)^2}{4(\mu+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{w}\right)^2-\frac{(2\mu+1)^2}{\mu+2}\cdot\frac{1}{aw}$$

$$=\frac{4\mu-1}{4(\mu+2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{w}\right)^2-\frac{(\mu-1)^2}{\mu+2}\cdot\frac{1}{aw}$$

$$=\frac{4\mu-1}{4(\mu+2)}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{aw}\right\}$$

$$=\frac{4\mu-1}{4(\mu+2)}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\right\}.$$

Also ist

$$\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{w}\right)\left\{\begin{array}{l}\mu\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{aw}+\frac{1}{w^2}\right)\\ -\frac{2\mu+1}{u}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{w}\right)\\ +\frac{\mu+2}{u^2}\end{array}\right\}q^2$$

$$=-\frac{\mu(4\mu-1)w^2q^2}{8(\mu-1)^2(\mu+2)f}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{aw}\right\}$$

$$=-\frac{\mu(4\mu-1)q^2}{8\left(\mu-1\right)^2\left(\mu+2\right)f\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)^2}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$=-\frac{\mu(4\mu-1)fa^2q^2}{8(\mu-1)^2(\mu+2)(f+a)^2}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\right\},$$

welches verschiedene Ausdrücke für die der Entfernung a entsprechende kleinste oder größte Längenabweichung sind.

Für ein unendlich großes a wird diese Größe

$$-\frac{\mu(4\mu-1)}{8(\mu-1)^2(\mu+2)}\cdot\frac{q^2}{f},$$

Digitized by Google

was ganz mit dem in §. 66. auf anderem Wege erhaltenen Resultate übereinstimmt, wenn man μ für das dortige n und f für F setzt, wie es erforderlich ist.

Die der Entfernung a entsprechende Seitenabweichung ist auf ganz ähnliche Art wie in §. 65.

$$-\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{f}\tang i_1'\cdot q^2,$$

wofür man aber für sehr nahe bei der Axe einfallende Strahlen ohne merklichen Fehler

$$-\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{f}\sin i_1'\cdot q^2,$$

also nach dem Obigen

$$-\frac{\mu w^2}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{f}\cdot\frac{q}{w}\cdot q^2,$$

d. i.

$$-\frac{\mu w}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{f}q^2,$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{f}+\frac{1}{a}$$

ist,

$$-\frac{\mu}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{f\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)}q^2$$

oder

$$-\frac{\mu}{2(\mu-1)^2}\cdot\frac{X}{1+\frac{f}{a}}q^2$$

setzen kann. Nehmen wir nun q immer als positiv an, so ist die Seitenabweichung nach dem Vorhergehenden offenbar:

wenn X positiv und $1+\frac{f}{a}$ positiv ist, ein Maximum;

wenn X positiv und $1+\frac{f}{a}$ negativ ist, ein Minimum;

wenn X negativ und $1+\frac{f}{a}$ positiv ist, ein Maximum;

wenn X negativ und $1+\frac{f}{a}$ negativ ist, ein Minimum.

Also ist die Seitenabweichung ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Größe $1+\frac{f}{a}$ positiv oder negativ ist.

Die der Entfernung a entsprechende größte oder kleinste Seitenabweichung selbst ist, wie man mittelst des Obigen leicht findet:

Digitized by Google

$$-\frac{\mu(4\mu-1)\,q^3}{8\left(\mu-1\right)^2\left(\mu+2\right)f\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$=-\frac{\mu(4\mu-1)\,q^3}{8\left(\mu-1\right)^2\left(\mu+2\right)\left(1+\frac{f}{a}\right)}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$=-\frac{\mu(4\mu-1)\,a\,q^3}{8\,(\mu-1)^2\,(\mu+2)\,(f+a)}\left\{\frac{1}{f^2}-\frac{4(\mu-1)^2}{4\mu-1}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\right\}.$$

Für ein unendlich großes a wird diese Größe

$$-\frac{\mu(4\mu-1)}{8(\mu-1)^2(\mu+2)}\cdot\frac{q^3}{f^2},$$

und ist stets ein Maximum, weil die Größe $1+\frac{f}{a}=1$, also positiv ist, welches ganz mit dem, was wir in §. 66. gefunden haben, übereinstimmt, wenn man nur, wie es erforderlich ist, μ für das dortige n und f für F setzt.

Funfzehntes Kapitel.

Von den dialytischen Linsen.

§. 81.

Da das Flintglas namentlich dann, wenn sein Zerstreuungsvermögen vergrößert werden soll, bei seiner Verfertigung starke Zusätze von Blei (Mennige) erhalten muß, so ist es sehr schwer, dasselbe, insbesondere in größeren Stücken, ganz rein und frei von wellenförmigen Streifen, welche es zu der Anwendung bei der Verfertigung von Linsen untauglich machen, zu erhalten. Daher ist die Anwendung kleinerer ganz vollkommener Flintglaslinsen allerdings weit eher möglich als die Anwendung größerer, wodurch zugleich auch der Preis der Linsen beträchtlich ermäßigt wird *). Man hat deshalb auf ein Mittel gedacht, durch Anwendung kleinerer Flintglaslinsen doch dieselbe Wirkung wie bei den im vorhergehenden Kapitel betrachteten aplanatischen Linsen hervorzubringen, d. h. den Doppellinsen doch dieselbe Brennweite zu geben, und hat dieses Mittel ganz ein-

*) Der Preis größerer Flintglaslinsen ist sehr hoch. Eine gute Flintglaslinse von zwölf Zoll Durchmesser kann auf 2000 Thlr. zu stehen kommen.

Digitized by Google

sach darin gefunden, die beiden die Doppellinse bildenden Linsen nicht wie bei den im vorhergehenden Kapitel betrachteten aplanatischen Linsen zur Berührung zu bringen oder ganz nahe an einander zu legen, sondern in einer merklichen Entfernung von einander aufzustellen, indem es ja klar ist, daß dann die hintere Linse, d. h. die Flintglaslinse, eine geringere Oeffnung als die vordere Linse oder die Kronglaslinse zu haben braucht, um dessenungeachtet alle von der letzteren durchgelassenen Strahlen auffangen und durch sich durchlassen zu können. Zugleich bietet eine solche merkliche Entfernung der beiden Linsen von einander auch noch den nicht unbeachtet zu lassenden Vortheil dar, daß sich, wenn man die eine der beiden Linsen, etwa die Flintglaslinse, durch feine Schrauben beweglich macht, nach der Vollendung der vorher sorgfältig berechneten Doppellinse die Entfernung der beiden dieselbe bildenden Linsen noch einigermaßen verändern läßt, wodurch kleine von der Rechnung noch übrig gelassene Fehler wenigstens einigermaßen auf praktischem Wege corrigirt werden können, und die Wirkung der Doppellinse sich noch erhöhen läßt, welche praktische Methode natürlich bei den Doppellinsen, wo die beiden dieselben bildenden Linsen ganz nahe an einander liegen, nicht anwendbar ist. Solche, nach dem im vorhergehenden Kapitel angegebenen Begriffe gleichfalls aplanatische Doppellinsen, bei denen die beiden dieselben bildenden einzelnen Linsen nicht wie bei den im vorhergehenden Kapitel betrachteten aplanatischen Linsen ganz nahe an einander gelegt oder zur Berührung mit einander gebracht, sondern in einer merklichen Entfernung von einander aufgestellt worden sind, hat man in neuerer Zeit dialytische Linsen genannt; und ich will nun in diesem Kapitel theoretisch entwickeln, wie sich auf diese Linsen das im vorhergehenden Kapitel angewandte Princip von Herschel oder Fraunhofer, durch welches es bereits möglich geworden ist, aplanatische Linsen von vortrefflicher Wirkung zu Stande zu bringen, anwenden läßt, was bisher, so viel ich weiß, noch nicht geschehen ist, da man, wie es scheint und so viel davon bekannt geworden ist, bis jetzt den Bau dialytischer Linsen wohl nur auf aus einer älteren Zeit stammende Principe, über die ich mich an diesem Orte nicht weiter verbreiten kann, gegründet hat.

§. 82.

Wir bezeichnen bei dieser Untersuchung wie schon früher die als positiv betrachtete Entfernung der beiden Linsen von einander durch E, und setzen wie gewöhnlich

$$f = \frac{1}{\mu - 1} \cdot \frac{rr'}{r' - r} = \frac{1}{\left(\mu - 1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)},$$

$$f_1 = \frac{1}{\mu_1 - 1} \cdot \frac{r_1 r_1'}{r_1' - r_1} = \frac{1}{\left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)}.$$

Digitized by Google

Soll dann in dem aus dem dreizehnten Kapitel bekannten Sinne die Doppellinse achromatisch sein, so ist nach §. 76. die Erfüllung der Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{m-n}{\mu-1}\cdot\frac{1}{f} + \frac{m_1-n_1}{\mu_1-1}\cdot\frac{1}{f_1}\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)\left(1+\frac{n-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)$$

erforderlich. Weil aber die Doppellinse für die mittleren Strahlen eine gegebene Brennweite haben soll, welche wir durch Φ bezeichnen wollen, so haben wir nach §. 75. noch die Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{f+E}} = \frac{1}{\frac{1}{f+E}+\frac{1}{f_1}}$$

oder

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{f+E}+\frac{1}{f_1}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe $\frac{1}{f_1}$, so erhält man

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{f+E} - \frac{\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}\cdot\frac{1}{f}}{\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)\left(1+\frac{n-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)}$$

oder

$$\frac{E}{\Phi} = \frac{\frac{E}{f}}{1+\frac{E}{f}} - \frac{\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}\cdot\frac{E}{f}}{\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)\left(1+\frac{n-1}{\mu-1}\cdot\frac{E}{f}\right)}.$$

Entwickelt man nun diese Gleichung gehörig in Bezug auf $\frac{E}{f}$ als unbekannte Größe, so erhält man:

$$0 = \frac{E}{\Phi}$$
$$-\left\{1-\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}-\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}+\frac{n-1}{\mu-1}\right)\frac{E}{\Phi}\right\}\cdot\frac{E}{f}$$
$$-\left\{\frac{m-1}{\mu-1}+\frac{n-1}{\mu-1}-\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}-\left(\frac{m-1}{\mu-1}+\frac{n-1}{\mu-1}+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{n-1}{\mu-1}\right)\frac{E}{\Phi}\right\}\cdot\left(\frac{E}{f}\right)^2$$
$$-\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{n-1}{\mu-1}\left(1-\frac{E}{\Phi}\right)\cdot\left(\frac{E}{f}\right)^3.$$

Setzt man $\Phi = -1$ und $\frac{1}{f} = x$, so wird diese Gleichung

$$0 = 1$$
$$+\left\{1-\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}+\left(1+\frac{m-1}{\mu-1}+\frac{n-1}{\mu-1}\right)E\right\}x$$

Digitized by Google

$$+\left\{\frac{m-1}{\mu-1}+\frac{n-1}{\mu-1}-\frac{(m-n)(\mu_1-1)}{(m_1-n_1)(\mu-1)}+\left(\frac{m-1}{\mu-1}+\frac{n-1}{\mu-1}+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{n-1}{\mu-1}\right)E\right\}Ex^2$$

$$+\frac{m-1}{\mu-1}\cdot\frac{n-1}{\mu-1}(1+E)E^2x^3,$$

und hat bekanntlich immer eine reelle Wurzel oder drei reelle Wurzeln. Hat man aber $x=\frac{1}{f}$ mittelst Auflösung dieser Gleichung des dritten Grades gefunden, so erhält man $\frac{1}{f_1}$ mittelst der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formel

$$\frac{1}{f_1}=-\left(1+\frac{1}{f+E}\right)=-\left(1+\frac{1}{E+\frac{1}{x}}\right),$$

d. i.

$$\frac{1}{f_1}=-\left(1+\frac{x}{1+Ex}\right)=-\frac{1+(1+E)x}{1+Ex};$$

und zur Bestimmung von f und f_1 hat man die Formeln

$$f=\frac{1}{x},\quad f_1=-\frac{1+Ex}{1+(1+E)x}.$$

Die weitere Entwickelung dieser Theorie schließen wir nun unmittelbar an die aus dem vorhergehenden Kapitel bekannten Formeln

$$a_1'=v-\frac{\mu^2w^2}{2f}\left(A+\frac{B}{a}+\frac{C}{a^2}\right)q^2$$

oder

$$a_1'=v-\frac{\mu^2w^2}{2f}Pq^2,$$

und

$$\sin i_1'=\frac{q}{w}$$

an. Da die Entfernung der beiden Linsen von einander jetzt nicht wie im vorhergehenden Kapitel verschwindet, sondern E ist; so ist, wenn wir

$$V_1=\frac{1+\left(\frac{1}{E+a_1'}+\frac{\mu_1-1}{r_1}\right)\frac{\Delta_1}{\mu_1}}{\left(\mu_1-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1'}\right)-\frac{\mu_1-1}{r_1}\cdot\frac{\mu_1-1}{r_1'}\cdot\frac{\Delta_1}{\mu_1}+\frac{1}{E+a_1'}\left(1-\frac{\mu_1-1}{r_1'}\cdot\frac{\Delta_1}{\mu_1}\right)},$$

$$W_1=\frac{1}{\frac{1}{E+a_2'}+\left(\mu_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right)},\quad q_1=(E+a_1')\sin i_1'$$

setzen, offenbar immer mit dem aus dem vorhergehenden Kapitel bekannten Grade der Genauigkeit

Digitized by Google

$$a_2'' = V_2 - \frac{\mu_1^2 W_1^2}{2f_1}\left\{A_1 + \frac{B_1}{E+a_1'} + \frac{C_1}{(E+a_1')^2}\right\}q_1^2.$$

Setzt man nun aber

$$w_1 = \frac{1}{\frac{1}{E+w} + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)},$$

so ist mit demselben Grade der Genauigkeit

$$a_2'' = V_2 - \frac{\mu_1^2 w_1^2}{2f_1}\left\{A_1 + \frac{B_1}{E+w} + \frac{C_1}{(E+w)^2}\right\}\cdot\left\{\left(E+w\right)\frac{q}{w}\right\}^2,$$

d. i.

$$a_2'' = V_2 - \frac{\mu_1^2 w_1^2}{2f_1}\left\{A_1 + \frac{B_1}{E+w} + \frac{C_1}{(E+w)^2}\right\}\left(1+\frac{E}{w}\right)^2 q^2,$$

wo es nun ferner wie im vorhergehenden Kapitel wieder zunächst auf die Entwickelung von V_1 ankommt. Setzen wir aber

$$v_2 = \frac{1 + \left(\frac{1}{E+v} + \frac{\mu_1 - 1}{r_1}\right)\frac{\Delta_1}{\mu_1}}{\left(\mu_1-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1'}\right) - \frac{\mu_1-1}{r_1}\cdot\frac{\mu_1-1}{r_1'}\cdot\frac{\Delta_1}{\mu_1} + \frac{1}{E+v}\left(1 - \frac{\mu_1-1}{r_1'}\cdot\frac{\Delta_1}{\mu_1}\right)},$$

so wird man die verlangte Entwickelung von V_1, immer mit gehöriger Rücksicht auf den hier stets fest gehaltenen bekannten Grad der Genauigkeit, offenbar erhalten, wenn man zu der Größe v_1 das zweite Glied der Entwickelung der Größe

$$\frac{1}{\frac{1}{E+w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} Pq^2} + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)},$$

d. i. der Größe

$$\frac{E+w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} Pq^2}{1 + \left(\mu_1 - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)\left(E+w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} Pq^2\right)},$$

oder nach dem Obigen der Größe

$$\frac{E+w - \frac{\mu^2 w^2}{2f} Pq^2}{1 + \frac{E+w}{f_1} - \frac{\mu^2 w^2}{2ff_1} Pq^2}$$

addirt. Dieses Glied ist aber nach den bekannten Regeln der algebraischen Division

Digitized by Google

$$- \frac{\left(1 + \frac{E+w}{f_1}\right) \frac{\mu^2 w^2}{2f} P - (E+w) \frac{\mu^2 w^2}{2ff_1} P}{\left(1 + \frac{E+w}{f_1}\right)^2} q^2,$$

d. i.

$$- \frac{\frac{\mu^2 w^2}{2f} P}{\left(1 + \frac{E+w}{f_1}\right)^2} q^2.$$

Nun ist aber nach dem Obigen, wie leicht erhellet:

$$\frac{1}{w_1} = \frac{1}{E+w} + \frac{1}{f_1},$$

also

$$\frac{E+w}{w_1} = 1 + \frac{E+w}{f_1},$$

und folglich das obige Glied

$$- \frac{\mu^2 w^2 w_1^2}{2f(E+w)^2} P q^2$$

oder

$$- \frac{\mu^2 w^2 w_1^2}{2f(E+w)^2} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) q^2;$$

also ist

$$V_1 = v_1 - \frac{\mu^2 w^2 w_1^2}{2f(E+w)^2} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) q^2,$$

und folglich, wenn man diesen Werth von V_1 in den obigen Ausdruck von a_2'' einführt:

$$a_2'' = v_2 - \tfrac{1}{2} w_1^2 \left\{ \frac{\mu^2 w^2}{f(E+w)^2} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) + \frac{\mu_1^2}{f_1} \left(A_1 + \frac{B_1}{E+w} + \frac{C_1}{(E+w)^2}\right) \left(1 + \frac{E}{w}\right)^2 \right\} q^2.$$

Ganz wie im vorhergehenden Kapitel, und aus ganz ähnlichen Gründen wie dort, setzt man nun wieder

$$\frac{\mu^2 w^2}{f(E+w)^2} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) + \frac{\mu_1^2}{f_1} \left(A_1 + \frac{B_1}{E+w} + \frac{C_1}{(E+w)^2}\right) \left(1 + \frac{E}{w}\right)^2 = 0,$$

und sucht diese Gleichung, so weit es überhaupt angeht, für jedes a zu erfüllen, d. h. man setzt das von $\frac{1}{a}$ unabhängige, und das die erste Potenz von $\frac{1}{a}$ enthaltende Glied der Größe

Digitized by Google

auf der linken Seite des Gleichheitszeichens für sich gleich Null, indem man alle höhere Potenzen von $\frac{1}{a}$ enthaltende Glieder dieser Größe vernachlässigt und für sich als verschwindend betrachtet, was wenigstens für große Werthe von a, für welche man doch ein Fernrohr immer nur braucht, jederzeit mit hinreichender Annäherung verstattet sein wird. Daher kommt es jetzt zuvörderst darauf an, das von $\frac{1}{a}$ unabhängige und das die erste Potenz von $\frac{1}{a}$ enthaltende Glied der Größe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung zu entwickeln, wozu wir daher jetzt übergehen wollen.

Weil nach dem vorhergehenden Kapitel bekanntlich

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a}$$

ist, so ist

$$\frac{w^2}{(E+w)^2}\left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) = \frac{A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}}{\left(1 + \frac{E}{w}\right)^2}$$

$$= \frac{A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}}{\left(1 + \frac{E}{f} + \frac{E}{a}\right)^2} = \frac{A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{E}{f}\right)\frac{E}{a} + \frac{E^2}{a^2}}$$

und folglich, wenn wir bloß bis auf Glieder gehen, welche $\frac{1}{a}$ in der ersten Potenz enthalten:

$$\frac{w^2}{(E+w)^2}\left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right) = \frac{A + \frac{B}{a}}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{E}{f}\right)\frac{E}{a}}$$

$$= \left(A + \frac{B}{a}\right)\left\{\frac{1}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2} - \frac{2E}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^3} \cdot \frac{1}{a}\right\}$$

$$= \frac{A}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2} + \left\{\frac{B}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2} - \frac{2AE}{\left(1 + \frac{E}{f}\right)^3}\right\} \cdot \frac{1}{a}.$$

Ferner ist

$$\left\{A_1 + \frac{B_1}{E+w} + \frac{C_1}{(E+w)^2}\right\}\left(1 + \frac{E}{w}\right)^2$$

$$= A_1\left(1 + \frac{E}{w}\right)^2 + B_1\left(1 + \frac{E}{w}\right)\frac{1}{w} + C_1\frac{1}{w^2}$$

Digitized by Google

$$= A_1 + (B_1 + 2A_1 E)\frac{1}{w} + (C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{w^2}$$

$$= A_1 + (B_1 + 2A_1 E)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a}\right)$$

$$+ (C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a}\right)^2$$

$$= A_1 + (B_1 + 2A_1 E)\frac{1}{f} + (C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{f^2}$$

$$+ \left\{B_1 + 2A_1 E + 2(C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{f}\right\}\cdot\frac{1}{a}$$

$$+ (C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\cdot\frac{1}{a^2}.$$

Also ist bis auf Glieder, die $\frac{1}{a}$ in der ersten Potenz enthalten:

$$\frac{\mu^2 w^2}{f(E+w)^2}\left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2}\right)$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{A_1 + \frac{B_1}{E+w} + \frac{C_1}{(E+w)^2}\right\}\left(1 + \frac{E}{w}\right)^2$$

$$= \frac{\mu^2 A}{f\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2}$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{A_1 + (B_1 + 2A_1 E)\frac{1}{f} + (C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{f^2}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} \frac{\mu^2}{f}\left\{\frac{B}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^2} - \frac{2AE}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\right\} \\ + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{B_1 + 2A_1 E + 2(C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{f}\right\} \end{array}\right\}\cdot\frac{1}{a},$$

und wir erhalten daher nach dem oben angegebenen Princip die beiden folgenden Gleichungen:

$$0 = \frac{\mu^2 A}{f\left(1 + \frac{E}{f}\right)^2}$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{A_1 + (B_1 + 2A_1 E)\frac{1}{f} + (C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{f^2}\right\},$$

$$0 = \frac{\mu^2}{f}\left\{\frac{B}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^2} - \frac{2AE}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\right\}$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{B_1 + 2A_1 E + 2(C_1 + B_1 E + A_1 E^2)\frac{1}{f}\right\}.$$

Digitized by Google

Behalten aber die Symbole

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; \ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$$

und

$$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \zeta'; \ \alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1', \varepsilon_1'$$

ihre aus dem vorhergehenden Kapitel bekannten Bedeutungen, so ist nach diesem Kapitel:

$$A = \alpha' + \beta' \frac{1}{r} + \gamma' \left(\frac{1}{r}\right)^2,$$

$$B = \delta' + \varepsilon' \frac{1}{r},$$

$$C = \zeta'$$

und

$$A_1 = \alpha_1' + \beta_1' \frac{1}{r_1} + \gamma_1' \left(\frac{1}{r_1}\right)^2,$$

$$B_1 = \delta_1' + \varepsilon_1' \frac{1}{r_1},$$

$$C_1 = \zeta_1';$$

und man erhält nun, wenn man diese Ausdrücke von

$$A, B, C \text{ und } A_1, B_1, C_1$$

in die beiden vorhergehenden Gleichungen einführt, zur Bestimmung der reciproken Halbmesser

$$\frac{1}{r} \text{ und } \frac{1}{r_1}$$

die beiden folgenden Gleichungen:

$$0 = \frac{\mu^2 \alpha'}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^2} + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\alpha_1' + \frac{\delta_1'}{f} + \frac{\zeta_1'}{f^2} + \left(\frac{2\alpha_1'}{f} + \frac{\delta_1'}{f^2}\right)E + \frac{\alpha_1'}{f^2}E^2\right\}$$

$$+ \frac{\mu^2 \beta'}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^2} \cdot \frac{1}{r}$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\beta_1' + \frac{\varepsilon_1'}{f} + \left(\frac{2\beta_1'}{f} + \frac{\varepsilon_1'}{f^2}\right)E + \frac{\beta_1'}{f^2}E^2\right\} \cdot \frac{1}{r_1}$$

$$+ \frac{\mu^2 \gamma'}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\gamma_1' + \frac{2\gamma_1'}{f}E + \frac{\gamma_1'}{f^2}E^2\right\} \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right)^2,$$

$$0 = \frac{\mu^2}{f}\left\{\frac{\delta'}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^2} - \frac{2\alpha' E}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\right\} + \frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\delta_1' + \frac{2\zeta_1'}{f} + 2\left(\alpha_1' + \frac{\delta_1'}{f}\right)E + \frac{2\alpha_1'}{f}E^2\right\}$$

Digitized by Google

$$+\frac{\mu^2}{f}\left\{\frac{\varepsilon'}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^2}-\frac{2\beta' E}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\right\}\cdot\frac{1}{r}$$

$$+\frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\varepsilon_1'+2\left(\beta_1'+\frac{\varepsilon_1'}{f}\right)E+\frac{2\beta_1'}{f}E^2\right\}\cdot\frac{1}{r_1}$$

$$-\frac{2\mu^2\gamma' E}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

$$+\frac{2\mu_1^2}{f_1}\gamma_1' E\left(1+\frac{E}{f}\right)\cdot\left(\frac{1}{r_1}\right)^2;$$

oder

$$0=\frac{\mu^2\alpha'}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^2}+\frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\alpha_1'\left(1+\frac{E}{f}\right)^2+\frac{\delta_1'}{f}\left(1+\frac{E}{f}\right)+\frac{\zeta_1'}{f^2}\right\}$$

$$+\frac{\mu^2\beta'}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^2}\cdot\frac{1}{r}$$

$$+\frac{\mu_1^2}{f_1}\left(1+\frac{E}{f}\right)\left\{\beta_1'\left(1+\frac{E}{f}\right)+\frac{\varepsilon_1'}{f}\right\}\cdot\frac{1}{r_1}$$

$$+\frac{\mu^2\gamma'}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

$$+\frac{\mu_1^2}{f_1}\gamma_1'\left(1+\frac{E}{f}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{r_1}\right)^2,$$

$$0=\frac{\mu^2}{f}\left\{\frac{\delta'}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^2}-\frac{2\alpha' E}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\right\}+\frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\delta_1'\left(1+\frac{2E}{f}\right)+2\alpha_1' E\left(1+\frac{E}{f}\right)+\frac{2\zeta_1'}{f}\right\}$$

$$+\frac{\mu^2}{f_1}\left\{\frac{\varepsilon'}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^2}-\frac{2\beta' E}{\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\right\}\cdot\frac{1}{r}$$

$$+\frac{\mu_1^2}{f_1}\left\{\varepsilon_1'\left(1+\frac{2E}{f}\right)+2\beta_1' E\left(1+\frac{E}{f}\right)\right\}\cdot\frac{1}{r_1}$$

$$-\frac{2\mu^2\gamma' E}{f\left(1+\frac{E}{f}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

$$+\frac{2\mu_1^2}{f_1}\gamma_1' E\left(1+\frac{E}{f}\right)\cdot\left(\frac{1}{r_1}\right)^2.$$

Digitized by Google

Hat man mittelst dieser beiden Gleichungen die reciproken Halbmesser

$$\frac{1}{r} \text{ und } \frac{1}{r_1}$$

bestimmt, so erhält man mittelst der Formeln

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\mu - 1} \cdot \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{r_1'} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\mu_1 - 1} \cdot \frac{1}{f_1}$$

auch die beiden anderen reciproken Halbmesser

$$\frac{1}{r'} \text{ und } \frac{1}{r_1'},$$

und hat also nun alle vier Halbmesser der Doppellinse, diese selbst also vollkommen bestimmt.

Unter den verschiedenen Auflösungen, welche nach dem Vorhergehenden die aufgelöste Aufgabe im Allgemeinen zuläßt, hat man diejenige auszuwählen, welche den Zwecken, die man zu erreichen beabsichtigt, am besten entspricht.

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln kann man also eine dialytische Doppellinse ganz nach denselben Principien bestimmen, auf welche im vorhergehenden Kapitel nach Herschel's und Fraunhofer's Vorgange die Bestimmung der gewöhnlichen aplanatischen Doppellinsen gegründet worden ist. Die sonst gewöhnlich zur Bestimmung der dialytischen Linsen gegebenen Vorschriften scheinen mir Manches zu wünschen übrig zu lassen, weshalb ich mich bemüht habe, die obigen Formeln mit möglichster Deutlichkeit und Vollständigkeit hier zu entwickeln, ohne mich übrigens auf viele Transformationen derselben, die allerdings noch möglich sein würden, einzulassen.

Sechszehntes Kapitel.

Von dem Auge und dem Sehen, den Brillen und der Loupe oder dem einfachen Mikroskope.

§. 83.

Es ist keineswegs unsere Absicht, in diesem Kapitel eine ausführliche anatomische Beschreibung des Organs des Sehens

Digitized by Google

oder des Auges und der verschiedenen Arten von Augen, welche es giebt*), wie man dieselbe auch in manchen physikalischen Lehrbüchern findet, zu geben, indem wir uns vielmehr bei diesem Gegenstande lediglich auf dasjenige beschränken werden, was in physikalischer Rücksicht von Wichtigkeit und zu wissen unbedingt nothwendig ist, wenn man zu einer deutlichen Einsicht in die Art und Weise gelangen will, wie das Auge bei seinem wichtigen, von der Natur ihm aufgelegten Geschäfte in dem Gebrauche der optischen Instrumente eine wesentliche Unterstützung finden kann.

Das Auge oder der sogenannte Augapfel ist, wie durch Fig. 75. anschaulich gemacht wird, ein kugelförmiger Körper, welcher durch verschiedene Muskeln, unter denen vorzüglich die vier sogenannten geraden Muskeln, von denen zwei sich an der obern und untern, die beiden andern sich an der rechten und linken Seite des Augapfels befinden, bemerkenswerth sind, an der innern Fläche der Augenhöhle befestigt ist.

Die äußerste Bekleidung des Auges bildet eine weiße undurchsichtige und hornartige Haut, welche die weiße Hornhaut genannt wird; an der vordern Fläche des Auges erhebt sich dieselbe, ist völlig durchsichtig, und erhält daher an dieser Stelle des Auges den Namen der durchsichtigen Hornhaut. Unter der weißen Hornhaut liegt eine zweite dunkelfarbige Haut, welche die Adernhaut heißt, und unter dieser eine dritte schleimartige Haut, die Netzhaut, welche für nervenartig und den eigentlichen Sitz des Sehens gehalten wird. Sie bekleidet also die innere Fläche des Auges, und scheint aus dem Mark des Sehnerven zu entspringen, welcher an der hintern Fläche des Auges in dasselbe tritt. Unter der durchsichtigen Hornhaut tritt eine Fortsetzung der Adernhaut hervor, welche unter dem Namen der Regenbogenhaut oder Iris eine kreisförmige Fläche bildet, die Farbe des Auges bestimmt, und in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung hat, welche die Augenöffnung oder die Pupille genannt wird. Die Iris besteht aus einem faserigen Gewebe und besitzt die merkwürdige Eigenschaft, daß sie durch ihre uns unbewußten Zusammenziehungen und Ausdehnungen die Augenöffnung vergrößern und verkleinern kann, jenachdem das einfallende Licht schwächer oder stärker ist. Hinter der Iris liegt ein halbharter, völlig durchsichtiger Körper von der Gestalt einer doppelt convexen Linse, welcher die Krystall-Linse genannt wird, und das Auge in zwei ungleiche Räume oder Kammern theilt, welche die Vorderkammer und die Hinterkammer heißen. Erstere liegt zwischen der durchsichtigen Hornhaut und der Krystall-Linse, und ist mit einer etwas salzigen wasserhellen Flüssigkeit angefüllt, welche man die wässerige Flüssigkeit nennt. Die größere Hinterkammer liegt hinter der Krystall-Linse, und ist mit einer gallertartigen

*) z. B. der musivisch zusammengesetzten Augen der Insecten und Crustaceen.

Digitized by Google

durchsichtigen Materie, der sogenannten Glasfeuchtigkeit oder gläsernen Feuchtigkeit, angefüllt.

Befindet sich nun vor dem Auge außerhalb der Brennweite der Krystall-Linse ein Gegenstand, so entsteht von demselben, wie aus den früheren Betrachtungen über einzelne Linsen bekannt ist, hinter der Krystall-Linse, also im Auge, ein verkehrtes Bild, welches, wenn es von der Netzhaut, die nach dem Obigen als eine Fortsetzung oder Erweiterung des Sehnerven zu betrachten ist, aufgefangen wird, die Empfindung des Sehens hervorruft. Weil bekanntlich die Entfernung des Bildes von der Krystall-Linse von der Entfernung des Gegenstandes von derselben abhängig ist, so würden bei einer gar keine Veränderungen zulassenden Einrichtung des Auges nur von Gegenständen in einer gewissen bestimmten Entfernung vom Auge völlig deutliche und scharfe Bilder auf der Netzhaut entstehen können. Da aber der Erfahrung zufolge das Auge Gegenstände von sehr verschiedener Entfernung zwischen gewissen Gränzen deutlich sieht, so muß die Einrichtung des Auges gewisse Veränderungen desselben zulassen. Ob die Lage oder Gestalt der Krystall-Linse, oder die Lage der Netzhaut gegen dieselbe das veränderliche Element ist, kann noch nicht als mit völliger Gewißheit entschieden betrachtet werden; jedenfalls spielen aber hierbei die vier Muskeln, deren oben unter dem Namen der geraden Muskeln Erwähnung gethan worden ist, eine wichtige Rolle.

Die Entfernung der Gegenstände vom Auge, in welcher dieselben am deutlichsten und bestimmtesten gesehen werden, nennt man die Entfernung oder die Weite des deutlichen Sehens. Dieselbe ist nicht für alle Augen gleich, läßt sich jedoch für gesunde Augen durchschnittlich auf 8 Zoll setzen; wer die Weite des deutlichen Sehens um ein Beträchtliches kleiner als 8 Zoll hat, heißt kurzsichtig (myops); wer dagegen die Weite des deutlichen Sehens bedeutend größer als 8 Zoll hat, wird weitsichtig (presbys) genannt. Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit sind mehr Fehler der Gewöhnung, als des Auges selbst. Denn es gehört mit zu den Eigenschaften unserer Organisation, daß die Muskeln durch Mangel an Uebung steifer, durch fleißige Uebung hingegen beweglicher und fügsamer werden, und sich immer vollkommener der Herrschaft des Willens unterwerfen. Daher kann ein gesundes Auge, besonders in der Jugend, sowohl zur Kurzsichtigkeit als zur Weitsichtigkeit verwöhnt werden, wenn auch allerdings der Erfahrung zufolge vorzugsweise Kurzsichtigkeit ein Fehler der Jugend, Weitsichtigkeit ein Fehler des Alters ist. Ein zweckmäßig geübtes Auge wird in der Ferne und Nähe innerhalb gewisser Gränzen deutlich sehen. Andere Fehler oder Krankheiten des Auges als Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit gehören nicht in das Gebiet der Physik, sondern in das Gebiet der Anatomie, Physiologie oder Medicin, weshalb in diesem Kapitel auch nur von den beiden vorher genannten Fehlern des Auges späterhin weiter die Rede sein wird.

Digitized by Google

Die Größe, in welcher ein Auge die Entfernung zweier Punkte A und B von einander erblickt, hängt offenbar lediglich von der Größe des Bildes derselben im Auge ab. Die Größe dieses Bildes wird aber bei der geringen Veränderlichkeit der Entfernung der Krystall-Linse und Netzhaut von einander offenbar vorzüglich bestimmt durch den Winkel, welchen die beiden von dem Mittelpunkte der Pupille, den man als nahe zusammenfallend mit dem Mittelpunkte der Krystall-Linse betrachten kann, nach den beiden äußersten Punkten des Bildes gezogenen geraden Linien mit einander einschließen. Da nun dieser Winkel offenbar dem Winkel gleich ist, welchen die beiden von dem Mittelpunkte der Pupille nach den beiden Punkten A und B gezogenen geraden Linien mit einander einschließen, so wird vorzüglich durch diesen letztern Winkel die Größe bestimmt, in welcher das Auge die Entfernung der beiden Punkte A und B von einander erblickt, und dieser Winkel, nämlich der von den beiden von dem Mittelpunkte der Pupille nach den beiden Punkten A und B gezogenen geraden Linien eingeschlossene Winkel, wird daher die sichtbare Größe*) oder der Gesichtswinkel, auch der Sehwinkel, der Entfernung AB der beiden Punkte A und B von einander genannt.

Denken wir uns die gerade Linie AB auf der durch ihre Mitte D von dem Mittelpunkte C der Pupille gezogenen geraden Linie CD senkrecht stehend, so ist offenbar

$$AB = 2CD \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} ACB,$$

oder, wenn wir die Entfernung CD durch E, den Winkel ACB, d. h. die sichtbare Größe von AB, durch α bezeichnen:

$$AB = 2E \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Entspricht der Entfernung E' der Linie AB vom Auge die sichtbare Größe α' derselben, so ist eben so

$$AB = 2E' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha',$$

und folglich

$$E \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha = E' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha',$$

also

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha' = E' : E.$$

Sind die Winkel α und α' sehr klein, so hat man näherungsweise

$$\alpha : \alpha' = E' : E,$$

d. h. die sichtbaren Größen einer und derselben geraden Linie sind ihren Entfernungen vom Auge umgekehrt proportional.

Um die sichtbare Größe α einer mit dem Halbmesser R beschriebenen Kugel zu finden, wenn E die Entfernung des Mit-

*) Häufig scheinbare Größe, was uns aber nicht zweckmäßig zu sein scheint.

Digitized by Google

telpunkts derselben von dem Mittelpunkte der Pupille bezeichnet, denke man sich durch den Mittelpunkt der Pupille und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene gelegt, und ziehe an den Kreis, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet, zwei von dem Mittelpunkte der Pupille ausgehende berührende Linien, welche an dem letzteren Punkte einen der gesuchten sichtbaren Größe α der Kugel gleichen Winkel mit einander einschließen werden, woraus sich sogleich die Gleichung

$$R = E \sin \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{oder} \quad \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{R}{E}$$

ergiebt. Ist nun α' die sichtbare Größe einer andern mit dem Halbmesser R' beschriebenen Kugel, deren Mittelpunkt von dem Mittelpunkte der Pupille die Entfernung E' hat, so ist eben so

$$R' = E' \sin \tfrac{1}{2}\alpha' \quad \text{oder} \quad \sin \tfrac{1}{2}\alpha' = \frac{R'}{E'};$$

folglich

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha : \sin \tfrac{1}{2}\alpha' = \frac{R}{E} : \frac{R'}{E'} = RE' : R'E.$$

Für $\alpha = \alpha'$ ist $RE' = R'E$, also

$$R : R' = E : E'.$$

Für $R = R'$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha : \sin \tfrac{1}{2}\alpha' = E' : E,$$

und für sehr kleine α und α' näherungsweise

$$\alpha : \alpha' = E' : E.$$

Für $E = E'$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha : \sin \tfrac{1}{2}\alpha' = R : R',$$

und für sehr kleine α und α' näherungsweise

$$\alpha : \alpha' = R : R'.$$

Alle diese Proportionen in Worten auszudrücken, hat nicht die mindeste Schwierigkeit, wird aber hier der Kürze wegen übergangen.

Oft ist die Frage aufgeworfen worden, wie es zugehe, daß man die Gegenstände außer dem Auge aufrecht sehe, wenn gleich die Bilder derselben im Auge verkehrt stehen. Die Beantwortung dieser Frage kann nach unserer Ueberzeugung leicht auf folgende Art gegeben werden. Man muß nämlich vor allen Dingen bedenken, daß das Auge die sichtbaren Punkte außerhalb desselben jederzeit nach der Richtung hin sieht und in die Richtung versetzt, nach welcher von den in Rede stehenden Punkten Lichtstrahlen in dasselbe fallen, indem es überhaupt vorzüglich und zunächst nur diese Richtung ist, von welcher das Auge einen Eindruck erhält. Wenn nun also auch in Fig. 75. der Punkt A sich in A', der Punkt B sich in B' im Auge abbildet, demnach das Bild A'B' von AB im Auge allerdings verkehrt steht, so sieht das Auge den Punkt A außerhalb doch immer nach der Richtung A'A, den Punkt B außerhalb nach der Rich-

Digitized by Google

tung B'B, wird also auch beide Punkte außerhalb des Auges jederzeit in ihrer richtigen Stelle, den Gegenstand AB folglich immer aufrecht sehen, wenn auch sein Bild A'B' im Auge verkehrt steht.

Daß ein gesunder Mensch die Gegenstände mit beiden Augen einfach sieht, hat wohl unstreitig seinen Grund darin, daß die in die beiden Augen tretenden, zu den Netzhäuten sich erweiternden Sehnerven nur als Zweige oder Aeste eines sich im Gehirn verlierenden Sehnerven zu betrachten sind.

Die Besprechung anderer Erscheinungen dieser Art, deren es allerdings noch manche giebt, halten wir nicht dem Zwecke dieses Werks für angemessen.

§. 84.

Bei dem Fehler der Weitsichtigkeit und Kurzsichtigkeit bedient man sich der Brillen, deren Theorie wir nun entwickeln wollen, wobei wir zugleich sehen werden, daß zwei Arten derselben unterschieden werden müssen, was hier für jetzt nur vorläufig erwähnt wird.

Wir wollen uns eine Linse und in deren Axe des Auge denken, wobei wir zugleich annehmen, daß sich das Auge ganz nahe bei der Linse hinter derselben befinde. Die Richtung von dem Auge nach der Linse hin werde als die positive Richtung angenommen. Die als positiv betrachtete Dicke der Linse sei D, und die ebenfalls als positiv betrachtete Weite des deutlichen Sehens des Auges werde durch Δ bezeichnet. Der gehörig als positiv oder negativ betrachtete vordere und hintere Halbmesser der Linse und ihre beiden Brennweiten seien respective r, r' und f, f'. Die als positiv betrachtete Entfernung eines Gegenstandes, welchen wir größerer Bestimmtheit wegen als eine auf der Axe der Linse senkrecht stehende und von derselben halbirte gerade Linie annehmen wollen, von der vordern Gränzfläche der Linse sei p, und q sei die gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des einen der beiden Endpunkte dieser geraden Linie von der Axe der Linse. Der Sehwinkel, unter welchem diese gerade Linie dem freien Auge erscheint, sei 2φ, so daß wir also offenbar die Gleichung

$$q = \pm (p + D) \operatorname{tang} \varphi$$

haben, in welcher das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, jenachdem die Größe q positiv oder negativ ist. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des von der Linse gemachten Bildes des Punktes (pq), indem die erste Coordinate desselben von der hintern Gränzfläche der Linse an gerechnet wird, durch p', q'; so haben wir nach §. 64., wenn auf ähnliche Art wie dort der Kürze wegen

$$K = \frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'}}$$

Digitized by Google

gesetzt wird, wobei man nur zu beachten hat, daß wegen der vorher rücksichtlich der Dicke der Linse gegebenen Bestimmung für das dortige D jetzt — D gesetzt werden muß, die beiden folgenden Gleichungen:

$$(p - f)(p' - f') = -K^2$$

und

$$\frac{q}{q'} = \frac{p - f}{K} = -\frac{K}{p' - f'}.$$

Bezeichnen wir ferner den Sehwinkel, unter welchem das Bild (p' q') dem Auge erscheint, durch $2\varphi'$, so werden wir unter den gemachten Voraussetzungen, da wir das Auge ganz nahe bei der Linse annehmen, wenigstens mit einer für den vorliegenden Zweck völlig hinreichenden Annäherung

$$q' = \pm p' \operatorname{tang} \varphi'$$

zu setzen berechtigt sein, indem wir in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem p' und q' gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Das vorher eingeführte Symbol p soll von nun an die Entfernung vom Auge bedeuten, in welche die Person, für welche die Brille bestimmt ist, die zu beschauenden Objecte mit Bequemlichkeit bringen kann, also z. B. die Entfernung vom Auge, in welche beim Lesen oder Schreiben das Papier mit Bequemlichkeit gebracht werden kann. Dann muß offenbar durch die Brille, wenn dieselbe ihrem Zwecke in jeder Beziehung gehörig entsprechen soll, den folgenden Bedingungen vollständig genügt werden:

1. Das Bild des Objects muß sich in der Weite des deutlichen Sehens vom Auge befinden.

2. Das Bild muß mit dem Objecte gleiche Lage gegen die Axe der Linse haben, d. h. ersteres muß aufrecht oder verkehrt stehen, jenachdem letzteres aufrecht oder verkehrt steht.

3. Das Bild muß durch die Linse dem Auge unter demselben Sehwinkel erscheinen wie das Object dem freien Auge.

Drücken wir diese Bedingungen analytisch aus, so ergiebt sich, daß erstens $p' = \Delta$ sein muß, daß zweitens q und q' gleiche Vorzeichen haben müssen, und daß drittens $\varphi = \varphi'$ sein muß. Wegen der ersten und dritten Bedingung geht also die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$q' = \pm p' \operatorname{tang} \varphi'$$

in die Gleichung

$$q' = \pm \Delta \operatorname{tang} \varphi$$

über, in welcher, weil nach der Voraussetzung Δ positiv ist, das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, jenachdem q' positiv oder negativ ist. Weil nun in der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$q = \pm (p + D) \operatorname{tang} \varphi$$

das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, jenachdem q positiv oder negativ ist, so sieht man, mit gehöriger Be-

Digitized by Google

rücksichtigung der zweiten Bedingung, daß in den beiden vorhergehenden Gleichungen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen sind, und aus denselben ergiebt sich folglich durch Division

$$\frac{q}{q'} = \frac{p+D}{\Delta},$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$\frac{q}{q'} = \frac{p-f}{K} = -\frac{K}{p'-f'}$$

ist, zugleich mit Berücksichtigung der ersten Bedingung:

$$\frac{p+D}{\Delta} = \frac{p-f}{K} = -\frac{K}{\Delta-f'}.$$

Wegen der ersten Bedingung und der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$(p-f)(p'-f') = -K^2$$

hat man aber auch die Gleichung

$$(p-f)(\Delta-f') = -K^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(p-f)(\Delta-f') = -\left(\frac{p-f}{p+D}\right)^2 \Delta^2,$$

d. i.

$$\frac{p-f}{\Delta-f'} = -\left(\frac{p+D}{\Delta}\right)^2,$$

welches folglich die im Allgemeinen zu erfüllende Bedingungsgleichung ist.

Nehmen wir nun aber, um bloß den einfachsten und am häufigsten vorkommenden Fall zu betrachten, an, daß die Halbmesser der Linse den Zeichen nach entgegengesetzt, aber absolut gleich sind, d. h. daß $r' = -r$ oder die Linse entweder eine doppelt convexe oder doppelt concave gleichseitige Linse ist, so folgt aus den aus §. 64. bekannten Formeln:

$$\frac{1}{f} = -\frac{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) - \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}{1-\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r'}},$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) - \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r'}}{1+\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}}$$

und auch aus der Natur der Sache leicht, daß $f' = -f$, folglich nach dem Obigen

$$\frac{p-f}{\Delta+f} = -\left(\frac{p+D}{\Delta}\right)^2$$

Digitized by Google

ist, welche letztere Gleichung nun bloß noch die unbekannte Größe f enthält. Bestimmt man diese Größe aus vorstehender Gleichung, so erhält man nach leichter Rechnung

$$f = \frac{p + \left(\frac{p+D}{\Delta}\right)^2 \Delta}{1 - \left(\frac{p+D}{\Delta}\right)^2},$$

oder

$$f = \frac{p + \frac{p+D}{\Delta}(p+D)}{\left(1 - \frac{p+D}{\Delta}\right)\left(1 + \frac{p+D}{\Delta}\right)},$$

oder auch, wie man leicht findet:

$$f = \frac{p}{1 - \frac{p+D}{\Delta}} + \frac{\frac{p+D}{\Delta} D}{\left(1 - \frac{p+D}{\Delta}\right)\left(1 + \frac{p+D}{\Delta}\right)},$$

oder

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta - (p+D)} + \frac{\Delta (p+D) D}{\{\Delta - (p+D)\}\{\Delta + (p+D)\}}.$$

Sind wir berechtigt, der Kürze wegen D als verschwindend zu betrachten oder $D = 0$ zu setzen, so wird

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta - p};$$

und weil nun nach dem Obigen unter derselben Voraussetzung

$$\frac{1}{f} = -\frac{2(n-1)}{r}, \quad r = -2(n-1) f$$

ist, so ist

$$r = -\frac{2(n-1)\Delta p}{\Delta - p}.$$

Die Größen Δ und p sind beide positiv. Für ein weitsichtiges Auge ist $\Delta > p$, also f positiv und r negativ. Für ein kurzsichtiges Auge ist $\Delta < p$, also f negativ und r positiv. Hieraus ergiebt sich, daß ein weitsichtiges Auge eine gleichseitige doppelt convexe, eine kurzsichtiges Auge eine gleichseitige doppelt concave Brille gebraucht. Die letzteren werden vorzugsweise Brillen, auch Zerstreuungsbrillen oder Lorgnetten, die ersteren Sammelbrillen oder Lesegläser genannt.

Will man eine Lorgnette für sehr entfernte Gegenstände, etwa zum Gebrauch im Freien bei'm Ausgehen haben, so muß man in den obigen Formeln $p = \infty$ setzen. Weil nun nach dem Obigen

Digitized by Google

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta - p} = -\frac{\Delta}{1 - \frac{\Delta}{p}}$$

und im vorliegenden Falle $\frac{\Delta}{p} = 0$ ist, so ergiebt sich $f = -\Delta$, also nach dem Obigen $r = 2(n-1)\Delta$. Die Brennweite der Lorgnette muß also der negativen Weite des deutlichen Sehens gleich genommen werden.

Man sieht hieraus, daß jeder Kurzsichtige, der seine Augen lieb hat, sich einer besondern Brille bei'm Lesen und Schreiben, und einer andern bei'm Ausgehen im Freien bedienen sollte.

Wir wollen nun auch noch der Vollständigkeit wegen mit gehöriger Berücksichtigung der Dicke D aus der oben schon gefundenen Brennweite f den Halbmesser r bestimmen. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\frac{1}{f} = -\frac{\left(n-1\right)\cdot\frac{2}{r} + \frac{D}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{r}\right)^2}{1 + \frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{r}},$$

also

$$\frac{D}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{r}\right)^2 + \left(2 + \frac{D}{n}\cdot\frac{1}{f}\right)\cdot\frac{n-1}{r} = -\frac{1}{f}$$

oder

$$\left(\frac{n-1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{f} + \frac{2n}{D}\right)\cdot\frac{n-1}{r} = -\frac{n}{fD},$$

folglich

$$\left\{\frac{n-1}{r} + \left(\frac{1}{2f} + \frac{n}{D}\right)\right\}^2 = \left(\frac{1}{2f} + \frac{n}{D}\right)^2 - \frac{n}{fD},$$

d. i.

$$\left\{\frac{n-1}{r} + \left(\frac{1}{2f} + \frac{n}{D}\right)\right\}^2 = \left(\frac{1}{2f}\right)^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2,$$

woraus sich

$$\frac{n-1}{r} = -\left(\frac{1}{2f} + \frac{n}{D}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2f}\right)^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2}$$

ergiebt. Es ist also auch

$$r = -\frac{n-1}{\frac{1}{2f} + \frac{n}{D} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{2f}\right)^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2}},$$

oder

$$r = -\frac{2(n-1)fD}{D + 2nf \mp \sqrt{D^2 + 4n^2f^2}}.$$

Das Product der beiden Werthe von $\frac{n-1}{r}$ ist

$$\left\{\frac{1}{2f} + \frac{n}{D} - \sqrt{\left(\frac{1}{2f}\right)^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2}\right\}\left\{\frac{1}{2f} + \frac{n}{D} + \sqrt{\left(\frac{1}{2f}\right)^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2}\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{2f} + \frac{n}{D}\right)^2 - \left\{\left(\frac{1}{2f}\right)^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2\right\} = \frac{n}{fD},$$

Digitized by Google

und dieses Product hat daher mit f jederzeit gleiches Vorzeichen. Also haben die beiden Werthe von r, welche die obigen Formeln liefern, gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem f positiv oder negativ ist. Ist f positiv, so sind die Werthe von r offenbar beide negativ, und das untere Zeichen liefert für r einen kleineren absoluten Werth als das obere Zeichen. Wenn f negativ ist, so ist, wie leicht erhellet,

$$D^2 + 4n^2 f^2 > (D + 2nf)^2,$$

und das obere Zeichen liefert folglich für r immer einen negativen Werth; da nun die beiden Werthe von r in diesem Falle entgegengesetzte Vorzeichen haben, so liefert das untere Zeichen einen positiven Werth. Weil in diesem Falle 2nf negativ ist, so ist

$$r = -\frac{2(n-1)fD}{D + 2nf \pm 2nf\sqrt{1 + \left(\frac{D}{2nf}\right)^2}},$$

also, wenn nur D klein ist, näherungsweise

$$r = -\frac{2(n-1)fD}{D + 2nf \pm 2nf \pm nf\left(\frac{D}{2nf}\right)^2},$$

d. i.

$$r = \begin{cases} -\dfrac{2(n-1)fD}{4nf + \left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{D}{nf}\right)D} \\ -\dfrac{2(n-1)f}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{D}{nf}}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich, daß das obere Zeichen für r einen sehr kleinen absoluten Werth liefert. Man muß also, um für r den möglichst großen absoluten Werth und für die Linse also die möglichst kleinste Krümmung zu erhalten,

$$r = -\frac{2(n-1)fD}{D + 2nf \mp \sqrt{D^2 + 4n^2 f^2}}$$

setzen, und das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem f positiv oder negativ ist.

Im Obigen glauben wir alle Punkte berührt zu haben, die für die Theorie der Brillen von Wichtigkeit sind.

In den physikalischen Kabinetten hat man sehr instructiv eingerichtete Apparate, die sogenannten künstlichen Augen, mittelst welcher sich alle Vorgänge bei'm Sehen auf sehr anschauliche Weise erläutern lassen.

Digitized by Google

§. 85.

Von großer Wichtigkeit ist der Gebrauch der Linsen und der Linsensysteme als Vergrößerungsgläser, den wir daher jetzt mit möglichster Vollständigkeit und Genauigkeit kennen zu lernen suchen und vorläufig nur sogleich bemerken wollen, daß man die Linsen und Linsensysteme, wenn man diesen Gebrauch von ihnen macht, mit dem Namen Loupen oder, im Gegensatz zu den aus zwei Linsensystemen auf derselben Axe bestehenden zusammengesetzten Mikroskopen, die wir weiter unten kennen lernen werden, einfache Mikroskope zu nennen pflegt.

Wir denken uns also ein Linsensystem und in der Axe desselben ganz nahe hinter der letzten Linse das Auge. Die positive Richtung werde von dem Auge nach dem Linsensysteme hin genommen, und die unter dieser Voraussetzung also als positiv zu betrachtende Weite des deutlichen Sehens durch Δ bezeichnet. Behalten wir nun alle im 12ten Kapitel eingeführten Bezeichnungen auch jetzt bei, so haben wir zwischen den Coordinaten P, Q des einen Endpunkts des Objects, welches wir wieder der Einfachheit wegen als eine auf der Axe des Linsensystems senkrecht stehende und von derselben halbirte gerade Linie annehmen wollen, und den Coordinaten P_μ', Q_μ' seines von dem Linsensysteme gemachten Bildes die beiden Gleichungen

$$(P - F)\,(P_\mu' - F_\mu') = -\,K_\mu^2$$

und

$$\left(\frac{Q}{Q_\mu'}\right)^2 = -\,\frac{P - F}{P_\mu' - F_\mu'};$$

oder, weil in den im angeführten Kapitel gebrauchten Symbolen

$$K_\mu = \frac{1}{N_\mu}$$

ist,

$$(P - F)\,(P_\mu' - F_\mu') = -\,\frac{1}{N_\mu^2}$$

und

$$\left(\frac{Q}{Q_\mu'}\right)^2 = -\,\frac{P - F}{P_\mu' - F_\mu'};$$

zu denen man auch noch die Gleichung

$$\frac{Q}{Q_\mu'} = \frac{1+(n-1)\frac{P}{r}}{1+(n-1)\frac{P'}{r'}} \cdot \frac{1+(n_1-1)\frac{P_1}{r_1}}{1+(n_1-1)\frac{P_1'}{r_1'}} \cdot \frac{1+(n_2-1)\frac{P_2}{r_2}}{1+(n_2-1)\frac{P_2'}{r_2'}} \cdots \frac{1+(n_\mu-1)\frac{P_\mu}{r_\mu}}{1+(n_\mu-1)\frac{P_\mu'}{r_\mu'}}$$

nehmen kann.

Digitized by Google

Da man nun, wenn man den in Rede stehenden Gebrauch von dem Linsensysteme macht, nicht das Object selbst, sondern vielmehr sein von dem Linsensysteme gemachtes Bild mit dem Auge zu beschauen beabsichtigt, so ist es vor allen Dingen nöthig, daß dieses Bild sich genau in der Weite des deutlichen Sehens vom Auge befinde, d. h. daß die Bedingungsgleichung

$$P_\mu' = \Delta$$

erfüllt sei. Diese Bedingungsgleichung erfüllt man aber auf eine eben so leichte und einfache als scharfe Weise dadurch, daß man das Object durch einiges Probiren in eine solche Entfernung von dem Auge oder dem Linsensysteme bringt, d. h. daß man gewissermaßen auf mechanischem oder praktischem Wege die im Obigen durch P bezeichnete Größe so bestimmt, daß sich das Bild des Objects dem durch das Linsensystem schauenden Auge mit völliger Deutlichkeit und Schärfe darstellt. Nehmen wir also im Folgenden immer an, daß dies der Fall und folglich die Bedingungsgleichung

$$P_\mu' = \Delta$$

erfüllt sei, so gehen die zwei ersten der drei obigen Gleichungen in die folgenden über:

$$(P - F)\,(\Delta - F_\mu') = -\frac{1}{N_\mu^2}$$

und

$$\left(\frac{Q}{Q_\mu'}\right)^2 = -\frac{P - F}{\Delta - F_\mu'},$$

und auch in die dritte der drei obigen Gleichungen würde sich leicht Δ statt P_μ' einführen lassen, was wir jedoch hier der Kürze wegen unterlassen.

Es ist im Obigen schon bemerkt worden, daß die Größe, unter welcher ein Gegenstand dem Auge erscheint, sich vorzüglich nach dem Sehwinkel richte, unter welchem derselbe von dem Auge gesehen wird. Bloß nach dem Sehwinkel richtet sich diese Größe aber nur dann, und kann nur dann ohne Weiteres demselben proportional gesetzt werden, wenn wir gar keine bestimmte Vorstellung von der Entfernung des Gegenstandes vom Auge und von seiner wirklichen Größe haben, wie dies z. B. bei den Gestirnen, überhaupt bei den sogenannten unendlich weit entfernten Objecten der Fall ist. Wenn aber das Letztere nicht der Fall ist, wenn wir vielmehr bestimmte Vorstellungen von den Entfernungen und wirklichen Größen der Objecte haben, so mischen sich diese Vorstellungen, wie die Erfahrung lehrt, in unser Urtheil über die Größe, unter welcher wir dieselbe mit dem Auge erblicken, unwillkührlich mit ein, und diese Größe läßt sich nun nicht mehr bloß nach dem Sehwinkel beurtheilen oder demselben proportional setzen, indem ja z. B., wie Jeder aus der alltäglichsten Erfahrung wissen wird,

Digitized by Google

eine Länge von vier Zollen in einer Entfernung von fünf Fußen vom Auge demselben keineswegs doppelt so groß erscheint als in einer Entfernung von zehn Fußen, wenn auch allerdings im ersten Falle der Sehwinkel wenigstens sehr nahe doppelt so groß ist als im letzten Falle. Wollen wir daher unter der obigen Voraussetzung die Größen, unter denen die Objecte uns, wenn wir sie mit dem Auge betrachten, erscheinen, auf eine möglichst sichere Weise mit einander vergleichen, so werden wir dieselben, wie leicht erhellen wird, den Sehwinkeln proportional zu setzen haben, unter denen diese Objecte erscheinen würden, wenn wir sie uns in gleichen Entfernungen vom Auge, etwa in der Weite des deutlichen Sehens von demselben dächten. Wenigstens scheint sich bei diesem Gegenstande, welcher mit der noch sehr in Dunkel gehüllten Art und Weise, wie unser Vorstellungsvermögen thätig ist, nahe zusammenhängt und daher überhaupt eigentlich nicht rein mathematischer Natur ist, ein sicherer und einfacherer Weg wie der vorhergehende nicht betreten zu lassen. Daß aber dieser Weg bei der Beurtheilung der sogenannten Vergrößerung der Loupen oder einfachen Mikroskope, wie gleich nachher geschehen wird, nothwendig betreten werden muß, liegt klar vor Augen, weil wir offenbar zu dem Gebrauche dieser Instrumente ein gewisses bestimmtes Urtheil über die Entfernungen und wirklichen Größen der Objecte schon mitbringen.

Bezeichnen wir nun den Sehwinkel, unter welchem das Object dem Auge erscheinen würde, wenn es sich in der Weite des deutlichen Sehens von demselben befände, durch 2φ, den Sehwinkel aber, unter welchem das durch das Linsensystem gesehene Bild des Objects dem Auge sich darstellt, durch $2\varphi_\mu'$; so ist offenbar, wenn man nur immer gehörig festhält, daß nach dem Obigen die Bedingungsgleichung $P_\mu' = \Delta$ als erfüllt vorausgesetzt wird, wenigstens mit einer für unsern jetzigen Zweck völlig hinreichenden Annäherung

$$Q = \pm \Delta \operatorname{tang} \varphi, \quad Q_\mu' = \pm \Delta \operatorname{tang} \varphi_\mu';$$

wo eine Beziehung zwischen den obern und untern Vorzeichen nicht stattfinden soll, und folglich

$$\frac{Q_\mu'}{Q} = \pm \frac{\operatorname{tang} \varphi_\mu'}{\operatorname{tang} \varphi},$$

oder, weil hier die Winkel φ und φ_μ' immer nur sehr klein sein werden, mit einer hier hinreichenden Genauigkeit

$$\frac{Q_\mu'}{Q} = \pm \frac{\varphi_\mu'}{\varphi}.$$

Bezeichnen wir nun die sogenannte Vergrößerung des als eine Loupe oder ein einfaches Mikroskop in Anwendung gebrachten Linsensystems durch V_μ, so ist nach den vorher angestellten allgemeinen Betrachtungen ohne alle weitere Erläuterung und

Digitized by Google

nähere Bestimmung des allgemeinen Begriffs der Vergrößerung ganz von selbst klar, daß man

$$V_\mu = \frac{2\varphi_\mu'}{2\varphi} = \frac{\varphi_\mu'}{\varphi}$$

zu setzen hat. Vergleicht man aber diese Gleichung mit der unmittelbar vorhergehenden, so ergiebt sich auf der Stelle die Gleichung

$$V_\mu = \pm \frac{Q_\mu'}{Q},$$

in welcher man das Vorzeichen jederzeit so zu nehmen hat, daß der Werth von V_μ, wie es die Natur der Sache offenbar fordert, positiv wird. Also ist

$$V_\mu^2 = \left(\frac{Q_\mu'}{Q}\right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen

$$V_\mu^2 = -\frac{\Delta - F_\mu'}{P - F}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen ferner

$$P - F = -\frac{1}{N_\mu^2 (\Delta - F_\mu')}, \quad \Delta - F_\mu' = -\frac{1}{N_\mu^2 (P - F)};$$

also

$$V_\mu^2 = N_\mu^2 (\Delta - F_\mu')^2 = \frac{1}{N_\mu^2 (P - F)^2},$$

und folglich

$$V_\mu = \pm N_\mu (\Delta - F_\mu')$$

oder

$$V_\mu = \pm \frac{1}{N_\mu (P - F)},$$

wo man wieder die Vorzeichen immer so zu nehmen hat, daß V_μ einen positiven Werth erhält.

§. 86.

An die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Formel

$$V_\mu^2 = -\frac{\Delta - F_\mu'}{P - F} = \frac{\Delta - F_\mu'}{F - P} = \frac{F_\mu' - \Delta}{P - F}$$

oder

$$V_\mu = \sqrt{-\frac{\Delta - F_\mu'}{P - F}} = \sqrt{\frac{\Delta - F_\mu'}{F - P}} = \sqrt{\frac{F_\mu' - \Delta}{P - F}},$$

welche für die Bestimmung von V_μ vorzüglich wichtig ist, weil Δ, P, F, F_μ' Größen sind, die in vielen Fällen eine bequeme unmittelbare Messung gestatten, wobei wir immer voraussetzen, daß P so bestimmt worden sei, daß die Bedingungsgleichung

Digitized by Google

$P_\mu' = \Delta$ erfüllt ist, d. h. daß man das Object jederzeit in eine solche Lage bringt, daß sein Bild dem Auge mit vollkommener Präcision sich darstellt, wollen wir jetzt zuvörderst noch einige allgemeine Betrachtungen anknüpfen.

Wegen der obigen Gleichung ist

$$-\frac{\Delta - F_\mu'}{P-F} = \frac{\Delta - F_\mu'}{F-P} = \frac{F_\mu' - \Delta}{P-F}$$

jederzeit eine positive Größe, und die Größen $\Delta - F_\mu'$ und $F - P$, oder $F_\mu' - \Delta$ und $P - F$, haben daher immer gleiche Vorzeichen. Der gewöhnlichste in der Praxis vorkommende Fall ist nun der, daß F_μ' negativ, also, weil Δ immer positiv ist, $\Delta - F_\mu'$ positiv ist; und in diesem Falle ist folglich $F - P$ positiv, also

$$F - P > 0, \quad F > P, \quad P < F.$$

Ist nun F positiv, welches gleichfalls der gewöhnlichste in der Praxis vorkommende Fall ist, so sieht man aus der Relation $P < F$, daß in diesem Falle das Object immer innerhalb der vordern Brennweite des Linsensystems stehen muß, was auch einem Jeden aus dem Gebrauche einer gewöhnlichen Loupe bekannt sein wird.

Soll das Linsensystem wirklich vergrößern, so muß $V_\mu > 1$, d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\Delta - F_\mu'}{F-P} > 1 \text{ oder } \frac{F_\mu' - \Delta}{P-F} > 1$$

sein. Sind nun die beiden gleiche Vorzeichen habenden Größen $\Delta - F_\mu'$ und $F - P$ positiv, so muß

$$\Delta - F_\mu' > F - P,$$

also

$$\Delta + P > F + F_\mu'$$

sein. Sind dagegen die beiden in Rede stehenden Größen negativ, folglich die beiden Größen $F_\mu' - \Delta$ und $P - F$ positiv, so muß

$$F_\mu' - \Delta > P + F,$$

also

$$\Delta + P < F + F_\mu'$$

sein.

Ist F_μ' negativ, also $\Delta - F_\mu'$ positiv, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Delta + P > F + F_\mu'$$

die Bedingung, daß wirklich eine Vergrößerung stattfinde.

Digitized by Google

§. 87.

Eine ausführliche Betrachtung wollen wir nun dem Falle widmen, wenn das System aus nur einer doppelt convexen Linse besteht, in welchem also nach den im Obigen gegebenen Bestimmungen der Halbmesser r negativ, der Halbmesser r′ dagegen positiv ist. Hierbei wollen wir annehmen, daß die Dicke D der Linse absolut genommen so klein sei, daß dieselbe auf die Vorzeichen der Größen, in denen sie vorkommt, keinen Einfluß ausübt, so daß also diese Größen überhaupt mit den Werthen, welche sie für $D = 0$ erhalten, gleiche Vorzeichen haben, eine Voraussetzung, welche nothwendigerweise gemacht werden muß, wenn bei den folgenden Betrachtungen zu große Weitläufigkeit vermieden werden soll.

Zuvörderst haben wir nun nach §. 64. oder §. 72. für F und $-F'$ die folgenden Ausdrücke:

$$F = \frac{1}{\frac{1-n}{r} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{r'}}}$$

und

$$-F' = \frac{1}{\frac{n-1}{r'} + \frac{1}{\frac{D}{n}} + \frac{1}{\frac{1-n}{r}}},$$

aus denen sich nach leichter Rechnung

$$F = \frac{1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}}{\frac{1-n}{r} + \frac{n-1}{r'} + \frac{1-n}{r} \cdot \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}},$$

$$-F' = \frac{1 + \frac{1-n}{r} \cdot \frac{D}{n}}{\frac{1-n}{r} + \frac{n-1}{r'} + \frac{1-n}{r} \cdot \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}}$$

oder

$$F = -\frac{1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}}{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}},$$

$$F' = \frac{1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{D}{n}}{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}}.$$

Digitized by Google

also

$$N = \frac{1-n}{r} + \frac{n-1}{r'} + \frac{1-n}{r} \cdot \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}$$

$$= -\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}$$

$$= \frac{1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}}{F} = -\frac{1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{D}{n}}{F'}$$

ergiebt.

Für $D = 0$ ist

$$F = -\frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}, \quad F' = \frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}$$

und

$$N = -\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{F} = -\frac{1}{F'}.$$

Weil nun nach der gemachten Voraussetzung r negativ und r' positiv ist, so sind die Größen

$$F, F', N$$

respective

positiv, negativ, positiv;

wobei man immer die vorher wegen der Größe D gemachte Voraussetzung wohl festzuhalten hat.

Für die Vergrößerung V erhält man mittelst der im Obigen entwickelten Ausdrücke leicht die folgenden Formeln:

$$V = \mp\sqrt{-\frac{\Delta - F'}{P - F}} = \sqrt{\frac{\Delta - F'}{F - P}} = \sqrt{\frac{F' - \Delta}{P - F}}$$

und

$$V = \pm\left(1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}\right)\frac{\Delta - F'}{F} = \mp\left(1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{D}{n}\right)\frac{\Delta - F'}{F'}$$

$$= \mp\left(1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}\right)\left(\frac{F'}{F} - \frac{\Delta}{F}\right) = \pm\left(1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{D}{n}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{F'}\right)$$

oder

$$V = \pm\frac{F}{\left(1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}\right)\left(P - F\right)} = \mp\frac{F'}{\left(1 - \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}\right)\left(P - F\right)},$$

$$\frac{1}{V} = \mp\left(1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}\right)\left(1 - \frac{P}{F}\right) = \pm\left(1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{D}{n}\right)\left(\frac{F}{F'} - \frac{P}{F'}\right);$$

wo man immer die Vorzeichen so zu nehmen hat, daß V positiv wird.

Digitized by Google

Wenn der absolute Werth von D, wie wir hier voraussetzen, sehr klein ist, so ist näherungsweise

$$V = \pm \left(1 - \frac{\Delta}{F'}\right),$$

und folglich, weil Δ immer positiv, nach dem Obigen aber F' negativ ist,

$$V = 1 - \frac{\Delta}{F'}$$

und $V > 1$, so daß also unter diesen Voraussetzungen immer eine wirkliche Vergrößerung stattfindet. Weil nach den obigen Formeln offenbar nahe $F' = -F$ ist, so kann auch näherungsweise

$$V = 1 + \frac{\Delta}{F}$$

gesetzt werden.

Weil bekanntlich

$$(P - F)(\Delta - F') = -\frac{1}{N^2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$(P-F)(\Delta-F') = -\frac{F^2}{\left(1 + \frac{n-1}{r'} \cdot \frac{D}{n}\right)^2} = -\frac{F'^2}{\left(1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{D}{n}\right)^2}.$$

Betrachten wir aber näherungsweise D als verschwindend, so erhalten wir

$$(P - F)(\Delta + F) = -F^2,$$

also, wie hieraus leicht erhalten wird:

$$P = \frac{F\Delta}{F + \Delta},$$

und folglich offenbar

$$P < F, \quad P < \Delta;$$

also, weil bekanntlich $P' = \Delta$ ist:

$$P < F, \quad P < P';$$

welche Resultate man leicht zu deuten verstehen wird.

Ferner haben wir nach §. 64. die Formel

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1 + (n-1)\frac{P}{r}}{1 + (n-1)\frac{P'}{r'}},$$

Digitized by Google

d. i.

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1 + (n-1)\frac{P}{r}}{1 + (n-1)\frac{\Delta}{r'}}.$$

Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist offenbar eine positive Größe. Weil nun aber für $D = 0$

$$n - 1 = -\frac{1}{F\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}, \quad P = \frac{F\Delta}{F + \Delta}$$

ist, so ist der Zähler

$$1 + (n-1)\frac{P}{r} = 1 - \frac{\Delta}{F+\Delta} \cdot \frac{1}{r\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)},$$

d. i.

$$1 + (n-1)\frac{P}{r} = 1 - \frac{\Delta}{F+\Delta} \cdot \frac{r'}{r'-r}.$$

Da nun r negativ, r' positiv ist, so können wir, wenn ϱ und ϱ' positive Größen bezeichnen, $r = -\varrho$ und $r' = \varrho'$ setzen, wodurch wir

$$1 + (n-1)\frac{P}{r} = 1 - \frac{\Delta}{F+\Delta} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho + \varrho'}$$

erhalten. Weil offenbar

$$\frac{\Delta}{F+\Delta} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho+\varrho'} < 1$$

ist, so ist $1 + (n-1)\frac{P}{r}$, und nach dem Vorhergehenden also offenbar auch der Bruch

$$\frac{Q}{Q'}$$

positiv. Also haben Q und Q' gleiche Vorzeichen, d. h. das Bild steht in Bezug auf das Object aufrecht.

Alle in diesem Paragraphen auf analytischem Wege erhaltenen Resultate wird man bei Versuchen mit einfachen doppeltconveren Linsen vollkommen bestätigt finden.

Wenn wir die sogenannte halbe Oeffnung der Linse durch q bezeichnen, so ist die der Entfernung P entsprechende größte Seitenabweichung derselben nach §. 80. in den im Vorhergehenden eingeführten Zeichen:

$$-\frac{n(4n-1)q^3}{8\left(n-1\right)^2\left(n+2\right)\left(1+\frac{F}{P}\right)}\left\{\frac{1}{F^2} - \frac{4(n-1)^2}{4n-1} \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{P}\right)\right\},$$

Digitized by Google

d. i., weil nach dem Obigen

$$P = \frac{F\Delta}{F+\Delta}, \quad \frac{1}{P} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Delta}$$

ist:

$$-\frac{n(4n-1)q^3}{8\left(n-1\right)^2\left(n+2\right)\left(2+\frac{F}{\Delta}\right)}\left\{\frac{1}{F^2} - \frac{4(n-1)^2}{4n-1}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{2}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\right\}.$$

Unter der Voraussetzung nun, daß diese größte Seitenabweichung negativ, d. h. daß die Größe

$$\frac{1}{F^2} - \frac{4(n-1)^2}{4n-1}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{2}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)$$

positiv, und folglich die Seitenabweichung ein absolutes Minimum sei, wird man die Halbmesser r und r' der Linse am vortheilhaftesten so bestimmen, daß die Seitenabweichung den obigen Werth erhält, d. h. man wird, wie a. a. O. gezeigt worden ist,

$$\frac{1}{r} = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)} \cdot \frac{1}{F} + \frac{2(n+1)}{n+2}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{\Delta}\right),$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{2n^2-n-4}{2(n-1)(n+2)} \cdot \frac{1}{F} + \frac{2(n+1)}{n+2}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{\Delta}\right);$$

oder, wie man leicht findet,

$$\frac{1}{r} = \frac{6n^2+n-4}{2(n-1)(n+2)} \cdot \frac{1}{F} + \frac{2(n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{6n^2-n-8}{2(n-1)(n+2)} \cdot \frac{1}{F} + \frac{2(n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

setzen, und sieht hieraus zugleich, daß streng genommen die beste Form der Linse für jedes Auge besonders bestimmt werden muß, da die obigen Ausdrücke von $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r'}$ von der Größe $\frac{1}{\Delta}$ abhängen.

Statt F könnte man auch leicht die Vergrößerung V in die obigen Ausdrücke von $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r'}$ einführen. Setzt man näherungsweise

$$V = 1 + \frac{\Delta}{F}, \text{ also } \frac{1}{F} = \frac{V}{\Delta} - \frac{1}{\Delta},$$

so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}\left(\frac{V}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\right) + \frac{2(n+1)}{n+2} \cdot \frac{V}{\Delta},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{2n^2-n-4}{2(n-1)(n+2)}\left(\frac{V}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\right) + \frac{2(n+1)}{n+2} \cdot \frac{V}{\Delta};$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{6n^2+n-4}{2(n-1)(n+2)}\left(\frac{V}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\right)+\frac{2(n+1)}{n+2}\cdot\frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{6n^2-n-8}{2(n-1)(n+2)}\left(\frac{V}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\right)+\frac{2(n+1)}{n+2}\cdot\frac{1}{\Delta};$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{6n^2+n-4}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{V}{\Delta}-\frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{6n^2-n-8}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{V}{\Delta}-\frac{2n^2-n-4}{2(n-1)(n+2)}\cdot\frac{1}{\Delta}.$$

Soll der absolute Werth der obigen Seitenabweichung eine bestimmte Größe, die wir durch Σ bezeichnen wollen, nicht übersteigen, so wird der größte Werth, den man der halben Oeffnung q der Linse geben darf, aus der Gleichung

$$\frac{n(4n-1)q^3}{8\left(n-1\right)^2\left(n+2\right)\left(2+\frac{F}{\Delta}\right)}\left\{\frac{1}{F^2}-\frac{4(n-1)^2}{4n-1}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{2}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\right\}=\Sigma$$

bestimmt, woraus sich, wenn wir der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{\Sigma}=\Sigma_1$$

setzen,

$$q=\Sigma_1\cdot\sqrt[3]{\frac{8\left(n-1\right)^2\left(n+2\right)\left(2+\frac{F}{\Delta}\right)}{n\left(4n-1\right)\left\{\frac{1}{F^2}-\frac{4(n-1)^2}{4n-1}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{2}{F}+\frac{1}{\Delta}\right)\right\}}}$$

ergiebt.

In dem vorliegenden Falle nur einer Linse, und weil das Auge sich ganz nahe bei der Linse befindet, kann man das aus der Linse in das Auge tretende Lichtbündel als einen Cylinder von dem Halbmesser q betrachten. Bezeichnen wir nun die Helligkeit für das durch die Linse sehende Auge und für das freie Auge respective durch H und $\mathfrak{H}$, den Halbmesser der Pupille aber durch ϱ; so kann, unter der Voraussetzung, daß ϱ nicht kleiner als q ist, offenbar

$$H : \mathfrak{H} = q^2\pi : \varrho^2\pi = q^2 : \varrho^2,$$

also

$$H = \frac{q^2}{\varrho^2}\mathfrak{H},$$

oder für $\mathfrak{H}=1$:

$$H = \frac{q^2}{\varrho^2}$$

gesetzt werden, wobei angenommen wird, daß q mittelst der obigen Formel bestimmt worden ist. Setzt man also mit Eu-

Digitized by Google

ler $\varrho = \frac{1}{20}$ Zoll, so ist, unter der Voraussetzung, daß alle linearen Größen in Zollen ausgedrückt sind,

$$H = 400\,q^2.$$

Die ältern dioptrischen Schriftsteller nehmen übrigens der Kürze und Einfachheit wegen den Bruch $\frac{1}{\varrho}$ selbst oder die Größe $20q$ für das Maaß der Helligkeit, wie man z. B. in Klügel's ganz an Euler sich anschließender Analytischer Dioptrik. Leipzig. 1778. 4. S. 35. sehen kann.

Ein System mehrerer Linsen eben so ausführlich zu behandeln wie vorher eine Linse, gestattet hier der Raum und der Zweck dieses Buchs nicht, und es genügt uns in dieser Beziehung, im Obigen einen allgemeinen Ausdruck zur Bestimmung der Vergrößerung V_μ für jedes aus $\mu + 1$ Linsen bestehende System entwickelt zu haben, von welchem man in der Praxis oft einen vortheilhaften Gebrauch machen können wird. Eine tiefer eingehende Entwickelung dieses Gegenstandes würde hier einen zu großen Raum und einen dem Zwecke dieses Buchs nicht entsprechenden zu großen Aufwand von analytischem Calcul in Anspruch nehmen, weshalb wir uns mit der obigen freilich nur unvollkommenen Darstellung begnügen müssen.

Siebzehntes Kapitel.

Von dem astronomischen oder Kepler'schen Fernrohre.

§. 88.

Das von Kepler erfundene astronomische Fernrohr ist in seiner ursprünglichen und einfachsten Gestalt eine Verbindung von zwei Sammelgläsern auf einer gemeinschaftlichen Axe, und beruhet auf der folgenden Idee. Wenn das eine dieser beiden Gläser, welches man das Objectivglas oder auch bloß das Objectiv nennt, gegen einen sehr entfernten, mindestens außerhalb der vordern Brennweite des Objectivglases liegenden Gegenstand gerichtet wird, so entsteht von demselben nach §. 68. ein verkehrt stehendes Bild, welches nun als ein neues Object angesehen und durch das andere Glas des Fernrohrs, welches man das Ocularglas oder auch bloß das

Digitized by Google

Ocular nennt, wie durch eine Loupe oder ein einfaches Mikroskop betrachtet wird, woraus sich also nach §. 87. sogleich ergiebt, daß dieses Fernrohr die Gegenstände dem Auge verkehrt darstellt, weshalb es auch vorzüglich für astronomische und geodätische Zwecke in Anwendung gebracht wird, weil dabei der erwähnte Umstand keine besondere Veranlassung zu Unbequemlichkeiten giebt. In diesem besondern und hauptsächlichsten Gebrauche des astronomischen Fernrohrs mag auch wohl der Grund seiner Benennung zu suchen sein; häufig wird dasselbe übrigens auch nach seinem Erfinder das Kepler'sche Fernrohr, wohl auch das Kepler'sche Sternrohr genannt. Wenn das Objectivglas eines solchen Fernrohrs, wie immer bei den neueren und besseren Fernröhren dieser Art, achromatisch oder noch besser aplanatisch (m. s. das 13te und 14te Kapitel) gebaut ist, so pflegt man ein solches Fernrohr ein achromatisches astronomisches Fernrohr zu nennen, könnte es aber unter der Voraussetzung, daß das Objectivglas wirklich aplanatisch, und nicht bloß achromatisch, gebaut ist, auch ganz zweckmäßig ein aplanatisches astronomisches Fernrohr nennen. Astronomische Fernröhre mit dialytisch eingerichteten Objectiven (m. s. das 15te Kapitel) heißen dialytische astronomische Fernröhre.

§. 89.

Wir wollen im Folgenden der Kürze wegen immer annehmen, daß das Auge ganz nahe hinter das Ocularglas gehalten werde*), wie wir dies auch schon im vorhergehenden Kapitel bei der Lehre von der Loupe oder dem einfachen Mikroskope, die natürlich hier wieder in Betracht kommt, stets vorausgesetzt haben. Die positive Richtung werde in der Axe des Rohrs vom Auge nach dem Fernrohre oder vom Ocularglase nach dem Objectivglase hin genommen. Haben nun die Größen F, F', P, P', K für das Objectivglas, welches, wenn es achromatisch, aplanatisch oder dialytisch ist, eigentlich als ein System zweier Linsen betrachtet werden muß, was aber jetzt von keinem weiteren Belang ist, die aus den früheren Entwickelungen hinreichend bekannte, und daher einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfende Bedeutung, und werden für das Ocularglas die entsprechenden Größen durch die den obigen großen lateinischen

*) Wegen der für die feinere Theorie der Fernröhre allerdings wichtigen Lehre von dem sogenannten Ort des Auges, die ich jedoch bei einer mehr elementaren Darstellung für weniger wichtig halte, verweise ich die Leser, welche sich weiter und mehr in's Einzelne gehend mit diesen Dingen bekannt machen wollen, auf meine Optischen Untersuchungen. Erster Theil. Leipzig. 1846. §. 37., wo dieselbe, wie ich glaube, mit aller nöthigen Ausführlichkeit entwickelt worden ist. Jedoch wird weiter unten in einer Anmerkung zu §. 94. noch Einiges über diesen Gegenstand gesagt werden, was für den Zweck des vorliegenden Werkes hinreichend sein dürfte

Digitized by Google

Buchstaben entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet; so haben wir nach §. 72. bekanntlich die beiden folgenden Gleichungen:

$$(P - F)(P' - F') = -K^2$$

und

$$(p - f)(p' - f') = -k^2.$$

Da aber P' und p demselben Punkte der Axe des Fernrohrs entsprechen, so ist offenbar, wenn E die als positiv betrachtete Entfernung des Objectivs und Oculars von einander bezeichnet, in völliger Allgemeinheit

$$p - P' = E, \text{ also } p = E + P';$$

wobei man nur zu beachten hat, daß bekanntlich P' von der nach dem Auge hin gekehrten Gränzfläche des Objectivs, p von der von dem Auge abgewandten Gränzfläche des Oculars an gerechnet wird. Weil man nun nach dem vorhergehenden Paragraphen das von dem Objectivglase gemachte Bild wie ein neues Object durch das Ocularglas wie durch eine Loupe oder ein einfaches Mikroskop betrachtet, so ist es offenbar durchaus erforderlich, daß die Größe p' der Weite des deutlichen Sehens gleich, d. h. daß, wenn die letztere durch Δ bezeichnet wird, $p' = \Delta$ sei. Führen wir nun für p und p' ihre respectiven Werthe $E + P'$ und Δ in die beiden obigen Gleichungen ein, so erhalten dieselben die folgende Form:

$$(P - F)(P' - F') = -K^2$$

und

$$(P' + E - f)(\Delta - f') = -k^2.$$

Da die Größe P' in einer jeden dieser beiden Gleichungen vorkommt, so kann man dieselbe aus diesen Gleichungen eliminiren. Aus der ersten Gleichung erhält man

$$P' = F' - \frac{K^2}{P - F},$$

und aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$P' = f - E - \frac{k^2}{\Delta - f'}.$$

Durch die Gleichsetzung dieser beiden Werthe von P' erhält man

$$F' - \frac{K^2}{P - F} = f - E - \frac{k^2}{\Delta - f'},$$

also

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}.$$

Diese Gleichung, in welcher offenbar P und E allein veränderliche oder als veränderlich zu betrachtende Größen sind, ist also eine Bedingungsgleichung, welche bei dem Gebrauche eines

Digitized by Google

Fernrohrs jederzeit nothwendig und vor allen Dingen erfüllt werden muß. Für jeden Beobachter oder vielmehr jedes Auge wird aber bei der Beschauung eines beliebigen Objects die Erfüllung dieser Bedingungsgleichung durch eine bei jedem Fernrohre sich findende eben so sinnreiche als einfache Einrichtung gewissermaßen auf praktische oder mechanische Weise möglich gemacht. Man schließt nämlich jedes der beiden Gläser für sich in eine Röhre ein, und macht die das Ocular tragende Röhre, die Ocularröhre oder das Oculamrohr, in der das Objectiv enthaltenden Röhre, der Objectivröhre oder dem Objectivrohre, verschiebbar. Dadurch wird es möglich gemacht, die im Obigen durch E bezeichnete Größe auf einfache und leichte Weise verschiedene Werthe durchlaufen zu lassen, und durch allmähliges sanftes Verschieben der Ocularröhre in der Objectivröhre die beiden Gläser endlich in eine solche Lage gegen einander zu bringen, daß das zu beschauende Object dem Auge mit völliger Präcision sich darstellt. Hat man aber diesen Zustand herbeigeführt, was natürlich immer nur für jedes besondere Auge und jedes besondere Object in jedem einzelnen Falle möglich ist, so ist, wie aus dem Obigen ganz von selbst hervorgeht, die Bedingungsgleichung

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

offenbar als erfüllt anzusehen, wie erfordert wurde. Damit man aber, was durchaus nothwendig ist, wenn diese Bedingungsgleichung mit der gehörigen Schärfe erfüllt werden soll, die so eben beschriebene Operation, die sogenannte Einstellung des Fernrohrs, mit aller erforderlichen Sicherheit und Genauigkeit vornehmen könne, muß die Verschiebung der Ocularröhre in der Objectivröhre nicht mit der bloßen Hand, sondern mittelst eines in eine gezahnte Stange eingreifenden gezahnten Rades, welches eine möglichst feine Bewegung gestattet, bewirkt werden, und die Künstler sollten nach meiner Meinung, weil die genaue Erfüllung der obigen Bedingungsgleichung von großer Wichtigkeit ist, auf die genaue Ausführung dieses Apparats zur feinen Einstellung des Fernrohrs, welchem oft eine mehr untergeordnete Bedeutung beigelegt wird, noch größere Sorgfalt verwenden als meistens zu geschehen pflegt.

Unter den gemachten Voraussetzungen sind F und P positive Größen, und jedenfalls ist bei dem Gebrauche des Fernrohrs $P > F$, also $P - F$ eine positive Größe. Daher ist auch die Größe

$$\frac{K^2}{P - F}$$

positiv, und diese Größe nimmt ab oder zu, wenn P zu- oder abnimmt. Weil nun

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

Digitized by Google

ist, so ist unter der Voraussetzung, daß Δ, d. h. das Auge, ungeändert bleibt, klar, daß E ab- oder zunimmt, jenachdem P zu- oder abnimmt. Wenn sich also das Object entfernt, so muß dasselbe Auge die Gläser des Fernrohrs einander nähern, d. h. das Fernrohr zusammenschieben, um ein völlig deutliches Bild zu erhalten. Wenn dagegen das Object sich nähert, so muß dasselbe Auge die Gläser des Fernrohrs von einander entfernen, d. h. das Fernrohr ausziehen, um ein völlig deutliches Bild zu erhalten, was auch Alles mit dem, was die Erfahrung lehrt, völlig übereinstimmt.

Die Größe f' ist im vorliegenden Falle negativ, und der Bruch

$$\frac{k^2}{\Delta - f'}$$

folglich jedenfalls positiv. Auch ist klar, daß dieser Bruch ab- oder zunimmt, wenn Δ zu- oder abnimmt. Weil nun

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

ist, so nimmt E offenbar zu oder ab, wenn Δ zu- oder abnimmt, vorausgesetzt nämlich, daß P ungeändert bleibt. Für dasselbe Object muß also ein weitsichtiges Auge das Fernrohr ausziehen, ein kurzsichtiges Auge dagegen dasselbe zusammenschieben, was gleichfalls mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmt.

Wenn die Größen P und Δ so groß sind, daß man die Brüche

$$\frac{K^2}{P - F} \text{ und } \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

als verschwindend zu betrachten berechtigt ist, so ist nach dem Obigen näherungsweise

$$E = f - F'$$

oder

$$E = (-F') + f,$$

d. h., wie leicht erhellet, die Entfernung des Objectivs und Oculars von einander ist bei richtiger Einstellung des Fernrohrs der Summe der absoluten Werthe der beiden Brennweiten F' und f des Objectivs und Oculars gleich, welche Näherungsregel in den physikalischen Lehrbüchern meistens gegeben wird.

§. 90.

Weil man zu der Beschauung eines Objects durch ein Fernrohr offenbar gar keine Vorstellung von der Größe und der immer als sehr groß gedachten Entfernung dieses Objects und von der Größe und Entfernung seiner Bilder mitbringt, so pflegt man anders als bei der Loupe oder dem einfachen

Digitized by Google

Mikroskope (§. 85.) die Vergrößerung V eines Fernrohrs bloß durch den Bruch oder Quotienten auszudrücken, welchen man erhält, wenn man mit dem Sehwinkel, unter welchem das Object dem freien Auge sich darstellen würde, in den Sehwinkel, unter welchem das letzte Bild des Objects dem durch das Fernrohr sehenden Auge erscheint, dividirt. Bezeichnen wir also diese beiden Sehwinkel respective durch 2Φ und $2\varphi'$, so ist

$$V = \frac{2\varphi'}{2\Phi} = \frac{\varphi'}{\Phi}.$$

Werden nun die hier als negativ zu betrachtenden Dicken der beiden Linsen durch D und d bezeichnet, so ist offenbar ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander in leicht durch sich selbst verständlicher Bezeichnung:

$$q' = \pm p' \operatorname{tang} \varphi'$$

und

$$Q = \pm (P + E - D - d) \operatorname{tang} \Phi,$$

also

$$\frac{q'}{Q} = \pm \frac{p'}{P + E - D - d} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi'}{\operatorname{tang} \Phi},$$

oder mit einer hier hinreichenden Genauigkeit

$$\frac{q'}{Q} = \pm \frac{p'}{P + E - D - d} \cdot \frac{\varphi'}{\Phi},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{q'}{Q}\right)^2 = \left(\frac{p'}{P + E - D - d}\right)^2 \cdot V^2,$$

also

$$V^2 = \left(\frac{P + E - D - d}{p'}\right)^2 \cdot \left(\frac{q'}{Q}\right)^2.$$

Nun ist aber nach §. 74. bekanntlich

$$\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 = -\frac{P - F}{P' - F'}$$

und

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = -\frac{p - f}{p' - f'};$$

also, weil im vorliegenden Falle $q = Q'$ ist:

$$\left(\frac{Q}{q'}\right)^2 = \frac{(P - F)(p - f)}{(P' - F')(p' - f')}$$

oder

$$\left(\frac{q'}{Q}\right)^2 = \frac{(P' - F')(p' - f')}{(P - F)(p - f)};$$

Digitized by Google

also nach dem Vorhergehenden:

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-d}{p'}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')\,(p'-f')}{(P-F)\,(p-f)},$$

oder, weil bekanntlich

$$p' = \Delta \text{ und } p = P' + E$$

ist:

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-d}{\Delta}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')\,(\Delta-f')}{(P-F)\,(P'+E-f)}.$$

Weil nun aber nach dem vorhergehenden Paragraphen, was man stets festzuhalten hat, die Bedingungsgleichung

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

durch sehr genaue Einstellung des Fernrohrs als erfüllt vorausgesetzt wird, so sind, wie sich aus dem vorhergehenden Paragraphen von selbst ergiebt, die beiden Gleichungen

$$(P-F)\,(P'-F') = -K^2$$

und

$$(P'+E-f)\,(\Delta-f') = -k^2$$

zugleich erfüllt, und es ist also

$$\frac{P'-F'}{P'+E-f} = \frac{\Delta-f'}{P-F} \cdot \frac{K^2}{k^2}.$$

Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-d}{\Delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta-f'}{P-F}\right)^2 \cdot \frac{K^2}{k^2};$$

folglich

$$V = \pm \frac{P+E-D-d}{\Delta} \cdot \frac{\Delta-f'}{P-F} \cdot \frac{K}{k},$$

wo man das Vorzeichen so zu nehmen hat, daß V positiv wird. Auch ist

$$V = \pm \frac{\Delta-f'}{\Delta} \cdot \frac{P+E-D-d}{P-F} \cdot \frac{K}{k}$$

oder

$$V = \pm \left(1 - \frac{f'}{\Delta}\right) \cdot \frac{1 + \frac{E-D-d}{P}}{1 - \frac{F}{P}} \cdot \frac{K}{k},$$

und näherungsweise, insofern man sich die sehr kleinen Größen

$$\frac{E-D-d}{P} \text{ und } \frac{F}{P}$$

Digitized by Google

als verschwindend zu betrachten berechtigt halten darf,

$$V = \pm \left(1 - \frac{f'}{\Delta}\right) \cdot \frac{K}{k} .$$

Kann man aber auch $\frac{f'}{\Delta}$ ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist

$$V = \pm \frac{K}{k} .$$

Für die Objectivlinse wollen wir, unter der Voraussetzung, daß dieselbe achromatisch, aplanatisch oder dialytisch ist, in leicht durch sich selbst verständlicher Bezeichnung alle Bestimmungsgrößen durch kleine griechische Buchstaben bezeichnen, so ist bekanntlich, wenn wir die Entfernung ε der beiden Linsen von einander jetzt als negativ annehmen:

$$F = \cfrac{1}{\cfrac{1-\nu}{\varrho} + \cfrac{1}{\cfrac{\delta}{\nu} + \cfrac{1}{\cfrac{\nu-1}{\varrho'} + \cfrac{1}{\varepsilon} + \cfrac{1}{\cfrac{1-\nu_1}{\varrho_1} + \cfrac{1}{\cfrac{\delta_1}{\nu_1} + \cfrac{1}{\cfrac{\nu_1-1}{\varrho_1'}}}}}}}$$

und

$$-F' = \cfrac{1}{\cfrac{\nu_1-1}{\varrho_1'} + \cfrac{1}{\cfrac{\delta_1}{\nu_1} + \cfrac{1}{\cfrac{1-\nu_1}{\varrho_1} + \cfrac{1}{\varepsilon} + \cfrac{1}{\cfrac{\nu-1}{\varrho'} + \cfrac{1}{\cfrac{\delta}{\nu} + \cfrac{1}{\cfrac{1-\nu}{\varrho}}}}}}} .$$

Für das Ocularglas dagegen ist

$$f = \cfrac{1}{\cfrac{1-n}{r} + \cfrac{1}{\cfrac{d}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{r'}}}}$$

und

$$-f' = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{r'} + \cfrac{1}{\cfrac{d}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{1-n}{r}}}} .$$

Die Größe K ist nach §. 72. bekanntlich der reciproke gemeinschaftliche Nenner der den beiden obigen Kettenbrüchen, durch welche die Größen F und $-F'$ dargestellt werden, gleichen gemeinen Brüche; und eben so ist die Größe k der reciproke

Digitized by Google

gemeinſchaftliche Nenner der den beiden obigen Kettenbrüchen, durch welche die Größen f und $-f'$ dargeſtellt werden, gleichen gemeinen Brüche.

Setzt man $\delta = 0$ und $\delta_1 = 0$, ſo iſt

$$F = \frac{1}{\left(1-\nu\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\left(1-\nu_1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)}}$$

und

$$-F' = \frac{1}{\left(\nu_1-1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1'}-\frac{1}{\varrho_1}\right)+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\left(\nu-1\right)\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\varrho}\right)}},$$

alſo, wie man leicht findet:

$$F = \frac{1+\left(1-\nu_1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)}{\left(1-\nu\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)+\left(1-\nu_1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)+\left(1-\nu\right)\left(1-\nu_1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)},$$

$$-F' = \frac{1+\left(\nu-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\varrho}\right)}{\left(\nu-1\right)\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\varrho}\right)+\left(\nu_1-1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1'}-\frac{1}{\varrho_1}\right)+\left(\nu-1\right)\left(\nu_1-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1'}-\frac{1}{\varrho_1}\right)}$$

oder

$$F = \frac{1-\left(\nu_1-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)}{\left(1-\nu\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)+\left(1-\nu_1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)+\left(1-\nu\right)\left(1-\nu_1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)},$$

$$-F' = \frac{1-\left(\nu-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)}{\left(1-\nu\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)+\left(1-\nu_1\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)+\left(1-\nu\right)\left(1-\nu_1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)}.$$

Daher iſt unter der gemachten Vorausſetzung

$$K = \frac{F}{1-\left(\nu_1-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)} = -\frac{F'}{1-\left(\nu-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)}.$$

Ferner iſt für $d = 0$

$$f = \frac{1}{\left(1-n\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)} \text{ und } -f' = \frac{1}{\left(1-n\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)},$$

Digitized by Google

also

$$k = f = -f'.$$

Folglich ist

$$\frac{K}{k} = \frac{1}{1-\left(\nu_1-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1'}\right)}\cdot\frac{F}{f}$$

oder

$$\frac{K}{k} = \frac{1}{1-\left(\nu-1\right)\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)}\cdot\frac{F'}{f'},$$

welche Ausdrücke von $\frac{K}{k}$ man leicht in die obigen Ausdrücke von V einführen könnte.

Für das gewöhnliche achromatische und aplanatische Fernrohr ist $\varepsilon = 0$, also

$$\frac{K}{k} = \frac{F}{f} = \frac{F'}{f'}.$$

Für das dialytische Fernrohr muß man aber die obigen von ε abhängenden Ausdrücke der Größe $\frac{K}{k}$ beibehalten und in die obigen Ausdrücke der Vergrößerung V einführen.

Hieraus ergeben sich leicht die folgenden Näherungsausdrücke für die Vergrößerung des gewöhnlichen achromatischen oder aplanatischen astronomischen Fernrohrs:

$$V = \left(1+\frac{f}{\Delta}\right)\cdot\frac{F}{f} = \left(1-\frac{f'}{\Delta}\right)\cdot\frac{F}{f}$$

oder

$$V = \left(1+\frac{f}{\Delta}\right)\cdot\frac{F'}{f'} = \left(1-\frac{f'}{\Delta}\right)\cdot\frac{F'}{f'};$$

oder, wenn man $\frac{f}{\Delta}$ oder $\frac{f'}{\Delta}$ als verschwindend zu betrachten berechtigt ist:

$$V = \frac{F}{f} = \frac{F'}{f'},$$

welcher leicht in Worten auszusprechende Ausdruck in den gewöhnlichen physikalischen und ganz elementaren optischen Schriften angegeben zu werden pflegt.

§. 91.

Bei einem gewöhnlichen achromatischen oder aplanatischen astronomischen Fernrohre wollen wir jetzt den sogenannten Oeffnungshalbmesser des Objectivglases, d. h. den Halbmesser des die vordere Gränzfläche des Objectivglases einschließenden Kreises, durch Q bezeichnen, und annehmen, daß von einem in der Axe des Fernrohrs liegenden Punkte, dessen Entfernung von

Digitized by Google

dem Objectivglaſe wie gewöhnlich P ſein mag, auf den äußerſten Rand des Objectivglaſes ein Strahl falle. Soll nun dieſer Strahl, nachdem er durch das Objectivglas gegangen, noch das Ocularglas treffen oder noch von demſelben aufgefangen werden, ſo muß natürlich dem Ocularglaſe ein beſtimmter Oeffnungshalbmeſſer q gegeben werden, den wir jetzt zu beſtimmen ſuchen wollen.

Mittelſt einer ganz einfachen Betrachtung ähnlicher Dreiecke überzeugt man ſich aber auf der Stelle, daß mit Beibehaltung aller im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen wenigſtens mit großer Annäherung die Proportion

$$-\tfrac{1}{2}D - P' : \Omega = E + \tfrac{1}{2}D + P' - \tfrac{1}{2}d : q$$

oder

$$-(\tfrac{1}{2}D + P') : \Omega = \tfrac{1}{2}(D-d) + E + P' : q$$

ſtattfinden muß, und folglich

$$q = -\frac{\frac{1}{2}(D-d) + E + P'}{\frac{1}{2}D + P'}\,\Omega$$

iſt, mittelſt welcher Formel alſo die geſuchte Größe q berechnet werden könnte, wenn P' bekannt wäre, da E durch die aus dem Obigen bekannte Formel

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

jederzeit beſtimmt werden kann. Die Größe P' liefert aber die aus dem Obigen bekannte Formel

$$(P-F)(P'-F') = -K^2,$$

aus welcher auf der Stelle

$$P' = F' - \frac{K^2}{P-F}$$

folgt, und man überſieht alſo jetzt vollſtändig, wie die Größe q in allen Fällen beſtimmt werden kann.

Betrachtet man, um zu zweckmäßigen Näherungsformeln zu gelangen, D und d als verſchwindend, ſo iſt nach dem Vorhergehenden

$$q = -\frac{E+P'}{P'}\,\Omega = -\left(1 + \frac{E}{P'}\right)\Omega.$$

Ferner iſt unter dieſer Vorausſetzung nach dem Obigen

$$K = F = -F'$$

und

$$k = f = -f'.$$

Alſo iſt

$$E = f + F + \frac{F^2}{P-F} - \frac{f^2}{\Delta + f}$$

Digitized by Google

und

$$P' = -F - \frac{F^2}{P-F},$$

d. i., wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$E = \frac{FP}{P-F} + \frac{f\Delta}{\Delta+f}, \quad P' = -\frac{FP}{P-F};$$

folglich

$$E + P' = \frac{f\Delta}{\Delta+f}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$q = \frac{f}{F} \cdot \frac{\Delta}{P} \cdot \frac{P-F}{\Delta+f} \Omega$$

oder

$$q = \frac{f}{F} \cdot \frac{1-\frac{F}{P}}{1+\frac{f}{\Delta}} \Omega.$$

Kann man den Bruch $\frac{F}{P}$ als verschwindend betrachten, so ist

$$q = \frac{f}{F} \cdot \frac{\Delta}{\Delta+f} \Omega;$$

und wenn man nun auch noch den Bruch $\frac{f}{\Delta}$ als verschwindend betrachten kann, so ist

$$q = \frac{f}{F} \Omega.$$

Ist man nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$V = \left(1 + \frac{f}{\Delta}\right) \cdot \frac{F}{f} = \frac{F}{f} \cdot \frac{\Delta+f}{\Delta}$$

zu setzen berechtigt, so ist nach dem Vorhergehenden

$$q = \frac{1}{V} \Omega.$$

§. 92.

Ferner wollen wir annehmen, daß von dem durch die Coordinaten P, Q bestimmten Punkte ein Strahl auf den Mittelpunkt der vordern Gränzfläche des Objectivglases, in welchem diese Gränzfläche die Axe des Fernrohrs schneidet, falle, und wollen den Oeffnungshalbmesser q' bestimmen, welcher dem Ocularglase gegeben werden muß, wenn dasselbe noch von diesem Strahle getroffen werden soll.

Wenn man überlegt, daß die Gränzflächen des Objectivglases in seiner Mitte nahe einander parallel sind, und der im

Digitized by Google

Mittelpunkte der vordern Gränzfläche auffallende Strahl alſo nur eine ſehr geringe Brechung erleidet, ſo wird man ſich ſogleich von der wenigſtens näherungsweiſen Richtigkeit der Proportion

$$P : Q = E : q',$$

wobei Q als poſitiv angenommen worden iſt, überzeugen. Alſo iſt

$$q' = \frac{Q}{P} E,$$

oder, wenn wir

$$Q = P \tang \Theta$$

ſetzen, wo die Bedeutung von Θ leicht von ſelbſt ohne weitere Erläuterung erhellen wird,

$$q' = E \tang \Theta.$$

und, wenn Θ ſehr klein iſt, näherungsweiſe

$$q' = E\Theta.$$

Weil nun nach dem Obigen bekanntlich

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

iſt, ſo iſt

$$q' = \left(f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}\right) \tang \Theta$$

oder

$$q' = \left(f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}\right) \Theta.$$

Betrachtet man aber die Dicken als verſchwindend, ſo iſt nach dem Obigen

$$E = \frac{FP}{P - F} + \frac{f\Delta}{\Delta + f},$$

und folglich

$$q' = \left(\frac{FP}{P - F} + \frac{f\Delta}{\Delta + f}\right) \tang \Theta$$

oder

$$q' = \left(\frac{FP}{P - F} + \frac{f\Delta}{\Delta + f}\right) \Theta.$$

Auch iſt

$$q' = \left(\frac{F}{1 - \frac{F}{P}} + \frac{f}{1 + \frac{f}{\Delta}}\right) \tang \Theta$$

oder

$$q' = \left(\frac{F}{1 - \frac{F}{P}} + \frac{f}{1 + \frac{f}{\Delta}}\right) \Theta.$$

Digitized by Google

Ist nun P sehr groß, so daß der Bruch $\frac{F}{P}$ als verschwindend betrachtet werden kann, so ist näherungsweise

$$q' = \left(F + \frac{f\Delta}{\Delta + f}\right) \text{tang } \Theta$$

oder

$$q' = \left(F + \frac{f\Delta}{\Delta + f}\right) \Theta;$$

und kann man nun auch den Bruch $\frac{f}{\Delta}$ als verschwindend betrachten, so ist

$$q' = (F + f) \text{ tang } \Theta$$

oder

$$q' = (F + f)\ \Theta.$$

Ist man

$$V = \left(1 + \frac{f}{\Delta}\right) \cdot \frac{F}{f} = F \cdot \frac{\Delta + f}{f\Delta},$$

also

$$\frac{f\Delta}{\Delta + f} = \frac{F}{V}$$

zu setzen berechtigt, so ist

$$q' = F\left(1 + \frac{1}{V}\right) \text{tang } \Theta = F \cdot \frac{V+1}{V} \text{ tang } \Theta$$

oder

$$q' = F\left(1 + \frac{1}{V}\right) \Theta = F \cdot \frac{V+1}{V} \cdot \Theta.$$

§. 93.

Zu einem bestimmten Ausdrucke für die Helligkeit, mit welcher die Bilder dem Auge sich darstellen, gelangt man durch die folgenden Betrachtungen.

In der Axe des Fernrohrs denke man sich einen sehr kleinen Gegenstand A in der Entfernung P von dem Objectivglase, dessen Oeffnungshalbmesser wir wie in §. 91. durch Ω bezeichnen wollen. Denken wir uns jetzt zuvörderst das Objectivglas und das Auge in derselben Entfernung P von dem Objecte A, und bezeichnen die Lichtmengen, welche unter dieser Voraussetzung von A auf das Objectivglas und die Pupille des Auges, deren Oeffnungshalbmesser wir durch O bezeichnen wollen, fallen, respective durch L und L', so ist offenbar

$$L : L' = \Omega^2 \cdot \pi : O^2 \cdot \pi,$$

d. i.

$$L : L' = \Omega^2 : O^2.$$

Denken wir uns nun aber das Auge in der Lage, in welcher es den Gegenstand A oder vielmehr dessen Bild durch das

Digitized by Google

Fernrohr beschauet, und bezeichnen die Lichtmenge, welche in dieser Lage auf die Pupille des freien Auges von dem Gegenstande A fällt, durch $\mathfrak{L}$, so ist offenbar, wenn durch ω und ω' die Sehwinkel bezeichnet werden, unter denen der Halbmesser O der Pupille, aus A gesehen, in den beiden vorhergehenden Lagen des Auges erscheint:

$$L' : \mathfrak{L} = \omega : \omega'.$$

Bezeichnen wir aber die Entfernung des Auges in seiner zweiten Lage von der vordern Gränzfläche des Objectivglases durch Π, so ist offenbar

$$O = P \tang \omega = (P + \Pi) \tang \omega',$$

also

$$\tang \omega : \tang \omega' = P + \Pi : P;$$

und weil nun wegen der Kleinheit der Winkel ω und ω' jedenfalls mit großer Annäherung

$$\tang \omega : \tang \omega' = \omega : \omega'$$

gesetzt werden kann, so ist

$$\omega : \omega' = P + \Pi : P,$$

also nach dem Obigen

$$L' : \mathfrak{L} = P + \Pi : P.$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen

$$L : L' = \mathfrak{Q}^2 : O^2,$$
$$L' : \mathfrak{L} = P + \Pi : P$$

erhält man aber auf der Stelle

$$L : \mathfrak{L} = (P + \Pi)\, \mathfrak{Q}^2 : PO^2$$

oder

$$L : \mathfrak{L} = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \mathfrak{Q}^2 : O^2.$$

Von der ganzen Lichtmenge L wird natürlich auch das Bild erleuchtet, und dieselbe trifft auch, wenn nur, wie wir voraussetzen wollen, nach §. 91. der Oeffnungshalbmesser q des Oculars richtig bestimmt worden ist, das Auge, kann aber natürlich nur dann, wenn der Oeffnungshalbmesser des Oculars nicht größer ist als der Oeffnungshalbmesser der Pupille in das Auge gelangen, und ihre vollständige Wirkung auf dasselbe ausüben. Bezeichnen wir jetzt also, unter der Voraussetzung, daß diese letztere Bedingung erfüllt sei, die Vergrößerung des Fernrohrs wie früher durch V, so gelangt offenbar von jedem dem Gegenstande gleichen Theile seines Bildes die Lichtmenge $\frac{L}{V^2}$ in's Auge, und wenn wir nun die Helligkeit des mit freiem Auge

Digitized by Google

gesehenen Gegenstandes durch $\mathfrak{H}$, die Helligkeit seines durch das Fernrohr gesehenen Bildes durch H bezeichnen, natürlich bei gleicher Lage des Auges in beiden Fällen, so ist offenbar

$$\mathfrak{L} : \frac{L}{V^2} = \mathfrak{H} : H.$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen

$$L : \mathfrak{L} = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \Omega^2 : O^2,$$

$$\mathfrak{L} : \frac{L}{V^2} = \mathfrak{H} : H$$

ergiebt sich aber auf der Stelle

$$1 : \frac{1}{V^2} = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \Omega^2 \mathfrak{H} : O^2 H,$$

also

$$H = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \left(\frac{\Omega}{VO}\right)^2 \cdot \mathfrak{H},$$

und wenn man die Helligkeit $\mathfrak{H}$ des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes als Einheit der Helligkeiten annimmt:

$$H = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \left(\frac{\Omega}{VO}\right)^2.$$

Ist der Bruch $\frac{\Pi}{P}$ sehr klein und kann ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden, so ist näherungsweise

$$H = \left(\frac{\Omega}{VO}\right)^2 \cdot \mathfrak{H},$$

oder, wenn man wieder die Helligkeit $\mathfrak{H}$ des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes als Einheit der Helligkeiten annimmt:

$$H = \left(\frac{\Omega}{VO}\right)^2.$$

Man sieht hieraus, daß unter Voraussetzung derselben Oeffnungen des Objectivs und der Pupille die Helligkeit in demselben Verhältnisse abnimmt, in welchem das Quadrat der Vergrößerung zunimmt, und umgekehrt.

Den vorhergehenden Betrachtungen liegt die Voraussetzung zum Grunde, daß die Oeffnung der Pupille nicht kleiner als die Oeffnung des Oculars ist, weil nur dann alles aus dem Fernrohre heraustretende Licht in das Auge gelangen kann. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, so tritt von jedem dem Objecte gleichen Theile seines Bildes nicht die ganze Lichtmenge $\frac{L}{V^2}$, sondern nur der Theil

$$\frac{L}{V^2} \cdot \frac{O^2}{q^2}$$

Digitized by Google

derselben wirklich in's Auge, und statt der obigen Proportion

$$\mathfrak{e} : \frac{L}{V^2} = \mathfrak{H} : H$$

erhalten wir daher die Proportion

$$\mathfrak{e} : \frac{L}{V^2} \cdot \frac{O^2}{q^2} = \mathfrak{H} : H,$$

welche, mit der aus dem Obigen bekannten Proportion

$$L : \mathfrak{e} = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \mathfrak{Q}^2 : O^2$$

zusammengesetzt, zu der Proportion

$$1 : \frac{1}{V^2} \cdot \frac{O^2}{q^2} = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \mathfrak{Q}^2 \mathfrak{H} : O^2 H,$$

also zu der Gleichung

$$H = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \left(\frac{\mathfrak{Q}}{Vq}\right)^2 \cdot \mathfrak{H}$$

führt. Kann man den Bruch $\frac{\Pi}{P}$ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler vernachlässigen, so ist näherungsweise

$$H = \left(\frac{\mathfrak{Q}}{Vq}\right)^2 \cdot \mathfrak{H}.$$

Nimmt man die Helligkeit des mit freiem Auge gesehenen Gegenstandes als Einheit der Helligkeiten an, so ist

$$H = \left(1 + \frac{\Pi}{P}\right) \left(\frac{\mathfrak{Q}}{Vq}\right)^2,$$

oder, wenn der Bruch $\frac{\Pi}{P}$ ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden kann, näherungsweise

$$H = \left(\frac{\mathfrak{Q}}{Vq}\right)^2.$$

Weil bei diesen Bestimmungen der Helligkeit es vorzüglich erforderlich ist, daß der durch q bezeichnete Oeffnungshalbmesser des Oculars nach der in §. 91. gegebenen Anleitung richtig bestimmt sei, so wird dieser Oeffnungshalbmesser des Oculars dessen der Entfernung P entsprechender Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit genannt, zum Unterschiede von dem in §. 92. durch q' bezeichneten Oeffnungshalbmesser desselben, welcher im folgenden Paragraphen mit einem andern Namen belegt werden wird.

Digitized by Google

§. 94.

Durch die in §. 92. mit q' bezeichnete und zu berechnen gelehrte Größe wird offenbar wenigstens mit großer Annäherung der Oeffnungshalbmesser bestimmt, welcher dem Ocular eines astronomischen Fernrohrs gegeben werden muß, wenn durch dasselbe ein durch das Product $2P \tang \Theta$, wobei über die Bedeutung der Zeichen §. 92. zu vergleichen ist, bestimmter Theil eines in der Entfernung P vom Objectivglase befindlichen Gegenstandes soll übersehen werden können. Weil aber im vorliegenden Falle der Winkel Θ immer der Null sehr nahe kommt, so kann man unter Voraussetzung derselben Entfernung des Gegenstandes von dem Objectivglase den mit dem Fernrohre deutlich übersehbaren Theil desselben dem Winkel Θ proportional setzen; und da man nun jeden Gegenstand, welchen man durch das Fernrohr betrachtet, näherungsweise als einen mit der Entfernung des Gegenstandes von dem Objectivglase als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen ansehen kann, so pflegt man den Ausdruck des bei einer bestimmten Entfernung P des Gegenstandes von dem Objectivglase mit dem Fernrohre deutlich übersehbaren Theil dieses Kreisbogens in Graden, Minuten und Secunden, dessen Hälfte dem Ausdrucke des Winkels Θ in Graden, Minuten und Secunden gleich ist, das der Entfernung P entsprechende Gesichtsfeld des Fernrohrs, die Größe q' aber aus nun leicht begreiflichen Gründen den der Entfernung P entsprechenden Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen des Gesichtsfeldes zu nennen.

Meistens pflegt man übrigens das Gesichtsfeld des Fernrohrs und den Oeffnungshalbmesser des Oculars wegen des Gesichtsfeldes für eine als unendlich groß betrachtete Entfernung des Objects zu bestimmen, und diese Entfernung dann auch bei der Angabe des Gesichtsfeldes und der Bestimmung des Oeffnungshalbmessers des Oculars nicht weiter zu berücksichtigen.

Rücksichtlich der zur Bestimmung des Gesichtsfeldes nöthigen Gleichungen und Relationen vergleiche man §. 92.

Da das Ocular ganz wie eine Loupe wirkt und als eine solche benutzt wird, so erhellet aus der im vorhergehenden Kapitel entwickelten Theorie der Loupe auch ganz von selbst, wie die Halbmesser des Oculars am vortheilhaftesten zu bestimmen sind. Die hierzu nöthigen Formeln sind in §. 87. entwickelt worden, und sollen der Kürze wegen hier nicht wiederholt werden.

Anmerkung. Wir haben im Vorhergehenden, wie schon in der Note zu §. 89. bemerkt worden ist, der Einfachheit und Kürze wegen, immer das Auge unmittelbar hinter dem Ocularglase angenommen. Soll aber das Auge von allen durch das Objectiv gehenden Strahlen getroffen werden, so muß es, wie leicht erhellen wird, in dem Punkte der Axe des Rohrs seine Stelle erhalten, wo sich die

Digitized by Google

vordere Fläche des Objectivs abbildet, wenn man auf dieſelbe von einem leuchtenden Punkte, etwa von dem hellen Himmel, Licht fallen läßt, weshalb man dieſen Punkt auch den Ort des Auges zu nennen pflegt. Bezeichnen wir daher die gehörig als poſitiv oder negativ betrachtete Entfernung des Orts des Auges von dem Ocularglaſe durch u, ſo hat man nach dem Obigen offenbar die Gleichung

$$(E-f)(u-f') = -k^2,$$

alſo

$$u = f' - \frac{k^2}{E-f},$$

und folglich, weil, wenn man die Dicke des Oculars als verſchwindend betrachtet, bekanntlich $k = f = -f'$ iſt,

$$u = f' - \frac{f'^2}{E+f'} = \frac{Ef'}{E+f'}.$$

Die im Obigen unter der Vorausſetzung, daß das Auge ganz nahe hinter das Ocular gehalten wird, entwickelte Bedingungsgleichung

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

iſt, wenn das Auge ſeine richtige Stelle erhalten ſoll, nur näherungsweiſe richtig; führt man aber den aus dieſer Gleichung ſich ergebenden Näherungswerth von E, indem man zugleich den Bruch

$$\frac{K^2}{P-F}$$

als verſchwindend betrachtet, in den obigen Ausdruck von u ein, ſo erhält man

$$u = f' + \frac{f'^2}{F' + \frac{f'^2}{\Delta - f'}},$$

oder

$$u = f' + \frac{f'^2(\Delta - f')}{f'^2 + F'(\Delta - f')},$$

oder auch

$$u = f' \frac{f'\Delta + F'(\Delta - f')}{f'^2 + F'(\Delta - f')} = f' \frac{(f'+F')\Delta - f'F'}{f'^2 + F'(\Delta - f')}.$$

Betrachtet man näherungsweiſe noch den Bruch

$$\frac{f'^2}{\Delta - f'}$$

als verſchwindend, ſo iſt

$$u = f' + \frac{f'^2}{F'} = \frac{f'(F'+f')}{F'}.$$

Aus der Gleichung

$$f' = \frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)} = -\frac{rr'}{(n-1)(r-r')},$$

Digitized by Google

wo r negativ, r' positiv, n — 1 positiv ist, erhellet leicht, daß f' negativ ist. Weil nun auch natürlich F' unter den gemachten Voraussetzungen negativ ist, so ist

$$u = \frac{f'(F' + f')}{F'}$$

offenbar negativ, und der Ort des Auges fällt also hinter das Ocular, so daß das Auge wirklich in diese Stelle gebracht werden kann. Alle obigen Formeln würden weitläufiger geworden sein, wenn wir gleich von vorn herein den Ort des Auges in aller Strenge hätten wollen in Betrachtung ziehen, wenn dies auch ohne große Schwierigkeit möglich gewesen wäre. In ihrer obigen Gestalt sind die entwickelten Formeln, wenn man das Auge an seine richtige, durch die Theorie vorgeschriebene Stelle bringt, in der That nur Näherungsformeln, für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch aber genau genug, weshalb sie auch in den meisten optischen Schriften nur in dieser Weise entwickelt zu werden pflegen, namentlich in den vorzugsweise für den praktischen Gebrauch bestimmten Büchern. In dem vorliegenden Werke schien es daher auch, um zu große Weitläufigkeit möglichst zu vermeiden, zweckmäßig, uns die in Rede stehende Abkürzung zu gestatten.

§. 95.

An astronomischen und geodätischen Instrumenten wird sehr häufig ein astronomisches, d. h. die Gegenstände verkehrt darstellendes Fernrohr von einer von der im Vorhergehenden beschriebenen Einrichtung des astronomischen Fernrohrs in seiner ursprünglichsten und einfachsten Gestalt verschiedenen Einrichtung angebracht, von welcher man sich zuvörderst auf folgende Weise eine vorläufige allgemeine Vorstellung machen kann.

Hinter dem Objectivglase, welches wieder achromatisch, aplanatisch oder dialytisch sein kann, innerhalb der Brennweite desselben, denke man sich ein zweites Sammelglas aufgestellt, so wird dieses zweite Glas von den durch das Objectivglas gegangenen, nach dem durch dasselbe gemachten, hinter dem zweiten Glase liegenden Bilde, bevor dieses Bild wirklich zu Stande kommt, convergirenden Strahlen getroffen, und nach dem, was in §. 68. über diesen Fall gesagt worden ist, entsteht jetzt also mittelst beider Gläser hinter dem zweiten Glase ein Bild des Objects, welches kleiner ist als das von dem Objectivglase für sich gemachte Bild, in Bezug auf dieses letztere aufrecht, in Bezug auf das Object selbst also verkehrt steht, und näher als das von dem Objectivglase für sich gemachte Bild bei dem zweiten Glase liegt. Es werden also durch dieses zweite Glas, welches man wohl ein Collectivglas zu nennen pflegt, die durch das Objectivglas gegangenen Strahlen in einen kleineren Raum zusammengedrängt, und dadurch eine stärkere Erleuchtung des Bildes bewirkt. Dieses von den beiden in Rede stehenden Sammelgläsern zusammen hervorgebrachte Bild wird nun durch ein drittes hinter dem zweiten Glase, und insbesondere auch hinter

Digitized by Google

dem Bilde, aufgestelltes Sammelglas wie durch eine Loupe oder ein einfaches Mikroskop, ganz auf ähnliche Art wie bei dem im Vorhergehenden beschriebenen einfachsten astronomischen Fernrohre, betrachtet.

Rücksichtlich der Einrichtung, welche man den astronomischen Fernröhren dieser Art, die an astronomischen und geodätischen Instrumenten angebracht werden, aus bestimmten optischen Gründen, die vollständig theoretisch zu erläutern der Zweck dieses Buchs nicht gestattet, zu geben pflegt, hat man nun aber ganz vorzüglich Folgendes zu bemerken. Das zweite und dritte Glas werden nämlich in unveränderlicher Entfernung von einander in einer Röhre eingeschlossen, welche die Ocularröhre genannt wird, und in der das Objectivglas tragenden Objectivröhre verschiebbar ist, so daß sich die beiden in Rede stehenden unveränderlich mit einander verbundenen Gläser, die nun zusammen ein sogenanntes zusammengesetztes Ocular bilden, und im Folgenden auch in ihrer unveränderlichen Verbindung mit einander schlechthin das Ocular genannt werden sollen, dem Objectivglase nähern und von demselben entfernen lassen.

Bezeichnen wir nun die dem Objectivglase entsprechenden Elemente ganz auf ähnliche Art wie in den vorhergehenden Paragraphen durch große, die Elemente der beiden das Ocular bildenden Gläser dagegen durch entsprechende kleine lateinische Buchstaben, ferner die veränderliche Entfernung des Oculars, oder vielmehr des ersten der beiden dasselbe bildenden Gläser von dem Objective wie früher durch E, die unveränderliche Entfernung der beiden das Ocular bildenden Gläser durch $\mathfrak{E}$, endlich wie gewöhnlich die Weite des deutlichen Sehens durch Δ, so haben wir zuvörderst die drei folgenden Gleichungen:

$$(P - F)\,(P' - F') = -K^2,$$
$$(p - f)\,(p' - f') = -k^2,$$
$$(p_1 - f_1)\,(p_1' - f_1') = -k_1^2.$$

Offenbar ist nun aber, da P', p und auch p', p_1 denselben Punkten entsprechen:

$$p = E + P', \quad p_1 = \mathfrak{E} + p';$$

und da das Bild, welches man durch das zweite Glas wie durch eine Loupe betrachtet, nothwendig sich in der Weite des deutlichen Sehens vom Auge befinden muß, so hat man noch $p_1' = \Delta$. Macht man hiernach die gehörigen Substitutionen, so erhalten die drei obigen Gleichungen die folgende Form:

$$(P - F)\,(P' - F') = -K^2,$$
$$(P' + E - f)\,(p' - f') = -k^2,$$
$$(p' + \mathfrak{E} - f_1)\,(\Delta - f_1') = -k_1^2;$$

und aus diesen drei Gleichungen lassen sich nun offenbar die beiden Größen P' und p' eliminiren. Zu dem Ende hat man aus den beiden ersten Gleichungen:

Digitized by Google

$$P' = F - \frac{K^2}{P - F}$$

und

$$P' = f - E - \frac{k^2}{p' - f'},$$

also

$$F - \frac{K^2}{P - F} = f - E - \frac{k^2}{p' - f'};$$

und aus der dritten der drei obigen Gleichungen ergiebt sich

$$p' = f_1 - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}.$$

Also ist

$$F - \frac{K^2}{P - F} = f - E - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}},$$

folglich

$$E = f - F + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}}.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung, welche nothwendig erfüllt sein muß, wenn das Object dem durch das Fernrohr sehenden Auge mit völliger Präcision erscheinen soll. Wenn man nun das Ocular durch allmähliges Verschieben der Ocularröhre in der Objectivröhre in eine solche Entfernung von dem Objective bringt, daß das Bild dem durch das Fernrohr sehenden Auge mit völliger Deutlichkeit und Schärfe sich darstellt, so wird auf ganz ähnliche Art wie früher bei dem einfachsten astronomischen Fernrohre jederzeit auch die obige Bedingungsgleichung als erfüllt zu betrachten sein, und daß dies der Fall sei, d. h. daß bei dem Gebrauche des Fernrohrs dasselbe immer mit aller nur möglichen Genauigkeit zum deutlichen Sehen eingestellt werde, wollen wir von jetzt an wieder bei allen unsern folgenden Betrachtungen voraussetzen.

Nach den obigen vorläufigen allgemeinen Betrachtungen muß bekanntlich das erste Glas des Oculars sich innerhalb der Brennweite des Objectivs befinden. In wie fern man sich darauf verlassen kann, daß diese nothwendige Bedingung erfüllt sei, wollen wir jetzt noch etwas näher untersuchen, indem wir uns dabei jedoch der Kürze und Einfachheit wegen nur einiger bloß näherungsweise richtigen Entwickelungen bedienen.

Betrachten wir nämlich die Dicken der sämmtlichen Linsen als verschwindend, so ist

$$K = F = -F',$$
$$k = f = -f',$$
$$k_1 = f_1 = -f_1';$$

Digitized by Google

also nach dem Obigen

$$E = F + f + \frac{F^2}{P-F} - \frac{f^2}{f + f_1 - \mathfrak{E} - \frac{f_1^2}{f_1 + \Delta}};$$

und, wenn wir nun noch P so groß annehmen, daß der Bruch

$$\frac{F^2}{P-F}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachtet werden kann:

$$E = F + f - \frac{f^2}{f + f_1 - \mathfrak{E} - \frac{f_1^2}{f_1 + \Delta}},$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$E = F + f \cdot \frac{(f_1 - \mathfrak{E})\,\Delta - f_1\,\mathfrak{E}}{(f + f_1 - \mathfrak{E})\,\Delta + f_1\,(f - \mathfrak{E})}$$

ergiebt. Gewöhnlich wird nun bei diesen Fernröhren die Einrichtung so getroffen, daß

$$f : \mathfrak{E} : f_1 = 3 : 2 : 1$$

ist*). Halten wir uns daher an diesen besondern Fall, so ist $f = 3f_1$, $\mathfrak{E} = 2f_1$, und folglich nach dem Vorhergehenden, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$E = F - f \cdot \frac{2f_1 + \Delta}{f_1 + 2\Delta} = F - f \cdot \frac{1 + \frac{2f_1}{\Delta}}{2 + \frac{f_1}{\Delta}}.$$

Also ist immer $E < F$, wie es nach dem Obigen erforderlich ist. Kann man den Bruch $\frac{2f_1}{\Delta}$, folglich um so mehr auch den Bruch $\frac{f_1}{\Delta}$, ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist näherungsweise

$$E = F - \tfrac{1}{2}f.$$

Aus der allgemeinen Gleichung

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1}},$$

*) M. s. Praktische Dioptrik von J. J. Prechtl. Wien 1828. S. 187. Die Gründe, warum gerade dieses Verhältniß gewählt wird, lassen sich in diesem Werke ohne eine zu große, dessen Zwecke nicht entsprechende Weitläufigkeit, nicht zu vollständiger Deutlichkeit bringen. Es würde dazu eine vollständige Theorie des Achromatismus der Oculare erforderlich sein, welche man in dem bald erscheinenden dritten Theile meiner Optischen Untersuchungen finden wird. Uebrigens ist auch das obige Verhältniß nur näherungsweise richtig, jedoch nach Prechtl a. a. O. „für die praktische Ausführung genau genug."

Digitized by Google

erhält man, wenn man wieder die Dicken der Linsen als verschwindend betrachtet und

$$f : \mathfrak{E} : f_1 = 3 : 2 : 1$$

setzt, auch leicht

$$E = F + f + \frac{F^2}{P - F} - \frac{9f_1}{2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}.$$

Bleibt nun Δ ungeändert, so nimmt E zu oder ab, wenn P ab- oder zunimmt. Bleibt aber P ungeändert, so nimmt E zu oder ab, wenn Δ zu- oder abnimmt, wovon man sich durch ganz einfache Schlüsse sogleich überzeugen wird. Dasselbe Auge muß also das Fernrohr ausziehen oder zusammenschieben, jenachdem das Object sich nähert oder entfernt. Für dasselbe Object muß dagegen ein weitsichtiges Auge das Fernrohr ausziehen, ein kurzsichtiges Auge muß dasselbe dagegen zusammenschieben. Dies ist ganz Dasselbe, was wir in §. 89. für das einfachste und ursprünglichste astronomische Fernrohr gefunden haben.

§. 96.

Bezeichnen wir den Sehwinkel, unter welchem das freie Auge den Gegenstand erblicken würde, durch 2Φ, den Sehwinkel aber, unter welchem das letzte Bild des Objects dem durch das Fernrohr sehenden Auge erscheint, durch $2\varphi_1'$, die Vergrößerung des Fernrohrs durch V; so ist auf ganz ähnliche Art wie in §. 90. bei dem einfachsten astronomischen Fernrohre

$$V = \frac{2\varphi_1'}{2\Phi} = \frac{\varphi_1'}{\Phi}.$$

Nun ist aber offenbar in leicht verständlicher Bezeichnung

$$q_1' = \pm p_2' \tang \varphi_2'$$

und

$$Q = \pm (P + E + \mathfrak{E} - D - d - d_1) \tang \Phi,$$

also näherungsweise auf ähnliche Art wie früher

$$\left(\frac{q_1'}{Q}\right)^2 = \left(\frac{p_2'}{P + E + \mathfrak{E} - D - d - d_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varphi_1'}{\Phi}\right)^2,$$

und folglich

$$V^2 = \left(\frac{P + E + \mathfrak{E} - D - d - d_1}{p_2'}\right)^2 \cdot \left(\frac{q_1'}{Q}\right)^2.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 = -\frac{P - F}{P' - F'},$$

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = -\frac{p - f}{p' - f'},$$

$$\left(\frac{q_1}{q_1'}\right)^2 = -\frac{p_1 - f_1}{p_1' - f_1'};$$

Digitized by Google

also, weil im vorliegenden Falle offenbar $Q' = q$, $q' = q_1$ ist:

$$\left(\frac{Q}{q_1'}\right)^2 = -\frac{(P-F)(p-f)(p_1-f_1)}{(P'-F')(p'-f')(p_1'-f_1')},$$

und folglich nach dem Obigen

$$V^2 = -\left(\frac{P+E+\mathfrak{E}-D-d-d_1}{p_1'}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')(p'-f')(p_1'-f_1')}{(P-F)(p-f)(p_1-f_1)};$$

oder, weil bekanntlich $p_1' = \Delta$ ist:

$$V^2 = -\left(\frac{P+E+\mathfrak{E}-D-d-d_1}{\Delta}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')(p'-f')(\Delta-f_1')}{(P-F)(p-f)(p_1-f_1)}.$$

Bekanntlich ist aber auch

$$p = E + P', \quad p_1 = \mathfrak{E} + p';$$

also

$$V^2 = -\left(\frac{P+E+\mathfrak{E}-D-d-d_1}{\Delta}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')(p'-f')(\Delta-f_1')}{(P-F)(P'+E-f)(p'+\mathfrak{E}-f_1)}.$$

Aus den drei Gleichungen

$$(P-F)(P'-F') = -K^2,$$
$$(P'+E-f)(p'-f') = -k^2,$$
$$(p'+\mathfrak{E}-f_1)(\Delta-f_1') = -k_1^2$$

ergiebt sich

$$\frac{P'-F'}{P'+E-f} = \frac{p'-f'}{P-F}\left(\frac{K^2}{k^2}\right),$$

$$\frac{p'-f'}{p'+\mathfrak{E}-f_1} = \frac{\Delta-f_1'}{P'+E-f}\cdot\frac{k^2}{k_1^2};$$

also

$$V^2 = -\left(\frac{P+E+\mathfrak{E}-D-d-d_1}{\Delta}\right)^2 \cdot \frac{p'-f'}{P'+E-f}\cdot\left(\frac{\Delta-f_1'}{P-F}\right)^2\cdot\frac{K^2}{k_1^2}.$$

Es ist aber

$$p' = f_1 - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta-f_1'},$$

und folglich

$$p'-f' = f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta-f_1'}.$$

Ferner ist

$$P' = F' - \frac{K^2}{P-F},$$

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta-f_1'}};$$

Digitized by Google

also, wie man leicht findet:

$$P' + E - f = - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}}.$$

Folglich ist

$$\frac{p' - f'}{P' + E - f} = - k^{-2} \left(f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'} \right)^2,$$

und daher nach dem Obigen

$$V^2 = \left(\frac{P + E + \mathfrak{E} - D - d - d_1}{\Delta} \right)^2 \cdot \left(f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta - f_1'}{P - F} \right)^2 \cdot \frac{K^2}{k^2 k_1^2},$$

oder, wenn man das Vorzeichen so nimmt, daß V positiv wird:

$$V = \pm \frac{\Delta - f_1'}{\Delta} \cdot \frac{P + E + \mathfrak{E} - D - d - d_1}{P - F} \cdot \left(f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'} \right) \cdot \frac{K}{k k_1},$$

oder auch

$$V = \pm \left(1 - \frac{f_1'}{\Delta} \right) \cdot \frac{1 + \frac{E + \mathfrak{E} - D - d - d_1}{R}}{1 - \frac{F}{P}} \cdot \left(f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'} \right) \cdot \frac{K}{k k_1},$$

wo natürlich für E immer sein aus dem Obigen bekannter Werth zu setzen ist. Mit einer hier stets hinreichenden Annäherung ist aber

$$V = \pm \left(1 - \frac{f_1'}{\Delta} \right) \left(f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'} \right) \cdot \frac{K}{k k_1},$$

welcher Ausdruck die Größe E gar nicht mehr enthält.

Mit Vernachlässigung der Dicken ist bekanntlich

$$K = F = - F',$$
$$k = f = - f',$$
$$k_1 = f_1 = - f_1';$$

also

$$V = \pm \left(1 + \frac{f_1}{\Delta} \right) \left(f + f_1 - \mathfrak{E} - \frac{f_1^2}{f_1 + \Delta} \right) \cdot \frac{F}{f f_1}.$$

Für $f : \mathfrak{E} : f_1 = 3 : 2 : 1$ ergiebt sich hieraus leicht

$$V = \pm \left(1 + \frac{f_1}{\Delta} \right) \left(2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta} \right) \cdot \frac{F}{f}$$

oder

$$V = \pm \left(1 + \frac{f_1}{\Delta} \right) \left(2 - \frac{\frac{f_1}{\Delta}}{1 + \frac{f_1}{\Delta}} \right) \cdot \frac{F}{f},$$

Digitized by Google

und folglich, wenn man den Bruch $\frac{f_1}{\Delta}$ seiner Kleinheit wegen als verschwindend betrachten kann:

$$V = \frac{2F}{f}.$$

Also ist nach §. 90. die von dem Doppelocular dargebotene Vergrößerung doppelt so groß als die Vergrößerung, welche unter Voraussetzung desselben Objectivs die vordere Linse des Doppeloculars für sich als einfaches Ocular darbieten würde.

Bezeichnet man die beiden Brennweiten des Doppeloculars durch $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$, so ist nach §. 72. mit Vernachlässigung der Dicken:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\left(1-n\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)} + \frac{1}{-\mathfrak{E}} + \frac{1}{\left(1-n_1\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1'}\right)}$$

und

$$-\mathfrak{F}' = \frac{1}{\left(n_2-1\right)\left(\frac{1}{r_2'}-\frac{1}{r_1}\right)} + \frac{1}{-\mathfrak{E}} + \frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)},$$

d. i.

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1-\mathfrak{E}}} = \frac{f\left(f_1-\mathfrak{E}\right)}{f+f_1-\mathfrak{E}}$$

und

$$-\mathfrak{F}' = \frac{1}{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f-\mathfrak{E}}} = \frac{f_1\left(f-\mathfrak{E}\right)}{f+f_1-\mathfrak{E}}.$$

Also ist

$$\mathfrak{E} = \frac{ff_1-\left(f+f_1\right)\mathfrak{F}}{f-\mathfrak{F}} = \frac{ff_1+\left(f+f_1\right)\mathfrak{F}'}{f_1+\mathfrak{F}'},$$

und folglich

$$f+f_1-\mathfrak{E} = \frac{f^2}{f-\mathfrak{F}} = \frac{f_1^2}{f_1+\mathfrak{F}'}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$V = \pm\left(1+\frac{f_1}{\Delta}\right)\left(\frac{f^2}{f-\mathfrak{F}}-\frac{f_1^2}{f_1+\Delta}\right)\cdot\frac{F}{ff_1}$$

$$= \pm\left(1+\frac{f_1}{\Delta}\right)\left(\frac{f_1^2}{f_1+\mathfrak{F}'}-\frac{f_1^2}{f_1+\Delta}\right)\cdot\frac{F}{ff_1}$$

$$= \pm\left(1+\frac{f_1}{\Delta}\right)\cdot\frac{\Delta-\mathfrak{F}'}{\left(f_1+\mathfrak{F}'\right)\left(f_1+\Delta\right)}\cdot\frac{f_1F}{f}.$$

Kann man den Bruch $\frac{f_1}{\Delta}$ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler vernachlässigen, so ist

$$V = \pm\frac{fF}{f_1\left(f-\mathfrak{F}\right)} = \pm\frac{f_1F}{f\left(f_1+\mathfrak{F}'\right)}.$$

Digitized by Google

§. 97.

Die übrigen Verhältnisse lassen sich bei diesem astronomischen Fernrohre auf ganz ähnliche Art wie vorher bei dem einfachsten astronomischen Fernrohre bestimmen. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir diese nach dem, was oben über das einfachste astronomische Fernrohr gesagt worden ist, keiner Schwierigkeit unterliegenden Entwickelungen größtentheils dem Leser überlassen, und nur noch die folgenden für die Beurtheilungen der Leistungen des astronomischen Fernrohrs mit dem Doppelocular, welches wir hier betrachten, uns besonders wichtig scheinenden Bemerkungen dem Vorhergehenden hinzufügen.

Wir denken uns also auf ähnliche Art wie in §. 92. einen von dem durch die Coordinaten P, Q bestimmten Punkte ausgehenden Strahl, von welchem das Objectiv in dem Mittelpunkte seiner vordern Gränzfläche getroffen wird. Ohne merklichen Fehler werden wir annehmen können, daß dieser Strahl ungebrochen durch das Objectiv hindurchgehe. Bezeichnen wir also durch q' den Oeffnungshalbmesser, welcher der ersten Linse des Oculars gegeben werden muß, wenn dieselbe von diesem Strahle noch getroffen werden soll, so haben wir wie in §. 92. wieder die Proportion

$$P : Q = E : q',$$

also

$$q' = \frac{Q}{P} E,$$

oder, wenn wir

$$Q = P \operatorname{tang} \Theta$$

setzen, wo die Bedeutung von Θ leicht erhellen wird,

$$q' = E \operatorname{tang} \Theta,$$

und, wenn Θ sehr klein ist, näherungsweise

$$q' = E\Theta.$$

Bezeichnen wir nun ferner durch q_1' den Oeffnungshalbmesser, welcher der zweiten Linse des Oculars gegeben werden muß, wenn dieselbe von dem in Rede stehenden Strahle, nachdem derselbe durch die erste Ocularlinse gegangen, noch getroffen werden soll, so hat man, wovon man sich, wenn man nur beachtet, daß im vorliegenden Falle p' und q' negative Größen sind, mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung sogleich überzeugen wird, die Proportion

$$q' + q' : -p' = -q' - q_1' : E + p',$$

aus welcher sogleich

$$q_1' = -q' + \frac{(q' + q')(E + p')}{p'}$$

Digitized by Google

folgt. Zur Beſtimmung von E, p', q' hat man nach dem Vorhergehenden die folgenden Formeln:

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}},$$

$$p' = f_1 - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'},$$

$$q' = \frac{Q}{P} E = E \operatorname{tang} \Theta = E\Theta;$$

und man würde alſo q_1' entwickeln können, wenn noch q' bekannt wäre. Nun iſt aber nach §. 64. bekanntlich

$$\frac{Q}{Q'} = -\frac{P-F}{K}, \quad \frac{q}{q'} = -\frac{p-f}{k};$$

wenn man nur beachtet, daß das in §. 64. gebrauchte K das Entgegengeſetzte von dem im Obigen nach §. 72. gebrauchten K iſt; und folglich, weil im vorliegenden Falle offenbar $Q' = q$ iſt:

$$\frac{Q}{q'} = \frac{(P-F)(p-f)}{Kk}.$$

Bekanntlich iſt aber

$$p = E + P', \quad P' = F' - \frac{K^2}{P-F}.$$

Alſo iſt

$$q' = \frac{Kk\,Q}{\left(P-F\right)\left(E + F' - f - \frac{K^2}{P-F}\right)}$$

$$= \frac{Kk\,P \operatorname{tang} \Theta}{\left(P-F\right)\left(E + F' - f - \frac{K^2}{P-F}\right)}$$

$$= \frac{Kk \operatorname{tang} \Theta}{\left(1 - \frac{F}{P}\right)\left(E + F' - f - \frac{K^2}{P-F}\right)}$$

$$= \frac{Kk\,\Theta}{\left(1 - \frac{F}{P}\right)\left(E + F' - f - \frac{K^2}{P-F}\right)}.$$

Die vorhergehenden Formeln reichen zur Beſtimmung von q_1' hin, und es würde keine Schwierigkeit haben, die ſämmtlichen vorher entwickelten Ausdrücke in den Ausdruck von q_1' einzuführen, und denſelben in völlig entwickelter Form darzuſtellen. Der Einfachheit und Kürze wegen wollen wir jedoch jetzt nur den Fall etwas näher betrachten, wenn die Dicken der Linſen als verſchwindend betrachtet werden, und P als unendlich groß, Θ ſo klein angenommen wird, daß ohne merklichen Fehler $\operatorname{tang} \Theta = \Theta$ geſetzt werden kann. Dann iſt bekanntlich

$$K = F = -F',$$
$$k = f = -f',$$
$$k_1 = f_1 = -f_1';$$

Digitized by Google

also

$$E = F + f - \frac{f^2}{f + f_1 - \mathfrak{E} - \frac{f_1^2}{f_1 + \Delta}},$$

$$p' = f_1 - \mathfrak{E} - \frac{f_1^2}{f_1 + \Delta},$$

$$q' = E\Theta,$$

$$q' = \frac{Ff\Theta}{E - F - f},$$

$$q_1' = -q' + \frac{(q' + q')(\mathfrak{E} + p')}{p'}.$$

Setzen wir nun wieder

$$f : \mathfrak{E} ; f_1 = 3 : 2 : 1,$$

so ist

$$E = F + 3f_1 - \frac{9f_1}{2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}$$

$$= F - 3f_1 \cdot \frac{1 + \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}{2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}},$$

$$p' = -f_1 \left(1 + \frac{f_1}{f_1 + \Delta}\right),$$

$$q' = E\Theta,$$

$$q' = \frac{3Ff_1}{E - F - 3f_1}\Theta,$$

$$q_1' = -q' + \frac{(q' + q')(\mathfrak{E} + p')}{p'}.$$

Weil nun

$$E - F - 3f_1 = -\frac{9f_1}{2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}$$

ist, so ist

$$q' = -\tfrac{1}{2}F\left(2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}\right)\Theta,$$

und folglich

$$q' + q' = \left\{\tfrac{1}{2}F + \frac{Ff_1}{3(f_1 + \Delta)} - 3f_1 \cdot \frac{1 + \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}{2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}\right\}\Theta$$

$$= \left\{F \cdot \frac{1 + \frac{2f_1}{\Delta}}{3 + \frac{3f_1}{\Delta}} - 3f_1 \cdot \frac{1 + \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}{2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}}\right\}\Theta$$

$$= \left\{F \cdot \frac{2f_1 + \Delta}{3(f_1 + \Delta)} - 3f_1 \cdot \frac{2f_1 + \Delta}{f_1 + 2\Delta}\right\}\Theta;$$

Digitized by Google

auch ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\mathfrak{E}+\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}'} = -\frac{1-\frac{f_1}{f_1+\Delta}}{1+\frac{f_1}{f_1+\Delta}} = -\frac{\Delta}{2f_1+\Delta}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke in den obigen Ausdruck von q_1' ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$q_1' = \left(\tfrac{1}{2}F + \frac{3f_1\Delta}{f_1+2\Delta}\right)\Theta$$

oder

$$q_1' = \left\{\tfrac{1}{2}F + \frac{f_1}{2+\frac{f_1}{\Delta}}\right\}\Theta.$$

Betrachtet man den Bruch $\frac{f_1}{\Delta}$ als verschwindend, so ist

$$q_1' = (\tfrac{1}{2}F + \tfrac{1}{2}f_1)\,\Theta.$$

Unter der letzten Voraussetzung ist nach dem Obigen (§. 96.)

$$V = \frac{2F}{f} = \frac{2F}{3f_1},$$

also

$$F = \tfrac{1}{2}f_1 V, \quad f_1 = \frac{2F}{3V};$$

folglich

$$q_1' = \tfrac{1}{2}F\left(1+\frac{3}{V}\right)\Theta = \tfrac{1}{2}f_1\,(1+\tfrac{1}{2}V)\,\Theta.$$

Schließen wir nun alle für das einfachste astronomische Fernrohr früher gebrauchten Symbole jetzt in Parenthesen ein, so ist nach §. 90. und §. 92. unter denselben Voraussetzungen wie vorher

$$(V) = \frac{(F)}{(f)}, \quad (q') = (F)\left\{1+\frac{1}{(V)}\right\}(\Theta) = (f)\left\{1+(V)\right\}(\Theta).$$

Nach einer Regel, die in der praktischen Optik gegeben wird, darf nun der Oeffnungshalbmesser einer Linse einen bestimmten Theil ihrer Brennweite, welcher für alle Linsen derselbe ist, nicht überschreiten, wenn nicht Undeutlichkeit der Bilder entstehen soll. Setzen wir daher gleichzeitig

$$(q') = \mu(f), \quad q_1' = \mu f_1;$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\mu = \left\{1+(V)\right\}(\Theta), \quad \mu = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}V)\,\Theta;$$

also

$$2\left\{1+(V)\right\}(\Theta) = 3\,(1+\tfrac{1}{3}V)\,\Theta;$$

Digitized by Google

und folglich, wenn beide Fernröhre ein und dieselbe Vergrößerung gewähren sollen:

$$2(1+V)(\Theta) = 3(1+\tfrac{1}{3}V)\,\Theta,$$

also

$$\Theta = \frac{2(1+V)}{3+V}(\Theta),$$

oder

$$\Theta = \frac{2(V+3-2)}{V+3}(\Theta),$$

d. i.

$$\Theta = \left(2 - \frac{4}{V+3}\right)(\Theta).$$

Den in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückten Winkel 2Θ nennt man auf ähnliche Art, wie bei dem einfachsten astronomischen Fernrohre den in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückten Winkel $2(\Theta)$, das der Entfernung P entsprechende Gesichtsfeld des im Vorhergehenden betrachteten astronomischen Fernrohrs mit dem doppelten Oculare, wobei zu bemerken ist, daß auch bei diesem Fernrohre das Gesichtsfeld meistens nur für unendlich große Entfernungen bestimmt, und dann bei der Angabe des Gesichtsfeldes die Entfernung überhaupt nicht weiter berücksichtigt wird.

Aus dem Vorhergehenden erhellet nun, daß unter Voraussetzung derselben Vergrößerung, wenn dieselbe nur einigermaßen groß angenommen wird, das vorher betrachtete astronomische Fernrohr mit dem doppelten Oculare beinahe ein doppelt so großes Gesichtsfeld als das früher betrachtete einfachste astronomische Fernrohr verträgt, worin ein Hauptvorzug des ersteren Fernrohrs vor dem letzteren Fernrohre besteht.

Euler setzt die Oeffnungshalbmesser höchstens $\frac{1}{4}$ der Brennweiten; Prechtl setzt die ganzen Oeffnungen höchstens $\frac{6}{10}$ der Brennweiten, was etwas mehr ist als das Vorhergehende.

§. 98.

Es giebt auch astronomische Fernröhre mit doppelten Oculären, bei denen man aber diese doppelten Oculare eigentlich nur als aus zwei Linsen bestehende Loupen zu betrachten hat, deren Theorie schon im vorhergehenden Kapitel entwickelt worden ist. Auch ist die Theorie dieser Fernröhre selbst von der Theorie des einfachsten astronomischen Fernrohrs nicht wesentlich verschieden. Weil jedoch dergleichen Fernröhre auch bei astronomischen und geodätischen Instrumenten in Anwendung gebracht werden, so werden die folgenden Bemerkungen über dieselben nicht überflüssig sein.

Für das Objectiv haben wir die bekannte Gleichung

$$(P-F)(P'-F') = -K^2,$$

Digitized by Google

und für das doppelte Ocular gilt die folgende ganz ähnliche, leicht durch sich selbst verständliche Gleichung

$$(\mathfrak{P}-\mathfrak{F})\,(\mathfrak{P}'-\mathfrak{F}') = -\mathfrak{K}^2.$$

Nun ist aber offenbar

$$\mathfrak{P} = E + P',$$

und der Gebrauch des Fernrohrs erfordert, daß

$$\mathfrak{P}' = \Delta$$

sei, wo Δ wie gewöhnlich die Weite des deutlichen Sehens bezeichnet. Also haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$(P-F)\,(P'-F') = -K^2,$$

$$(P'+E-\mathfrak{F})\,(\Delta-\mathfrak{F}') = -\mathfrak{K}^2.$$

Daher ist

$$P' = F' - \frac{K^2}{P-F},$$

$$P' = \mathfrak{F} - E - \frac{\mathfrak{K}^2}{\Delta-\mathfrak{F}'};$$

folglich

$$F' - \frac{K^2}{P-F} = \mathfrak{F} - E - \frac{\mathfrak{K}^2}{\Delta-\mathfrak{F}'},$$

oder

$$E = \mathfrak{F} - F' + \frac{K^2}{P-F} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\Delta-\mathfrak{F}'}.$$

Diese Gleichung wird durch die genaue Einstellung des Fernrohrs erfüllt.

Bezeichnen wir die als negativ betrachtete Dicke des ganzen doppelten Oculars durch $\mathfrak{D}$, und haben φ' und Φ ähnliche Bedeutungen wie früher, so ist

$$\mathfrak{Q}' = \pm\,\mathfrak{P}'\,\mathrm{tang}\,\varphi',$$

$$Q = \pm\,(P+E-D-\mathfrak{D})\,\mathrm{tang}\,\Phi;$$

also näherungsweise

$$\left(\frac{\mathfrak{Q}'}{Q}\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{P}'}{P+E-D-\mathfrak{D}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varphi'}{\Phi}\right)^2,$$

oder

$$\left(\frac{\varphi'}{\Phi}\right)^2 = \left(\frac{P+E-D-\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}'}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{Q}'}{Q}\right)^2,$$

d. i., wenn die Vergrößerung des Fernrohrs wie gewöhnlich durch V bezeichnet wird:

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}'}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{Q}'}{Q}\right)^2.$$

Digitized by Google

Bekanntlich ist aber

$$\left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P'-F'},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}\right)^2 = -\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{F}}{\mathfrak{P}'-\mathfrak{F}};$$

folglich, weil im vorliegenden Falle natürlich $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$ ist:

$$\left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}\right)^2 = \frac{(P-F)(\mathfrak{P}-\mathfrak{F})}{(P'-F')(\mathfrak{P}'-\mathfrak{F}')}.$$

Also ist

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}'}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')(\mathfrak{P}'-\mathfrak{F}')}{(P-F)(\mathfrak{P}-F)},$$

d. i.

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-\mathfrak{D}}{\Delta}\right)^2 \cdot \frac{(P'-F')(\Delta-\mathfrak{F}')}{(P-F)(P'+E-\mathfrak{F})}.$$

Weil aber unter Voraussetzung richtiger Einstellung des Fernrohrs

$$(P-F)(P'-F') = -K^2,$$

$$(P'+E-\mathfrak{F})(\Delta-\mathfrak{F}') = -\mathfrak{K}^2$$

ist, so ist

$$\frac{P'-F'}{P'+E-\mathfrak{F}} = \frac{\Delta-\mathfrak{F}}{P-F} \cdot \frac{K^2}{\mathfrak{K}^2};$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$V^2 = \left(\frac{P+E-D-\mathfrak{D}}{\Delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta-\mathfrak{F}}{P-F}\right)^2 \cdot \frac{K^2}{\mathfrak{K}^2}$$

oder

$$V = \pm \frac{\Delta-\mathfrak{F}}{\Delta} \cdot \frac{P+E-D-\mathfrak{D}}{P-F} \cdot \frac{K}{\mathfrak{K}},$$

oder auch

$$V = \pm \left(1-\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) \cdot \frac{1+\frac{E-D-\mathfrak{D}}{P}}{1-\frac{F}{P}} \cdot \frac{K}{\mathfrak{K}};$$

also für ein unendlich großes P näherungsweise

$$V = \pm \left(1-\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) \cdot \frac{K}{\mathfrak{K}}.$$

Betrachten wir die Dicken der Linsen als verschwindend, und ist das Objectiv ein gewöhnliches achromatisches oder aplanatisches Objectiv, so ist bekanntlich

$$K = F = -F';$$

und nach §. 90 ist, wenn E die als positiv betrachtete Entfer-

Digitized by Google

nung der beiden das Ocular bildenden Linsen von einander bezeichnet:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{F}}{1 + \left(w_1 - 1\right)\mathfrak{E}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)} = -\frac{\mathfrak{F}}{1 + \left(w - 1\right)\mathfrak{E}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}.$$

Ist aber die Entfernung $\mathfrak{E}$ so klein, daß dieselbe ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachtet werden kann, was bei diesen Fernröhren meistens der Fall ist, so ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{F} = -\mathfrak{F};$$

also nach dem Obigen

$$V = \left(1 + \frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) \cdot \frac{F}{\mathfrak{F}};$$

und, wenn man den Bruch $\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}$ als verschwindend zu betrachten berechtigt ist,

$$V = \frac{F}{\mathfrak{F}}.$$

Diese letztere Formel stimmt ganz mit der Formel überein, durch welche unter denselben Voraussetzungen wie vorher die Vergrößerung des einfachsten astronomischen Fernrohrs bestimmt wird (§. 90.), wenn man nur das doppelte Ocular ganz wie ein einfaches Ocular behandelt.

Auf noch weitere Entwickelungen über diesen Gegenstand einzugehen, gestattet der Zweck dieses Werkes nicht.

§. 99.

Es ist nun noch Etwas über das sogenannte Diaphragma zu sagen, welches in den astronomischen Fernröhren angebracht zu werden pflegt, und dazu dient, die der Deutlichkeit des Bildes schädlichen, überhaupt alle zur Darstellung des Bildes nicht unmittelbar und unbedingt erforderlichen Lichtstrahlen abzuhalten. Dieses Diaphragma besteht in einem kreisrunden Ringe, wird unter Voraussetzung aus einer unendlich großen Entfernung kommender Lichtstrahlen an der Stelle angebracht, wo das wirkliche Bild, welches durch das letzte Ocular wie durch eine Loupe betrachtet wird, entsteht, und erhält einen der Größe dieses Bildes gleichen Durchmesser, wodurch also die allgemeinen Principien festgestellt sind, nach denen die Stelle und die Größe des Diaphragma bestimmt werden müssen.

Für das einfachste astronomische Fernrohr und die in §. 98. betrachtete Einrichtung des astronomischen Fernrohrs mit einem doppelten Ocular haben wir nach dem Obigen zur Bestimmung der Stelle und Größe des in Rede stehenden Bildes, dessen Stelle und Größe die Stelle und Größe des Diaphragma entsprechen müssen, die folgenden Gleichungen:

$$(P - F)(P' - F') = -K^2$$

Digitized by Google

und

$$\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 = -\frac{P-F}{P'-F'}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$P' = F' - \frac{K^2}{P-F},$$

und folglich, wenn P als unendlich groß angenommen wird:

$$P' = F',$$

also, wenn man die Dicken der Linsen als verschwindend betrachtet:

$$P' = -F,$$

wodurch die Stelle des Diaphragma bestimmt ist.

Weil vermöge der ersten Gleichung

$$P' - F' = -\frac{K^2}{P-F}$$

ist, so folgt aus der zweiten Gleichung:

$$\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 = \left(\frac{K}{P-F}\right)^2,$$

also, wenn wir jetzt Q und Q' als positiv annehmen, unter Voraussetzung verschwindender Dicken der Linsen und einer unendlich großen Entfernung des Objects:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{F}{P-F},$$

oder

$$Q' = Q \cdot \frac{F}{P-F} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{F}{1-\frac{F}{P}}.$$

Die weitere Entwickelung dieser Formel wollen wir uns hier nur für das gewöhnliche astronomische Fernrohr mit dem einfachen Ocular zu geben begnügen. Nach §. 92. ist für dieses Fernrohr mit einer hier hinreichenden Annäherung

$$Q = P\Theta, \text{ also } \frac{Q}{P} = \Theta;$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$Q' = \frac{F\Theta}{1-\frac{F}{P}};$$

also für ein unendlich großes P:

$$Q' = F\Theta.$$

Nun ist aber nach §. 92. ferner

$$q' = F \cdot \frac{V+1}{V} \cdot \Theta,$$

Digitized by Google

also

$$F\Theta = \frac{q'V}{V+1},$$

und folglich

$$Q' = \frac{q'V}{V+1}.$$

Setzt man aber $q' = \mu f$, wo die Bedeutung der Größe μ aus §. 97. bekannt ist, so wird

$$Q' = \frac{\mu V f}{V+1}.$$

Weil nun

$$V = \left(1 + \frac{f}{\Delta}\right)\cdot\frac{F}{f} = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\Delta}\right)F$$

ist, so ist

$$\frac{1}{f} = \frac{V}{F} - \frac{1}{\Delta},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$Q' = \frac{\mu V}{\left(V+1\right)\left(\frac{V}{F} - \frac{1}{\Delta}\right)},$$

oder

$$Q' = \frac{\mu V F}{\left(V+1\right)\left(V - \frac{F}{\Delta}\right)},$$

oder

$$Q' = \frac{\mu F}{\left(V+1\right)\left(1 - \frac{F}{\Delta}\cdot\frac{1}{V}\right)};$$

also, wenn man $\frac{F}{\Delta}\cdot\frac{1}{V}$ als verschwindend zu betrachten berechtigt ist:

$$Q' = \frac{\mu F}{V+1},$$

welches die gewöhnliche Formel zur Bestimmung des Halbmessers des Diaphragma ist.

Bei dem in §. 95. betrachteten astronomischen Fernrohre mit dem doppelten Ocular haben wir zuerst zur Bestimmung der Stelle des Diaphragma die folgenden Gleichungen:

$$(P - F)\,(P' - F') = -K^2,$$
$$(p - f)\,(p' - f') = -k^2.$$

Also ist

$$p' = f' - \frac{k^2}{p - f},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$p = E + P'$$

ist:

$$p' = f' - \frac{k^2}{E + P' - f}.$$

Digitized by Google

Weil nun

$$P' = F' - \frac{K^2}{P - F},$$

und folglich für ein unendlich großes P

$$P' = F'$$

ist, so ist

$$p' = f' - \frac{k^2}{E + F' - f}.$$

Nun ist aber für ein unendlich großes P

$$E = f - F' - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}},$$

also

$$E + F' - f = - \frac{k^2}{f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}},$$

und daher

$$p' = f' + \left(f_1 - f' - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}\right),$$

d. i.

$$p' = f_1 - \mathfrak{E} - \frac{k_1^2}{\Delta - f_1'}.$$

Unter Voraussetzung verschwindender Dicken ist

$$p' = f_1 - \mathfrak{E} + \frac{f_1^2}{\Delta + f_1},$$

und, wenn wir wieder $\mathfrak{E} = 2f_1$ setzen:

$$p' = - f_1 - \frac{f_1^2}{\Delta + f_1} = - f_1 \left(1 + \frac{f_1}{f_1 + \Delta}\right)$$

oder

$$p' = - f_1 \cdot \frac{2f_1 + \Delta}{f_1 + \Delta} = - f_1 \cdot \frac{1 + \frac{2f_1}{\Delta}}{1 + \frac{f_1}{\Delta}}.$$

Kann man aber ohne merklichen Fehler den Bruch $\frac{2f_1}{\Delta}$, und also auch den Bruch $\frac{f_1}{\Delta}$ als verschwindend betrachten, so ist näherungsweise $p' = - f_1$ oder $p' = - \frac{1}{2}\mathfrak{E}$, wo man nur zu beachten hat, daß p' von der vordern Linse des Oculars an gerechnet ist. Dieses Resultat ließ sich auch ohne die vorhergehende Rechnung voraussehen.

Ferner ist nach §. 97., wenn wir q' jetzt als positiv betrachten:

$$q' = \frac{1}{2} F \left(2 - \frac{f_1}{f_1 + \Delta}\right) \Theta$$

Digitized by Google

oder

$$q' = \tfrac{1}{2}F\left(2 - \frac{\frac{f_1}{\Delta}}{1+\frac{f_1}{\Delta}}\right)\Theta$$

und

$$q_1' = \left(\tfrac{1}{2}F + \frac{3f_1}{2+\frac{f_1}{\Delta}}\right)\Theta;$$

alſo

$$\frac{q'}{q_1'} = \tfrac{1}{2}F \cdot \frac{2 - \frac{\frac{f_1}{\Delta}}{1+\frac{f_1}{\Delta}}}{\tfrac{1}{2}F + \frac{3f_1}{2+\frac{f_1}{\Delta}}},$$

oder, wenn wir $q_1' = \mu f_1$ ſetzen:

$$q' = \tfrac{1}{2}\mu F f_1 \cdot \frac{2 - \frac{\frac{f_1}{\Delta}}{1+\frac{f_1}{\Delta}}}{\tfrac{1}{2}F + \frac{3f_1}{2+\frac{f_1}{\Delta}}}.$$

Kann man aber den Bruch $\frac{f_1}{\Delta}$ als verſchwindend betrachten, ſo iſt

$$q' = \frac{\frac{1}{2}\mu F f_1}{\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}f_1}.$$

Unter derſelben Vorausſetzung iſt aber nach §. 97.

$$V = \frac{2F}{3f_1}, \text{ alſo } f_1 = \frac{2F}{3V}$$

und folglich, wie man nach gehöriger Subſtitution leicht findet:

$$q' = \frac{4\mu F}{3(V+3)}.$$

Digitized by Google

Achtzehntes Kapitel.

Von dem Galilei'schen Fernrohre.

§. 100.

Das nach dem berühmten Galilei, seinem Erfinder*), benannte Galilei'sche Fernrohr besteht aus einem Sammelglase als Objectivglas, welches natürlich am Besten achromatisch, aplanatisch oder dialytisch ist, aber auch bei geringerer Vollkommenheit einfach sein kann, und einem Zerstreuungsglase als Ocularglas, beide Gläser natürlich auf einer gemeinschaftlichen Axe mit einander verbunden, ganz in ähnlicher Weise wie bei dem im vorhergehenden Kapitel ausführlich betrachteten astronomischen oder Kepler'schen Fernrohre. Da das Galilei'sche Fernrohr von weit geringerer Bedeutung wie das Kepler'sche Sternrohr ist, und seine Einrichtung wohl hauptsächlich nur noch bei den bekannten kleinen Fernröhren, die man Theaterperspective zu nennen pflegt, in Anwendung gebracht wird; so wird es genügen, seine Theorie im Folgenden nur nach ihren Hauptmomenten ganz in der Kürze zu entwickeln, ein Verfahren, welches wir, um dieses Werk nicht zu sehr auszudehnen, und zu weit von seiner eigentlichen Bestimmung, nach welcher es sich hauptsächlich nur auf die Elemente der mathematischen Physik beschränken, also nicht zugleich ein vollständiges System der Optik liefern soll, zu entfernen, auch bei allen übrigen optischen Instrumenten, von denen im Folgenden noch die Rede sein wird, befolgen werden, indem diese Instrumente für die praktischen Zwecke, denen dieses Werk hauptsächlich gewidmet ist, von weit geringerer Wichtigkeit sind wie das Kepler'sche Sternrohr, welches namentlich bei allen zur genauen Winkelmessung bestimmten Instrumenten in Anwendung gebracht zu werden pflegt, weshalb wir uns auch über dasselbe so ausführlich wie im vorhergehenden Kapitel verbreitet haben.

§. 101.

Nach einer ganz ähnlichen, und deshalb hier nicht zu wiederholenden Betrachtung wie in §. 89. bei dem astronomischen

*) Früher als von Galilei soll dieses Fernrohr jedoch schon von einem gewissen Jansen, einem Brillenmacher in Middelburg in Holland, zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts, wohl nur durch Zufall erfunden worden sein, weshalb dasselbe auch das holländische Fernrohr genannt wird. Galilei ist dagegen zu seiner Erfindung auf dem Wege der Theorie und des Nachdenkens gelangt, weshalb dasselbe am Besten nach ihm benannt wird.

Digitized by Google

Fernrohre, indem man zugleich allen Symbolen die ihnen dort beigelegten Bedeutungen läßt, erhält man auch für das Galilei'sche Fernrohr die Bedingungsgleichung

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'},$$

welche auf mechanische Weise jederzeit dadurch erfüllt wird, daß man die das Ocularglas tragende Röhre in der das Objectivglas tragenden Röhre so lange verschiebt, bis das Auge des Beobachters den zu betrachtenden Gegenstand mit aller nur möglichen Deutlichkeit und Präcision erblickt, so daß wir also diese Bedingungsgleichung im Folgenden immer als erfüllt voraussetzen können.

Uebrigens wird es bei dem Gebrauche des Fernrohrs stets verstattet sein, den Bruch

$$\frac{K^2}{P - F}$$

wegen seiner Kleinheit näherungsweise als verschwindend zu betrachten, wodurch die obige Bedingungsgleichung die einfachere Gestalt

$$E = f - F' - \frac{k^2}{\Delta - f'}$$

annimmt.

Bekanntlich ist, wenn man die Dicke des Oculargla[s]es, wie wir hier der Kürze wegen thun wollen, als verschwindend betrachtet,

$$f = -\frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)} = \frac{rr'}{(n-1)(r-r')},$$

$$f' = \frac{1}{\left(n-1\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)} = -\frac{rr'}{(n-1)(r-r')};$$

also $f = -f'$ (m. s. z. B. §. 70.); und wenn wir nun der Kürze und Einfachheit wegen nur den Fall eines doppelt concaven Oculargla[s]es in's Auge fassen, so ist r positiv und r' negativ, wobei man zu beachten hat, daß r, r' als die Abscissen der Mittelpunkte der entsprechenden Gränzflächen des Oculargla[s]es in Bezug auf deren Durchschnittspunkte mit der Axe des Rohrs als Anfangspunkte der Abscissen zu betrachten sind, und daß nach §. 89. die positive Richtung in der Axe des Rohrs von dem Ocularglase nach dem Objectivglase hin genommen wird. Also ist offenbar rr' eine negative, $r - r'$ eine positive Größe, folglich, weil nahe $n = 1,5$ also n größer als die Einheit ist, f negativ und f' positiv. Nehmen wir nun bloß an, daß $\Delta > f'$ sei, so ist der Bruch

$$\frac{k^2}{\Delta - f'}$$

positiv, und folglich

$$E < f - F'.$$

Digitized by Google

Wäre Δ so groß, daß sich der Bruch

$$\frac{k^2}{\Delta - f'}$$

ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten ließe, eine Voraussetzung, welche fast allgemein in den optischen Lehrbüchern der Betrachtung zum Grunde gelegt wird, so erhielte man aus dem Obigen die näherungsweise richtige Gleichung

$$E = f - F',$$

welche der in §. 89. am Ende für das astronomische Fernrohr bewiesenen Näherungsgleichung ganz analog ist.

Stellt man die Ungleichung

$$E < f - F'$$

unter der Form

$$E < (-F') - (-f) \text{ oder } E < (-F') - f'$$

dar, wo $-F'$ und $-f = f'$ positive Größen sind, so erhellet, daß bei dem Galilei'schen Fernrohre das Ocularglas immer zwischen dem Objectivglase und dem von diesem letzteren gemachten Bilde des Objects liegt, so daß also dieses Bild bei dem Galilei'schen Fernrohre gar nicht wirklich zur Entstehung kommt, indem die nach demselben convergirenden Strahlen bei ihrem Durchgange durch das Ocularglas, bevor das in Rede stehende Bild zur Entstehung kommt, eine neue Brechung erleiden.

Weil ferner nach §. 89.

$$(P - F)(P' - F') = -K^2,$$

also

$$P' - F' = -\frac{K^2}{P - F},$$

ist, so ist nach der obigen Bedingungsgleichung

$$P' - F' = f - F' - E - \frac{k^2}{\Delta - f'},$$

also

$$P' = f - E - \frac{k^2}{\Delta - f'},$$

und folglich, weil nach §. 89.

$$p = E + P'$$

ist,

$$p = f - \frac{k^2}{\Delta - f'},$$

also, da der Bruch

$$\frac{k^2}{\Delta - f'}$$

nach dem Obigen positiv ist,

$$p < f,$$

und folglich, weil bekanntlich f negativ ist, p gleichfalls negativ, und sein absoluter Werth größer als der absolute Werth von f,

Digitized by Google

woraus man schließt, daß das von dem Objectivglase gemachte Bild des Objects, wenn es wirklich zur Entstehung käme, mit dem Auge des Beobachters auf derselben Seite des Ocularglases liegen, und von demselben weiter als sein auf derselben Seite liegender Brennpunkt entfernt sein würde.

§. 102.

Für die dem Objectivglase und dem Ocularglase entsprechenden Bilder des Objects hat man in leicht durch sich selbst verständlicher Bezeichnung nach §. 64. (vergl. §. 97.) die Gleichungen

$$\frac{q}{q'} = -\frac{p-f}{k} = \frac{k}{p'-f'},$$

oder, weil, wenn man die Dicke der Ocularlinse wie vorher als verschwindend betrachtet, nach dem Obigen $k = f = -f'$ ist,

$$\frac{q}{q'} = \frac{f-p}{f} = \frac{f'}{f'-p'}.$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen f negativ und $p < f$, also $f-p$ positiv ist, so ist der Bruch

$$\frac{q}{q'} = \frac{f-p}{f}$$

negativ, q und q' haben also entgegengesetzte Vorzeichen, und das Bild des Oculars steht folglich in Beziehung auf das Bild des Objectivs verkehrt. Weil aber das Bild des Objectivs in Bezug auf das Object selbst bekanntlich verkehrt steht, so steht das Bild des Oculars, welches unmittelbar zur Beschauung mit dem Auge gebracht wird, in Beziehung auf das Object selbst aufrecht, und das Galilei'sche Fernrohr stellt daher die Gegenstände aufrecht dar, durch welche Eigenschaft hauptsächlich die zweckmäßige Anwendung desselben zur Beschauung terrestrischer Gegenstände bedingt wird.

§. 103.

Ist Q der Halbmesser des Objects, so ist in leicht verständlicher Bezeichnung

$$Q = (P + E)\,\mathrm{tang}\,\Phi = (P + E)\,\Phi$$

und

$$q' = p'\,\mathrm{tang}\,\varphi' = \Delta\varphi',$$

also

$$\frac{q'}{Q} = \frac{\Delta\varphi'}{(P+E)\,\Phi}, \quad \frac{\varphi'}{\Phi} = \frac{(P+E)\,q'}{\Delta Q}.$$

Digitized by Google

Der Bruch $\frac{\varphi'}{\Phi}$ ist die Vergrößerung des Fernrohrs, und soll durch V bezeichnet werden, so daß also

$$V = \frac{\varphi'}{\Phi} = \frac{(P + E)\, q'}{\Delta Q}$$

ist. Nun ist aber

$$Q : q = P : P', \text{ also } Q = \frac{qP}{P'}$$

und folglich

$$V = \frac{P'\, q'}{\Delta q}\left(1 + \frac{E}{P}\right) = \frac{P'\, q'}{\Delta q},$$

wenn man $\frac{E}{P}$ als verschwindend betrachtet. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist

$$\frac{q'}{q} = \frac{f}{f - p},$$

also

$$V = \frac{fP'}{\Delta (f - p)}.$$

Weil nun

$$(P - F)\,(P' - F') = -K^2$$

ist, so ist

$$P' - F' = -\frac{K^2}{P - F},$$

und folglich, wenn man den Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wegen der beträchtlichen Größe von P als verschwindend betrachtet, $P' = F'$, also

$$V = \frac{fF'}{\Delta (f - p)}$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist

$$f - p = \frac{ff'}{f' - p'} = \frac{ff'}{f' - \Delta},$$

also

$$V = \frac{F'}{f'} \cdot \frac{f' - \Delta}{\Delta} = -\frac{F'}{f'}\left(1 - \frac{f'}{\Delta}\right),$$

und, wenn man den Bruch $\frac{f'}{\Delta}$ als verschwindend zu betrachten berechtigt ist,

$$V = -\frac{F'}{f'} = \frac{F'}{f}.$$

§. 104.

Die Oeffnung des Oculars macht man bei dem Galilei'schen Fernrohre, wo immer das Auge ganz nahe an das Ocular gehalten werden muß, der Oeffnung der Pupille gleich, und

Digitized by Google

bezeichnen wir nun den Oeffnungshalbmesser der Pupille durch O, so ist offenbar wenigstens näherungsweise das halbe Gesichtsfeld des Fernrohrs $\frac{O}{E}$, d. i., weil nach dem Obigen

$$E = f - F' - \frac{k^2}{\Delta - f'} = f - F' - \frac{f^2}{\Delta + f}$$

oder

$$E = \frac{\Delta f}{\Delta + f} - F' = \frac{\Delta(f - F') - fF'}{\Delta + f}$$

ist,

$$\frac{(\Delta + f)\,O}{\Delta(f - F') - fF'}.$$

Betrachtet man den Bruch $\frac{k^2}{\Delta - f'}$ als verschwindend, so ist

$$\frac{O}{f - F'}$$

das halbe Gesichtsfeld.

Anmerkung. Auf ganz ähnliche Art wie in der Anmerkung zu §. 94. erhält man für den Ort des Auges die Näherungsformel

$$u = \frac{f'(F' + f')}{F'}.$$

Nun ist aber im vorliegenden Falle f' positiv und F' wie gewöhnlich negativ. Da ferner wegen der Formel

$$V = -\frac{F'}{f'}$$

für die Vergrößerung, wenn, wie es der Zweck des Fernrohrs erfordert, eine wirkliche Vergrößerung stattfinden soll, nothwendig der absolute Werth von F' größer als f' sein muß, so ist auch $F' + f'$ negativ, und folglich, weil der Bruch $\frac{f'}{F'}$ negativ ist, offenbar u positiv, woraus sich ergiebt, daß bei dem Galilei'schen Fernrohre der nach dem in der Anmerkung zu §. 94. angegebenen Princip bestimmte richtige Ort des Auges zwischen das Objectivglas und das Ocularglas fällt, so daß also das Auge gar nicht in diesen Punkt gebracht werden kann, und daher nichts weiter übrig bleibt, als daß man das Auge dem Ocularglase hinter demselben so nahe wie irgend möglich bringt.

Digitized by Google

Neunzehntes Kapitel.

Von dem terrestrischen oder Rheita'schen Fernrohre.

§. 105.

Da das von dem Jesuiten de Rheita im ersten Viertel des siebzehnten Jahrhunderts angegebene terrestrische Fernrohr oder Erdfernrohr zu eigentlich wissenschaftlichen Zwecken gar nicht gebraucht, namentlich an zu solchen Zwecken bestimmten Instrumenten nie angebracht wird, seine Theorie aber, wenn sie mit einiger Gründlichkeit durchgeführt werden soll, ziemlich weitläufig ausfällt, wenn auch in den vorhergehenden Kapiteln alle dazu nöthigen Formeln entwickelt worden sind: so wird es, um dieses Werk nicht zu weit auszudehnen, genügen, hier nur einen allgemeinen Begriff von diesem Fernrohre zu geben.

§. 106.

Das terrestrische Fernrohr oder das Erdfernrohr von de Rheita besteht aus einer Sammellinse als Objectivglas, die auf gewöhnliche Weise in der Objectivröhre befestigt ist, und aus drei Sammellinsen als Oculären, die in der Ocularröhre, welche in der Objectivröhre verschiebbar ist, auf einer gemeinschaftlichen Axe unveränderlich mit einander verbunden sind. Die drei Oculare, von denen wir das, welches dem Objectivglase am nächsten ist, das erste, das, welches dem Auge am nächsten ist, das dritte, und das mittlere zwischen beiden das zweite Ocular nennen werden, sind gewöhnlich einander völlig gleich, und haben insbesondere alle drei dieselben Brennweiten, was wir daher auch hier der Einfachheit wegen annehmen werden. Dieselben sind um die Doppelten ihrer einander gleichen Brennweiten von einander entfernt*), und stehen daher sämmtlich gleich weit von einander ab.

Denken wir uns nun die Ocularröhre so weit in die Objectivröhre hineingeschoben, daß der vordere Brennpunkt des ersten Oculars mit dem Brennpunkte des Objectivs zusammenfällt, so entspricht dem ersten Oculare von einem unendlich weit von dem Objectivglase entfernten, vor demselben liegenden Gegenstande ein vor dem ersten Oculare liegendes, unendlich weit von demselben entferntes, in Bezug auf den Gegenstand verkehrt stehendes Bild, und die durch das erste Ocular gehenden Strah-

*) Ich folge hierbei Hugenii Dioptrica. Prop. LIV.

Digitized by Google

len fallen also auf das zweite Ocular eben so, als wenn sie von einem vor demselben liegenden, unendlich weit entfernten Gegenstande, nämlich von dem, dem ersten Oculare entsprechenden verkehrt stehenden Bilde des vor dem Objectivglase in unendlicher Entfernung von demselben befindlichen Gegenstandes, kämen. Weil nun das zweite und dritte Ocular um das Doppelte ihrer einander gleichen Brennweiten von einander entfernt sind, so sieht das durch das dritte Ocular schauende Auge offenbar ein vor diesem Oculare liegendes, unendlich weit von demselben entferntes aufrecht stehendes Bild des Gegenstandes, welches augenblicklich erhellet, wenn man nur überlegt, daß dieses Bild gegen den entsprechenden Gegenstand, welcher hier das selbst verkehrt stehende Bild des vor dem Objectivglase liegenden Gegenstandes ist, verkehrt, gegen den vor dem Objectivglase liegenden Gegenstand selbst also aufrecht steht. Diese Eigenschaft des aus einem Objectivglase und drei Ocularen bestehenden Rheita'schen Fernrohrs, daß dasselbe nämlich die Gegenstände aufrecht darstellt, macht dieses Fernrohr, welches zugleich ein größeres Gesichtsfeld als das die Gegenstände gleichfalls aufrecht darstellende Galilei'sche Fernrohr gestattet, zum Beschauen von Gegenständen auf der Erde besonders geschickt, und ist die Ursache gewesen, daß man dasselbe vorzugsweise das terrestrische Fernrohr oder das Erdfernrohr genannt hat.

Da wenigstens nach der vorher gemachten Voraussetzung eine Verschiedenheit der drei Oculare nicht stattfindet, so erhellet, mit Rücksicht auf die vorhergehende allgemeine Darstellung der Natur des terrestrischen Fernrohrs, durch eine ganz einfache Betrachtung, bei der man sich nur zu erinnern hat, daß man unter der Vergrößerung eines nur aus zwei Sammellinsen bestehenden astronomischen Fernrohrs den Bruch versteht, welchen man erhält, wenn man den Winkel, unter welchem das dem Ocular entsprechende Bild des Objects dem durch das Ocular schauenden Auge sich darstellt, durch den Winkel dividirt, unter welchem das Object dem freien Auge erscheint, und daß dieser Bruch wenigstens näherungsweise dem Bruche gleich ist, welchen man erhält, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Oculars dividirt, — daß bei dem Rheita'schen terrestrischen Fernrohre die Vergrößerung erhalten wird, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die gemeinschaftliche Brennweite der drei Oculare dividirt.

Man hat auch die Gegenstände aufrecht darstellende, oder sogenannte terrestrische Fernröhre mit aus vier Linsen bestehenden Ocularen; aber die, mit der bei einigermaßen gründlicher Durchführung schwierigen und weitläufigen Theorie des Achromatismus der Oculare eng zusammenhängende Theorie dieser mit vierfachen Ocularen versehenen terrestrischen Fernröhre ist viel zu verwickelt, und erfordert einen viel zu großen Apparat analytischen Calculs, als daß sie sich in diesem Werke ohne zu große Weitläufigkeit geben ließe.

Digitized by Google

Zwanzigstes Kapitel.

Von dem zusammengesetzten Mikroskope.

§. 107.

In seiner einfachsten Gestalt, welche wir der Kürze wegen hier allein betrachten werden, besteht das zusammengesetzte Mikroskop aus zwei auf einer gemeinschaftlichen Axe mit einander verbundenen Sammelgläsern, und ist also im Wesentlichen von dem astronomischen Fernrohre eigentlich gar nicht verschieden, weshalb wir alle für das letztere im siebzehnten Kapitel entwickelten allgemeinen Formeln mit gewissen Modificationen, von denen nachher weiter die Rede sein wird, auch auf das zusammengesetzte Mikroskop anwenden können, wobei jedoch vor allen Dingen zu bemerken ist, daß man bei dem zusammengesetzten Mikroskope nicht wie bei dem astronomischen Fernrohre sich verstatten darf, Brüche, in denen die Entfernung des Objects von dem Objectivglase als Nenner auftritt, näherungsweise als verschwindend zu betrachten, weil diese Entfernung bei dem zusammengesetzten Mikroskope nicht wie bei dem astronomischen Fernrohre als unendlich groß anzusehen ist. Daher dürfen diejenigen für das astronomische Fernrohr entwickelten Formeln, in denen Brüche von der vorher näher bezeichneten Beschaffenheit als verschwindend betrachtet oder vernachlässigt worden sind, auf das zusammengesetzte Mikroskop nicht angewandt werden, sondern nur solche Formeln, welche die Entfernung des Objects von dem Objectivglase als ein wesentliches Element noch enthalten, was man in allem Folgenden stets festzuhalten und nie aus den Augen zu verlieren hat.

§. 108.

Behalten wir nun alle bei dem astronomischen Fernrohre gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt bei, so ergiebt sich zuvörderst auf ganz ähnliche Art wie in §. 89. auch für das zusammengesetzte Mikroskop die Bedingungsgleichung

$$E = f - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{k^2}{\Delta - f'}.$$

Nimmt man E, nämlich die Entfernung des Objectivglases und Ocularglases von einander, als constant an, so läßt sich diese Gleichung dadurch erfüllen, daß man die Größe P, nämlich die Entfernung des Objects von dem Objectivglase, verändert, was man dadurch bewirkt, daß man entweder das Tischchen, wel-

Digitized by Google

ches das Object trägt, beweglich macht, so daß man es durch geeignete Vorrichtungen dem feststehenden Objectivglase nähern und weiter davon entfernen kann, oder daß man das Rohr des Mikroskops beweglich macht, um es dem das Object tragenden feststehenden Tischchen nähern oder weiter von demselben entfernen zu können. Immer aber muß bei dem Gebrauche des zusammengesetzten Mikroskops die obige Bedingungsgleichung als erfüllt angenommen werden, weshalb wir also auch, daß dies der Fall sei, im Folgenden stets voraussetzen wollen.

Wenn wir, wie im Folgenden der Kürze wegen geschehen soll, die Dicken der Linsen als verschwindend betrachten, so ist (m. vergl. §. 90. oder §. 91.)

$$K = F = -F', \quad k = f = -f';$$

und die obige Bedingungsgleichung erhält dann, wie man leicht findet, die einfachere Form:

$$E = \frac{FP}{P-F} + \frac{f\Delta}{\Delta+f} = -\frac{F'P}{P+F'} - \frac{f'\Delta}{\Delta-f'}.$$

Nach §. 91. ist ferner

$$P' = -\frac{FP}{P-F} = \frac{F'P}{P+F'},$$

und nach §. 89. ist folglich

$$p = E + P' = \frac{f\Delta}{\Delta+f} = -\frac{f'\Delta}{\Delta-f'}, \quad p' = \Delta.$$

Weil bekanntlich (m. vergl. §. 90.)

$$F = -F' = \frac{RR'}{(n-1)(R-R')}, \quad f = -f' = \frac{rr'}{(n-1)(r-r')}$$

ist, und R, r negativ, dagegen R', r' positiv sind (mit Bezug auf das in §. 89. zum Grunde gelegte Coordinatensystem), so sind offenbar F, f positiv, dagegen F', f' negativ.

§. 109.

Nach §. 64. haben wir die Gleichungen

$$\frac{Q}{Q'} = -\frac{P-F}{K} = \frac{K}{P'-F'}$$

und

$$\frac{q}{q'} = -\frac{p-f}{k} = \frac{k}{p'-f'};$$

also, weil offenbar $Q' = q$ ist, wenn man multiplicirt:

$$\frac{Q}{q'} = \frac{(P-F)(p-f)}{Kk} = \frac{Kk}{(P'-F')(p'-f')},$$

Digitized by Google

oder nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\frac{Q}{q'} = \frac{(P-F)(p-f)}{Ff} = \frac{F'f'}{(P'-F')(p'-f')}.$$

Weil aber

$$p = \frac{f\Delta}{\Delta+f}, \quad p-f = -\frac{f^2}{\Delta+f}$$

ist, so ist

$$\frac{Q}{q'} = -\frac{f}{F}\cdot\frac{P-F}{\Delta+f}$$

oder

$$\frac{q'}{Q} = -\frac{F}{f}\cdot\frac{\Delta+f}{P-F} = \frac{1+\frac{\Delta}{f}}{1-\frac{P}{F}}.$$

Weil die Größen F, f, Δ, P sämmtlich positiv sind, so ist der Bruch $\frac{q'}{Q}$ negativ oder positiv, d. h. das Mikroskop stellt die Gegenstände verkehrt oder aufrecht dar, jenachdem $P-F$ positiv oder negativ, d. h. jenachdem $P > F$ oder $P < F$ ist.

Da F, f und Δ, letzteres natürlich nur für dasselbe Auge, constante Größen sind, so wird man die Größen E und P immer so bestimmen können, daß der Gleichung

$$E = \frac{FP}{P-F} + \frac{f\Delta}{\Delta+f}$$

genügt wird, und daß $P > F$ ist, so daß also das Object außerhalb der Brennweite des Objectivglases liegt, welches der gewöhnliche Fall bei dem zusammengesetzten Mikroskope ist, das also nach dem Obigen die Gegenstände verkehrt darstellt, und will man daher durch ein solches Instrument die Gegenstände aufrecht erblicken, so muß man sie in verkehrter Lage auf das die Objecte tragende Tischchen legen.

§. 110.

Aus ganz ähnlichen, und daher hier nicht zu wiederholenden Gründen, wie in §. 85. bei'm einfachen Mikroskope erläutert worden ist, nennt man auch bei'm zusammengesetzten Mikroskope den absoluten Werth des Bruchs $\frac{q'}{Q}$ die Vergrößerung, so daß also, wenn wir dieselbe durch V bezeichnen, nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$V = \frac{F}{f}\cdot\frac{\Delta+f}{P-F} = -\frac{1+\frac{\Delta}{f}}{1-\frac{P}{F}}$$

ist; und man sieht aus diesem Ausdrucke, daß die Vergrößerung unter sonst gleichen Umständen desto beträchtlicher ist, je näher

Digitized by Google

der unächte Bruch $\frac{P}{F}$ der Einheit kommt, d. h. je näher das noch außerhalb der Brennweite des Objectivglases liegende Object bei dem Brennpunkte des Objectivglases liegt, eine Regel, die bei der Construction der zusammengesetzten Mikroskope auch allgemein befolgt wird.

Weil

$$E = \frac{PP}{P-F} + \frac{f\Delta}{\Delta+f}$$

ist, so ist

$$\frac{P}{P-F} = \frac{E(\Delta+f) - f\Delta}{F(\Delta+f)},$$

oder

$$\frac{\frac{P}{F}}{\frac{P}{F}-1} = \frac{E(\Delta+f) - f\Delta}{F(\Delta+f)},$$

also

$$\frac{P}{F} = \frac{E(\Delta+f) - f\Delta}{(E-F)(\Delta+f) - f\Delta},$$

und folglich

$$\frac{P}{F} - 1 = \frac{F(\Delta+f)}{(E-F)(\Delta+f) - f\Delta}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$V = \frac{(E-F)(\Delta+f) - f\Delta}{fF}$$

oder

$$V = \left(\frac{E}{F} - 1\right)\left(\frac{\Delta}{f} + 1\right) - \frac{\Delta}{F}.$$

§. 111.

Bezeichnet man wie in §. 91. die Oeffnungshalbmesser des Objectivglases und des Ocularglases respective durch Ω und q, so ist ganz wie in dem angeführten Paragraphen

$$q = \frac{f}{F} \cdot \frac{\Delta}{P} \cdot \frac{P-F}{\Delta+f} \Omega.$$

Weil aber nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$V = \frac{F}{f} \cdot \frac{\Delta+f}{P-F}$$

ist, so ist

$$q = \frac{\Delta}{P} \cdot \frac{\Omega}{V}.$$

Auch ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{1}{P} = \frac{(E-F)(\Delta+f) - f\Delta}{E(\Delta+f) - f\Delta} \cdot \frac{1}{F},$$

Digitized by Google

also

$$q = \frac{(E-F)(\Delta+f)-f\Delta}{E(\Delta+f)-f\Delta} \cdot \frac{\Delta}{F} \cdot \frac{\Omega}{V},$$

oder

$$q = \frac{\left(\frac{E}{F}-1\right)\left(\frac{\Delta}{f}+1\right)-\frac{\Delta}{F}}{\frac{E}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{f}+1\right)-1} \cdot \frac{\Omega}{V},$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$q = \frac{\Omega}{\frac{E}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{f}+1\right)-1},$$

oder

$$q = \frac{f\Delta}{E(\Delta+f)-f\Delta}\Omega.$$

Bezeichnet man das halbe Gesichtsfeld durch Θ, so ist wenigstens näherungsweise

$$q = E \operatorname{tang} \Theta = E\Theta,$$

also

$$\Theta = \frac{q}{E},$$

und, wenn Θ in Minuten ausgedrückt sein soll:

$$\Theta = \frac{q}{E \operatorname{Arc} 1'} = 3437{,}7 \cdot \frac{q}{E},$$

oder nach dem Vorhergehenden auch

$$\Theta = 3437{,}7 \cdot \frac{f\Delta}{E(\Delta+f)-f\Delta} \cdot \frac{\Omega}{E},$$

oder

$$\Theta = \frac{3437{,}7}{\frac{E}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{f}+1\right)-1} \cdot \frac{\Omega}{E}.$$

Bei jedem Mikroskop muß ein Sammelspiegel zur Erleuchtung der Objecte angebracht sein, dessen Wirkung man sich aus der im sechsten Kapitel ausführlich abgehandelten Lehre von den sphärischen Spiegeln leicht zu erklären im Stande sein wird.

Digitized by Google

Einundzwanzigstes Kapitel.

Von den Spiegel-Teleskopen.

§. 112.

Um die bei den dioptrischen Fernröhren, den sogenannten Refractoren, durch das Objectivglas hervorgebrachte starke Farbenzerstreuung, als die hauptsächlichste Quelle der Undeutlichkeit bei diesen Fernröhren, zu vermeiden, erfand im Jahre 1668 Newton vor der Erfindung der achromatischen Fernröhre das Spiegel-Teleskop, den sogenannten Reflector, d. h. er ersetzte das bei den dioptrischen Fernröhren durch das Objectivglas hervorgebrachte Bild des zu beschauenden Objects durch ein von einem concaven Spiegel hervorgebrachtes Bild desselben, wo natürlich alle Farbenzerstreuung, insofern sie bei den dioptrischen Fernröhren von dem Objectivglase herrührt, wegfallen mußte, und bloß noch die weit geringere von den Ocularen herrührende Farbenzerstreuung übrig blieb. Ein Irrthum war es eigentlich, welcher den großen Mann veranlaßte, die dioptrischen Fernröhre als unheilbar krankend aufzugeben, und ihn zu der Erfindung des Spiegel-Teleskops führte. Man hat diesem Instrumente verschiedene Einrichtungen gegeben, unter denen aber die von dem großen Astronomen Wilhelm Herschel getroffene Anordnung die einfachste und die Grundidee des Erfinders am unmittelbarsten repräsentirende ist, weshalb wir dieselbe, wenn sie auch nicht die älteste, sondern eigentlich die neueste Einrichtung ist, im folgenden Paragraphen zuerst in der Kürze beschreiben wollen.

§. 113.

Man denke sich ein weites Rohr, welches an dem einen Ende verschlossen, an dem anderen Ende offen ist, und mit seinem offenen Ende gegen ein zu beschauendes Object gerichtet wird. Befindet sich nun an dem verschlossenen Ende des Rohrs ein mit seiner concaven Seite gegen das Object gekehrter Hohlspiegel, so entsteht vor demselben in der Nähe seines Brennpunkts ein verkehrt stehendes Bild des Objects. Denkt man sich nun ferner, daß der Beobachter vor dem offenen Ende des Rohrs stehe und das in Rede stehende Bild des Objects mit einer Loupe, als Ocularglas, betrachte, so hat man einen vollkommenen Begriff von dem Herschel'schen Spiegel-Teleskope. Da aber hiernach bei diesem Instrumente der Kopf des Beobachters zwischen das Object und den Spiegel

Digitized by Google

tritt, so versperrt er nothwendig einem Theile der einfallenden Strahlen den Weg zum Spiegel, weshalb sich von dieser Herschel'schen Einrichtung nur bei sehr großen Spiegeln, überhaupt nur bei Spiegel-Teleskopen von sehr großen Dimensionen, Gebrauch machen läßt. Um dabei den Verlust an Licht möglichst zu vermeiden, richtet man die Axe des Instruments etwas schief gegen den Gegenstand, so daß das Bild außerhalb der Axe des Rohrs entsteht und nur der Scheitel des Kopfs des Beobachters den Strahlen hindernd in den Weg tritt. Wenn dann, wie als ein nothwendiges Erforderniß bei diesen Instrumenten schon erwähnt worden ist, der Spiegel sehr groß ist, so hat nur ein sehr geringer Verlust an Licht in Vergleich mit dem Verluste Statt, welchen mehrfachere Zurückwerfungen und Brechungen zur nothwendigen Folge haben würden. Eines solchen Teleskops, bei welchem der Spiegel 40 Fuß Brennweite und 4 Fuß im Durchmesser hatte, und das 36500mal mehr Licht in's Auge brachte, als ohne künstliche Mittel dahin gelangen konnte, bediente sich W. Herschel zur Durchmusterung des Himmels. Der Sirius erschien in diesem Instrumente mit einer Helle, welche die Augen blendete. In neuester Zeit sollen in England noch größere Spiegel-Teleskope zu Stande gebracht worden sein. Auch der Astronom Schröter in Lilienthal bei Bremen hat Spiegel-Teleskope von sehr beträchtlicher Größe verfertigt. Daß das Herschel'sche Spiegel-Teleskop die Gegenstände verkehrt darstellt, bedarf nach dem Bisherigen kaum noch einer besonderen Erinnerung.

Bezeichnen wir des Objects Q Entfernung vom Spiegel durch P, die Entfernung des durch den Spiegel hervorgebrachten verkehrt stehenden Bildes Q' dieses Objects von dem Spiegel durch P', wobei, wie auch im Folgenden, alle diese Größen als positiv betrachtet werden sollen, so erhellet auf der Stelle die Richtigkeit der Proportion

$$P : Q = P' : Q' .$$

Ist ferner p die Entfernung des Bildes Q' von dem Ocularglase oder der Loupe, und p' die Entfernung des durch das Ocular hervorgebrachten Bildes q' von dem als ein neues Object betrachteten Bilde Q' von dem Ocularglase, so ist

$$p : Q' = p' : q' .$$

Also ist

$$Q' = \frac{P'}{P} Q, \quad Q' = \frac{p}{p'} q' ;$$

folglich

$$\frac{P'}{P} Q = \frac{p}{p'} q' .$$

Bezeichnet nun f die Brennweite des Oculars, dessen Dicke wir als verschwindend betrachten, so ist nach einer nun schon oft in Anwendung gebrachten dioptrischen Fundamentalgleichung

$$(p - f)(p' + f) = - f^2 ,$$

Digitized by Google

also

$$p = f - \frac{f^2}{p' + f} = \frac{fp'}{p + f}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\frac{P'}{P} Q = \frac{fq'}{p' + f}.$$

Wenn P sehr groß ist, so kann P′ mit hinreichender Annäherung der Brennweite des Spiegels gleich gesetzt werden, welche wir durch F bezeichnen wollen; und bei richtiger Einstellung, so wie zugleich unter der Voraussetzung, daß das Auge ganz nahe an das Ocular gehalten wird, ist p′ die deutliche Sehweite, welche wir auch jetzt wieder durch Δ bezeichnen wollen. Daher ist nach der obigen Gleichung

$$F \frac{Q}{P} = \frac{fq'}{\Delta + f} = \frac{f\Delta}{\Delta + f} \cdot \frac{q'}{\Delta};$$

also, da, wenn wir die Vergrößerung des Teleskops durch V bezeichnen,

$$V = \frac{q'}{\Delta} : \frac{Q}{P}$$

ist, was hier keiner weiteren Erläuterung bedürfen wird:

$$F = \frac{f\Delta}{\Delta + f} V, \quad V = \frac{(\Delta + f) F}{f\Delta}$$

oder

$$V = \frac{F}{f} \left(1 + \frac{f}{\Delta}\right).$$

Kann man den Bruch $\frac{f}{\Delta}$ ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so ist näherungsweise

$$V = \frac{F}{f}.$$

Man findet also die Vergrößerung, wenn man mit der Brennweite des Oculars in die Brennweite des Spiegels dividirt, ganz wie bei dem astronomischen Fernrohre.

§. 114.

Das Newton'sche Spiegel-Teleskop ist im Wesentlichen von dem Herschel'schen Spiegel-Teleskope gar nicht verschieden. Newton läßt nur das Bild, welches der concave Spiegel macht, wie durch Fig. 76. erläutert wird, gar nicht zur Wirklichkeit kommen, sondern fängt es in der Nähe des Brennpunkts des Spiegels mit einem gegen die Axe des Rohrs unter einem Winkel von 45° geneigten kleinen Planspiegel auf, welcher also das Licht, das er von dem großen concaven Spiegel

Digitized by Google

erhält, gegen die eine Seite des Rohrs reflectirt, so daß hier das dem großen concaven Spiegel entsprechende Bild zur Wirklichkeit kommt, und auf ganz ähnliche Art wie bei dem Herschel'schen Spiegel-Teleskope durch eine Loupe betrachtet werden kann. Bei dieser Anordnung wird das unmittelbare Dazwischentreten des Beobachters vermieden; allein die zweite Zurückwerfung, die hierzu erforderlich ist, veranlaßt einen beträchtlichen Verlust an Licht, zumal wenn dieselbe durch eine metallische Oberfläche geschieht, deren Verschluckungsvermögen immer sehr beträchtlich ist. Daher bewerkstelligte Newton in den Spiegel-Teleskopen dieser Art, die er selbst verfertigte, die Ablenkung des Bildes lieber durch totale innere Zurückwerfung von einem rechtwinkligen Glasprisma, das mit einer Seite des rechten Winkels senkrecht gegen die Axe des Teleskops in demselben angebracht war. Die Entfernung des kleinen Planspiegels von dem großen concaven Spiegel läßt sich einigermaßen verändern, um den kleinen Planspiegel immer in einer solchen Entfernung von dem großen Spiegel vermittelst einer Schraube an der inneren Seite des Rohrs befestigen zu können, daß die Bilder mit der größten Präcision und Schärfe sich darstellen. Da bei diesen Instrumenten die Stellung des Beobachters zur Seite derselben, insbesondere bei dem Aufsuchen der Objecte, mit manchen Unbequemlichkeiten verbunden ist, welche wegfallen, wenn er in die Richtung der Axe des Instruments selbst treten kann, so führte dies zu den im folgenden Paragraphen beschriebenen Abänderungen der ursprünglichen Newton'schen Einrichtung.

§. 115.

Gregory verbesserte nämlich das Spiegel-Teleskop dadurch, daß er, wie durch Fig. 77. erläutert wird, statt des kleinen schief stehenden Planspiegels einen kleinen Sammelspiegel, parallel mit dem großen Spiegel, vorn in's Rohr setzte, so daß er seine polirte Seite dem großen Spiegel zukehrt. Dieser kleine Spiegel wird so gestellt, daß sein Brennpunkt noch ein wenig außer der Brennweite des großen Spiegels liegt. Betrachtet man nun das verkehrte Bild, welches der große Spiegel macht, als einen Gegenstand, der sein Licht auf den kleinen Spiegel wirft, so sieht man leicht, daß der kleine Spiegel ein zweites aufrechtes und etwas größeres Bild in der Nähe des großen Spiegels machen wird. Der kleine Spiegel kann so gestellt werden, daß dieses Bild noch hinter den großen Spiegel fallen würde, wenn das Licht durch diesen hindurch gehen könnte. Um nun die Entstehung dieses Bildes möglich zu machen, hat der große Spiegel in der Mitte ein rundes Loch, ungefähr von der Größe des kleinen Spiegels, durch welches das von dem kleinen Spiegel reflectirte Licht hindurch geht. Es würde also hinter dem Spiegel ein Bild entfernter Gegenstände entstehen, wenn man, ehe dasselbe zur Wirklichkeit kommt,

Digitized by Google

das Licht nicht mit einem Collectivglase auffinge. Hierdurch sammelt man die Strahlen in ein kleineres Bild, welches endlich durch eine mikroskopische Linse betrachtet wird. Daß man durch dieses Teleskop die Gegenstände aufrecht sieht, ist außer dem Vortheile, daß der Beobachter in der Richtung der Axe steht, noch ein zweiter Vorzug, welcher diesem Instrumente vor der Newton'schen Einrichtung gebührt. Aber freilich geht dadurch, daß der große Spiegel in der Mitte, also gerade an der Stelle, welche für die Wirkung desselben von besonderer Wichtigkeit ist, ein Loch hat, ein nicht unbeträchtlicher Theil von Licht verloren.

Cassegrain modificirte die Gregory'sche Einrichtung dadurch, daß er statt des kleinen concaven Spiegels, wie durch Fig. 78. erläutert wird, einen kleinen convexen Spiegel anwandte, damit die Abweichungen wegen der Kugelgestalt, die durch die beiden Spiegel hervorgebracht werden, sich gegenseitig ausgleichen. In diesem Falle darf, wenn das zweite Bild auf der Seite des Beobachters entstehen soll, das erste sich nicht in der Wirklichkeit bilden, sondern sein idealer Ort muß über den kleinen Spiegel hinaus, zwischen seinen Hauptbrennpunkt und seine Oberfläche fallen. Das Cassegrain'sche Spiegel-Teleskop kann kürzer sein als das Gregory'sche, stellt aber die Gegenstände verkehrt dar.

In jetziger Zeit sind durch die trefflichen achromatischen Fernröhre, welche die Künstler herzustellen im Stande sind, die Spiegel-Teleskope fast ganz verdrängt worden, und dieselben werden, wenn man sie überhaupt noch anwendet, wohl nur in sehr großen Dimensionen, größer als man bis jetzt achromatische Fernröhre zu verfertigen im Stande ist, ausgeführt. Dann wird man aber immer die einfachste Herschel'sche Einrichtung, für welche oben eine kurze Theorie entwickelt worden ist, allen übrigen vorziehen. Deshalb halten wir es auch hier für unnöthig, die Theorie der übrigen Spiegel-Teleskope zu entwickeln, was übrigens keine Schwierigkeit haben würde, da im Obigen alle dazu nöthigen Grundlagen vollständig enthalten sind.

Digitized by Google

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Von noch einigen hauptsächlich auf der Anwendung von Linsengläsern beruhenden Instrumenten.

§. 116.

Ramsden's Dynamometer.

Das Dynamometer von Ramsden ist ein Instrument zur Bestimmung der Vergrößerung der astronomischen *) Fernröhre, welches auf Folgendem beruhet. Wenn man ein astronomisches Fernrohr gegen den freien Himmel gerichtet befestigt, und dann ein Blatt dünnes Papier hinter das letzte Ocular hält, so bemerkt man, wenn man nur das Papier durch einiges Probiren an seine rechte Stelle bringt, auf demselben einen hellen scharf begränzten Lichtkreis, welcher das Bild des Objectivglases ist. Mißt man nun den Durchmesser dieses Lichtkreises und die Oeffnung des Objectivglases genau, und dividirt mit jenem Durchmesser in diese Oeffnung hinein, so erhält man die gesuchte Vergrößerung des Fernrohrs, wie wir jetzt für die drei im siebzehnten Kapitel betrachteten astronomischen Fernröhre beweisen wollen, indem wir die halbe Oeffnung des Objectivglases und den Halbmesser seines Bildes immer respective durch Ω und Ω' bezeichnen werden; die Entfernung des Bildes des Objectivs von dem letzten Oculare wollen wir aber durch u bezeichnen.

Für das einfachste nur aus zwei Sammellinsen bestehende astronomische Fernrohr hat man nach §. 72. und §. 74. die beiden Gleichungen

$$(E - f)\,(u - f') = -k^2$$

und

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = -\frac{E-f}{u-f'},$$

also

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{E-f}{k}\right)^2,$$

oder, weil nach §. 90. bekanntlich $k = f$ ist,

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{E-f}{f}\right)^2.$$

*) Zwar auch der terrestrischen Fernröhre, welche wir jedoch der Kürze wegen hier bei Seite setzen wollen; aber nicht der Galilei'schen Fernröhre, wie aus dem Folgenden, wenn man dasselbe mit §. 104., Anmerkung, zusammenhält, sogleich erhellet.

Digitized by Google

Weil nun nach §. 89. und §. 90.

$$E = f - F' = f + F,$$

also

$$E - f = F$$

ist, so ist

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{F}{f}\right)^2,$$

woraus, da nach §. 90. die Vergrößerung

$$V = \frac{F}{f} = \frac{F'}{f'}$$

ist, auf der Stelle der zu beweisende Satz folgt.

Für das in §. 98. betrachtete astronomische Fernrohr mit einem Doppeloculare ist nach §. 72. und §. 74. auf ganz ähnliche Weise

$$(E - \mathfrak{F})(u - \mathfrak{F}') = -K^2$$

und

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = -\frac{E - \mathfrak{F}}{u - \mathfrak{F}'},$$

also

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{E - \mathfrak{F}}{K}\right)^2,$$

oder, weil nach §. 98. bekanntlich $K = \mathfrak{F}$ ist,

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{E - \mathfrak{F}}{\mathfrak{F}}\right)^2.$$

Aus der in §. 98. bewiesenen Gleichung

$$E = \mathfrak{F} - F' + \frac{K^2}{P - F} - \frac{K^2}{\mathcal{P} - \mathfrak{F}'}$$

folgt aber, wenn man sich die bekannten Vernachlässigungen gestattet,

$$E = \mathfrak{F} - F' = \mathfrak{F} + F,$$

also $E - \mathfrak{F} = F$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{F}{\mathfrak{F}}\right)^2,$$

woraus, weil nach §. 98. die Vergrößerung

$$V = \frac{F}{\mathfrak{F}}$$

ist, wieder der zu beweisende Satz unmittelbar folgt.

Für das in §. 95. betrachtete astronomische Fernrohr mit einem Doppeloculare ist auf ganz ähnliche Art wie vorher

$$\left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 = \left(\frac{E - \mathfrak{F}}{K}\right)^2.$$

Digitized by Google

Aus §. 90. und §. 98. schließt man aber leicht, daß

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{F}}{1 + \frac{\mathfrak{E}}{f_1'}} = \frac{\mathfrak{F} f_1'}{\mathfrak{E} + f_1'} = -\frac{\mathfrak{F} f_1}{\mathfrak{E} - f_1}$$

ist, und nach §. 96. ist

$$\mathfrak{E} - f_1 = -\frac{\mathfrak{F} f}{f - \mathfrak{F}};$$

also ist

$$\mathfrak{K} = \frac{f_1 (f - \mathfrak{F})}{f}.$$

Nach §. 95. und §. 96. ist ferner, wenn man sich die gewöhnlichen Vernachlässigungen gestattet,

$$E = F + f - \frac{f^2}{f + f_1 - \mathfrak{E}}$$

und

$$\mathfrak{F} = \frac{f (f_1 - \mathfrak{E})}{f + f_1 - \mathfrak{E}},$$

also, wie man leicht findet,

$$E - \mathfrak{F} = F.$$

Daher ist

$$\frac{E - \mathfrak{F}}{\mathfrak{K}} = \frac{fF}{f_1 (f - \mathfrak{F})},$$

und weil nun nach §. 96. die Vergrößerung

$$V = \pm \frac{fF}{f_1 (f - \mathfrak{F})} = \pm \frac{f_1 F}{f (f_1 + \mathfrak{F})},$$

ist, so erhellet wieder die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Statt des Papiers nimmt Ramsden eine dünne Scheibe von Horn, zeichnet darauf eine sehr feine Eintheilung, die sich auf den Maaßstab für das Objectivglas bezieht, und befestigt die Scheibe in einer Röhre, die man an das Fernrohr stecken kann, um durch eine vergrößernde Loupe den Durchmesser des Lichtkreises so bequem als genau messen zu können.

§. 117.

Die Camera obscura*).

Ein sammelndes Objectivglas, in dem Laden eines finsteren Zimmers angebracht, vereinigt hinter sich die Strahlen, welche

*) Die in diesem Paragraphen gegebene Beschreibung einiger ziemlich bekannten, theilweise nur zur Belustigung dienenden optischen Apparate ist größtentheils aus Biot's Lehrbuch der Experimental-Physik oder Erfahrungs-Naturlehre, übersetzt von G. T. Fechner. Thl. IV. Leipzig. 1829. S. 448. entlehnt, weil die von Biot angegebenen Einrichtungen mir die besten zu sein scheinen, ohne daß ich diesem Gegenstande eine besondere wissenschaftliche Bedeutung beilege.

Digitized by Google

von den äußeren Gegenständen herkommen, und sind diese sehr entfernt im Verhältniß zu seiner Brennweite und ziemlich auf der Richtung seiner Axe gelegen, so bringt es deutliche Bilder derselben hervor, die man auf einem weißen Blatte auffangen kann. Diese Bilder sind umgekehrt; um sie jedoch aufrecht darzustellen, braucht man nur zum Objectivglase, anstatt des directen Lichts der Gegenstände ihr von einem Metallspiegel **MM** (Fig. 79.) schon zurückgeworfenes und umgekehrtes Bild gelangen zu lassen. Eine solche Vorrichtung nennt man eine **Camera obscura**. Man hat deren, wo das Papierblatt durch eine mattgeschliffene Glastafel ersetzt ist, und das Zimmer durch ein dunkles Behältniß, in welches man den Kopf, mit einem Vorhang umhüllt, bringt. Dann ist sie tragbar und läßt sich zum Landschaftszeichnen anwenden.

Wollaston hat bemerkt, daß die vortheilhafteste Gestalt für das Objectivglas der Camera obscura die eines, nach dem Bilde zu convexen und nach den Gegenständen hin concaven Meniscus ist, wie sie die Figur darstellt; und glückliche Versuche, welche **Cauchoix** angestellt hat, scheinen anzudeuten, daß das günstigste Verhältniß der Krümmungen das von 5 zu 8 ist. Diejenige beider Oberflächen, welche den kürzesten Krümmungshalbmesser hat, muß nach dem Bilde zugekehrt sein, weil die Linse als Sammelglas wirken soll.

Das Verhältniß 5 : 8 giebt auch **David Brewster** an im **Treatise on Optics. New Edition. London. 1831.** p. 330. Von **Petzvals** Untersuchungen hier zu reden, würde zu weitläufig werden.

Erste Anmerkung. Eine nicht sehr erhebliche Abänderung der **Camera obscura**, wo man das Bild nicht auf einer Ebene auffängt, sondern unmittelbar durch ein Sammelglas wie durch eine Loupe betrachtet, nennen Einige eine **Camera clara**.

Zweite Anmerkung. Es wird hier der geeignetste Ort sein, eine kurze Notiz über die in neuerer Zeit so viel Aufsehen machende **Photographie** oder **Daguerrotypie** zu geben, welche ich ganz aus dem **Lehrbuche der Physik und Meteorologie von Dr. J. Müller. Zweite Auflage. Erster Band. Braunschweig. 1844. S. 618.** entlehne, weil sie sich in dieser Darstellung mit besonderer Deutlichkeit über den so interessanten Gegenstand in der Kürze verbreitet.

Schon **Wedgwood** kam auf den Gedanken, die Schwärzung des Chlorsilbers zu benutzen, um die Bilder der **camera obscura** zu fixiren, und in der That stellte **Davy** mittelst eines Sonnenmikroskops (s. nachher) die Bilder kleiner Gegenstände auf Chlorsilberpapier dar, sie wurden aber bald durch die fortdauernde Einwirkung des Lichts auf das Chlorsilber wieder vernichtet. **Niepce** brachte es in der Kunst, solche **Lichtbilder** zu fixiren, schon weiter; allein erst **Daguerre** fand nach vielen mühsamen Versuchen ein Verfahren, welches in dieser Hinsicht fast Unglaubliches leistet.

Digitized by Google

Das Material, auf welchem die Daguerre'schen Lichtbilder dargestellt werden, ist eine plattirte, d. h. eine mit einer dünnen Silberschicht überzogene Kupferplatte. Nachdem sie gehörig gereinigt worden ist, wird sie auf eine viereckige Porzellanschale gelegt, welche eine wässerige Lösung von Chlorjod enthält, und hier so lange den Dämpfen des Jods ausgesetzt, bis sich eine goldgelbe oder violette Schicht von Jodsilber auf der Platte gebildet hat. Nun wird die Platte, vor jeder fremden Einwirkung des Lichts geschützt, genau an der Stelle in der camera obscura eingesetzt, an welcher ein scharfes Bild des abzubildenden Gegenstandes entsteht. Nach einiger Zeit, deren Dauer von mannichfachen Umständen abhängt, wird die Platte aus der camera obscura weggenommen. Man sieht jetzt noch keine Spur eines Bildes; dasselbe tritt aber alsbald hervor, wenn man sie über eine mit Quecksilber überzogene etwas erwärmte Metallplatte bringt. Sobald das Bild hinlänglich ausgeprägt ist, wird die Platte in eine Lösung von unterschwefligsaurem Natron, oder, in Ermangelung dessen, in eine siedend heiße Auflösung von Kochsalz gelegt, wodurch der Ueberzug von Jodsilber aufgelöst und so eine fernere Einwirkung des Lichts unmöglich gemacht wird.

An den Seiten der jodirten Platte, auf welche die hellen Partieen des Bildes der camera obscura gefallen waren, hat das Licht nämlich schon eine Einwirkung hervorgebracht, bevor dieselbe dem Auge sichtbar wird; diejenigen Stellen der Platte nämlich, welche dem Lichte am meisten ausgesetzt waren, haben die Eigenschaft erhalten, Quecksilberdämpfe zu condensiren, hier schlägt sich also Quecksilber in unendlich feinen Perlchen nieder, während da, wo das Licht nicht eingewirkt hat, kein solcher Niederschlag stattfindet. Nachdem nun an den letzteren Stellen das völlig unveränderte Silberjodid abgewaschen worden ist, hat man an den hellen Partieen des Bildes den feinen Quecksilberstaub, da, wo das Licht nicht eingewirkt hat, den glänzenden Silberspiegel, und wenn man die Platte so hält, daß der Spiegel solche Strahlen in das Auge reflectirt, welche von dunkeln Gegenständen kommen, so bildet dieser Silberspiegel den dunkeln Grund, auf welchem die hellen Partieen durch das von den Quecksilberkügelchen nach allen Seiten hin zerstreute Licht hervortreten.

Wenn man die Platte zu lange in der camera obscura läßt, so wird die Wirkung des Lichts auf der jodirten Platte ohne Weiteres sichtbar, indem das Jodsilber da geschwärzt wird, wo das Licht am kräftigsten wirkt; das auf diese Weise entstehende Bild ist ein negatives, d. h. den hellen Stellen des Gegenstandes entsprechen die dunkeln Stellen des Bildes, und umgekehrt.

Wenn man die Platte so lange in der camera obscura gelassen hat, daß die Lichtwirkung auf derselben sichtbar ist, so ist der zur Erzeugung eines Daguerre'schen Bildes geeignete Moment schon vorüber.

Ein Daguerre'sches Bild kann nie ganz die richtigen Verhältnisse zwischen Licht und Schatten wiedergeben, weil die verschiedenen Farben so höchst ungleich auf die jodirte Platte wirken; grüne Strahlen bringen fast gar keine Wirkung hervor, weshalb denn auch in Daguerre'schen Bildern die Bäume immer sehr dunkel erscheinen; auch

Digitized by Google

die rothen Strahlen wirken sehr wenig. Durch diesen Umstand verlieren die Daguerre'schen Portraits oft sehr an Aehnlichkeit.

Ein anderes von Talbot angewandtes Verfahren mittelst des sogenannten kalotypen Papiers ausführlicher zu beschreiben, ist hier nicht der Ort.

Das Megaskop.

Man denke sich wiederum ein Objectivglas in den Fensterladen eines finsteren Zimmers eingefügt, wie bei der camera obscura; anstatt aber durch dasselbe Bilder von entfernten Gegenständen zu bezwecken, bringe man außerhalb des Zimmers in geringer Entfernung in der Richtung der Axe des Glases einen, stark vom Sonnenlichte, gleichviel ob es direct oder von mehreren Spiegeln zurückgeworfen ist, erleuchteten Gegenstand an. Hat dieser Gegenstand keine zu großen Dimensionen, so wird im Zimmer ein deutliches Bild desselben entstehen, dessen Entfernung und Größe von der Brennweite des Objectivglases und dem Abstande, in welchen der Gegenstand vor dasselbe gebracht ist, abhängen. Durch immer größere Annäherung des Gegenstandes an den Hauptbrennpunkt lassen sich somit immer größere Bilder erhalten; da sie sich aber auch zugleich immer mehr entfernen würden, so muß man bei solchen Abständen stehen bleiben, wie sie das Local, in dem man operirt, gestattet, und bei welchen die Bilder hinreichend vergrößert, aber auch noch gehörig begränzt erscheinen. Sie werden umgekehrt sein; dagegen wird man sie aufrecht erscheinen lassen, wenn man den Gegenstand umkehrt. Auf diese Weise ist das Megaskop Fig. 80. beschaffen. Anstatt einer einzigen Objectivlinse kann man deren mehrere anwenden und sie achromatisiren. Dann sind die Gränzen, innerhalb welcher die Bilder deutlich erscheinen, hinlänglich weit, um auf diese Weise vergrößerte oder verkleinerte Kopieen von Gemälden, Büsten oder selbst natürlichen Figuren nehmen zu können. Charles, der Erfinder dieses Apparats, bringt eine zwei- bis zwanzigmalige Vergrößerung dadurch hervor. Diese Einrichtung macht seine Anwendung sehr nützlich bei einer großen Menge physikalischer oder naturhistorischer Untersuchungen, wo es erforderlich wird, die Gestalten und Umrisse von Gegenständen genau kennen zu lernen, die wegen ihrer Kleinheit oder Zartheit keine unmittelbare Messung zulassen. Dann fängt man die Bilder auf einem mattgeschliffenen Glase auf, und zeichnet ihre Umrisse hinter dem Glase auf seiner Oberfläche selbst, oder auf durchscheinendem Papier, das man daran hält. Dieses Verfahren läßt, obwohl es graphisch ist, doch eine große Genauigkeit zu.

Die Zauberlaterne (Laterna magica).

Eine mit Ausnahme der nöthigen Zuglöcher überall geschlossene Laterne trägt im Inneren eine Lampe, die eine sehr helle Flamme giebt. Um deren Licht noch mehr zu verstärken, befindet

Digitized by Google

sich an der Hinterwand der Laterne ein Erleuchtungsspiegel. In der Mitte der Vorderwand, die auf diese Art sehr stark erleuchtet ist, befindet sich ein rundes Loch von etwa $1\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser, in welchem eine nach Außen gerichtete Röhre von etwa 3 Zoll Länge befestigt ist. In dieser steckt eine zweite, die sich auswärts und einwärts schieben läßt. Die erste Röhre hat dicht an der Laterne auf beiden Seiten in senkrechter Richtung Einschnitte, durch welche man einen schmalen Glasstreifen, auf den allerlei Figuren mit durchsichtigen Farben gemalt sind, schieben kann, und zwar müssen die Figuren verkehrt eingeschoben werden. Nahe vor der stark erleuchteten Figur nach auswärts steht in der äußeren Röhre ein Sammelglas, und die Figur steht innerhalb der Brennweite desselben. Daher geht das Licht der Figur durch dieses Glas nach Außen, als käme es von einem vergrößerten, von dem Glase weiter als die Figur entfernten, gegen die Figur aufrecht stehenden, auf der nämlichen Seite des Glases wie die Figur liegenden Bilde derselben. Dann befindet sich am äußersten Ende der zweiten in der ersten verschiebbaren Röhre ein anderes Sammelglas, dessen Brennweite aber noch nicht bis zu dem vorher erwähnten Bilde der Figur reicht, so daß dieses Bild außerhalb der Brennweite des zweiten Sammelglases liegt, und durch dieses Glas entsteht also vor dem zweiten Sammelglase, also auch vor der Laterne, in einiger Entfernung von derselben, ein zweites, gegen das erste Bild, und also auch gegen die Figur selbst verkehrt stehendes Bild derselben, welches auf einer ebenen Fläche, etwa auf einer weißen Wand, aufgefangen werden kann. Daß dieses Bild aufrecht steht, wenn das auf Glas gemalte, den durch die Laterne auf der weißen Wand abzubildenden Gegenstand darstellende Bild verkehrt in die Laterne geschoben worden ist, geht aus dem Vorhergehenden ganz von selbst hervor. Durch Ein- und Ausschieben der inneren Röhre kann man das optische Bild näher an die Laterne bringen, oder weiter von derselben entfernen.

Die Phantasmagorie ist eine Laterna magica, wo man den Abstand des Gegenstandes vom Collectivglase und dadurch die Größe des Bildes sich ändern läßt, um den Anschein eines sich nähernden oder entfernenden Gegenstandes hervorzubringen. Um aber die Täuschung zu begünstigen, müßte man auch die Beleuchtung des Gegenstandes verändern, so daß sie mit seiner Entfernung abzunehmen schiene; allein gerade das Gegentheil findet in den Apparaten dieser Art statt, wo man das Licht des Bildes so concentrirt läßt, wie es die Wirkung des Glases mit sich bringt.

Das Sonnenmikroskop.

Anstatt eines Objectivglases von großen Dimensionen, füge man in ein Rohr, welches in ein Loch im Fensterladen eingepaßt ist, eine Loupe A_2 (Fig. 81.) von kurzer Brennweite ein, und bringe vor dieselbe etwas über ihre Hauptbrennweite hinaus

Digitized by Google

einen kleinen Gegenstand s σ. Die Strahlen, welche von diesem Gegenstande ausgehen, werden nach ihrem Durchgange durch die Loupe hinter ihr ein vergrößertes verkehrt stehendes Bild hervorbringen, dessen Dimensionen und Abstand um so mehr zunehmen, je näher der Gegenstand an den Hauptbrennpunkt gebracht wird. Fängt man nun dieses große Bild auf einer weißen Tafel auf, die man in einem verfinsterten Zimmer angebracht hat, so wird man es dann mit Muße betrachten, und näher untersuchen können. Dies macht jedoch nöthig, daß das Bild ungeachtet seiner Vergrößerung noch hinlänglich hell sei. Man muß daher den Gegenstand sehr stark beleuchten. In dieser Absicht bringt man jenseit desselben außerhalb des Zimmers eine andere Loupe A_1 (Fig. 82.) in einem solchen Abstande an, daß sie ein dickes Bündel Sonnenstrahlen, welches durch einen Heliostaten gerichtet wird, auf den Gegenstand concentrirt. Dann erscheint, wenn der Gegenstand durchsichtig ist, das auf die Tafel geworfene Licht sehr hell. Auf diese Weise lassen sich kleine Gegenstände, wie Infusionsthierchen oder Organe von Insecten, in einem erstaunlichen Verhältnisse vergrößern. Die schönste Anwendung aber, welche sich von diesem Instrumente machen läßt, ist, auf den Glasstreifen, welcher als Objectenträger dient, ein Tröpfchen irgend einer Salzauflösung zu bringen. In wenig Augenblicken geht, indem die Flüssigkeit durch die Wärme, die sie erfährt, verflüchtigt wird, die Krystallisation vor sich, und man kann diesem Prozeß auf der Tafel genau folgen, so wie auch die Gestalt der gebildeten Krystalle erblicken. Vorzüglich leicht erhält man diesen Erfolg mit dem salzsauren Ammoniak und dem schwefelsauren Natron. Wir verdanken ebenfalls Charles die Vervollkommnung dieses Apparats.

Die Bilder eines Sonnenmikroskops bieten besonders die Bequemlichkeit dar, daß sie von vielen Beobachtern zugleich gesehen, auch leicht abgezeichnet werden können; auch kann man die Vergrößerung beliebig weit treiben; aber an Schärfe kommen die durch ein solches Instrument dargestellten Bilder den Bildern eines einfachen oder zusammengesetzten Mikroskops nie gleich.

Statt des Sonnenlichts bedient man sich in neuerer Zeit des Drummond'schen Kalklichtes zur Erleuchtung der Objecte. Nach Drummond leuchtet nämlich von glühenden Körpern am Stärksten der Kalk, wenn er in einen Strom von Sauerstoffgas und Wasserstoffgas gebracht wird, worüber das Weitere nicht hierher gehört.

§. 118.

Die Camera lucida *).

Es sei CAB (Fig. 83.) ein Quadrant, und sein Bogen AB sei in D halbirt, auch seien die Sehnen AD, DB gezogen, so

*) Die folgende Beschreibung ist ihrer Deutlichkeit wegen aus dem Lehrbuch der mechanischen Naturlehre von E. G. Fischer. Dritte Auflage. Thl. II. Berlin. 1826. S. 207. entlehnt worden.

Digitized by Google

daß die geradlinige Figur CADB der vierte Theil eines regulären Achtecks ist. Man stelle sich diese Figur CADB als den senkrechten Durchschnitt eines Prisma von sehr reinem Glase vor. Die obere horizontale Ebene CA sei mit einer geschwärzten Platte bedeckt, die bloß bei E über der Mitte der Ebene AD eine kleine Oeffnung hat. Die lothrechte Ebene CB sei einem entfernten Gegenstande ST zugekehrt, dessen Mitte R in der horizontalen Linie RQ liegt, welche aus der Mitte Q der Ebene DB gezogen ist. Da nun alles von ST kommende Licht in der Ebene CB wenig gebrochen wird, so fällt es auf die Ebene BD unter Winkeln, welche nur wenig von $22\frac{1}{2}^{0}$ verschieden sind. Daher wird es von der Fläche BD, wie von einem vollständigen Spiegel reflectirt. Macht man nun den Winkel BQR′ = BQR, und QR′ = QR, so wird alles Licht von dem Spiegel BD so reflectirt, als käme es von dem Gegenstande S′T′. Dann fällt dieses Licht unter eben so kleinen Winkeln auf die Fläche DA, und wird größtentheils senkrecht gegen die Ebene CA geworfen; und macht man den Winkel DUR″ = DUR′, auch UR″ = UR′, so geht dieses Licht von DA so fort, als käme es von dem Gegenstande S″T″. Steht nun der Beobachter auf der Seite A, und sieht durch die kleine Oeffnung E in das Prisma, so sieht er auf einer weißen Ebene, die horizontal 8 bis 10 Zoll unter dem Prisma liegt, Gegenstände wie ST gleichsam wie ein Gemälde horizontal auf der Ebene und aufrecht, auch ohne Umkehrung der Seiten liegen. Daher kann man mit einer Bleifeder die Umrisse bequem abzeichnen.

Das Gestell zu diesem Instrumente ist in Fig. 84. abgebildet. FG ist eine etwas schwere Platte von Metall, unter welcher ein Bogen Papier ausgespannt liegt. Auf FG steht eine dünne runde Säule HJ, 8 bis 10 Zoll lang. KL ist eine Hülse, die an ihr auf und nieder geschoben werden kann. MN ist das oben beschriebene Prisma, von der Seite A (Fig. 83.) her gesehen. Es hat an beiden Seiten Hülsen von Messing, und ist durch einen kurzen Stift an der Hülse befestigt, kann aber um diesen Stift gedreht werden, um die obere Fläche CA (Fig. 83.) mehr oder minder horizontal stellen zu können. Das Prisma selbst muß sehr klein sein. Die Halbmesser CA und CB (Fig. 83.) etwa 0,3 Zoll, und die ganze Länge des Prisma etwa 1 Zoll. Das Loch E (Fig. 83.) in der Deckplatte muß kleiner als die geöffnete Pupille (etwa 0,05 Zoll) sein. Sieht dann das Auge in das sehr helle Bild, so ist die Pupille erweitert genug, um nicht blos die aus dem Prisma kommenden Strahlen, sondern auch das von der Ebene OP (Fig. 84.) kommende Licht aufzunehmen, und die Spitze des Bleistiftes zu sehen, mit welchem man die Umrisse zeichnet.

Der Erfinder dieses sinnreichen und brauchbaren Instruments ist Wollaston, und hat dasselbe mit dem Namen einer Camera lucida belegt; wenn es auch nicht auf der Anwendung von Linsengläsern beruht, so ist es doch seiner Nützlichkeit

Digitized by Google

wegen hier mit beschrieben worden, weil sich kein anderer passender Ort zu dieser Beschreibung fand.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Von den Erscheinungen der Interferenz des Lichtes.

§. 119.

Die Erscheinungen der Interferenz des Lichtes lernt man im Allgemeinen am besten durch einen von Fresnel angegebenen Versuch kennen, welcher der Fresnel'sche Interferenzversuch oder auch der Fresnel'sche Spiegelversuch genannt wird, und, als ein sehr wichtiger Fundamentalversuch in der ganzen Lehre vom Lichte, hier ausführlich erläutert und discutirt werden muß.

Man bedarf zu diesem Versuche zweier sehr ebener Planspiegel, am besten Metallspiegel, oder auch Spiegel von schwarzem oder auf der Rückseite geschwärztem Glase, welche unter einem sehr stumpfen Winkel gegen einander geneigt werden, der 180 Graden so nahe kommen muß, daß in diesen Spiegeln die beiden Bilder einer ungefähr acht bis zehn Schritte entfernten Kerzenflamme nur um den Durchmesser dieser Kerzenflamme von einander entfernt erscheinen; die Deutlichkeit der nachher zu beschreibenden Erscheinung wird selbst noch erhöhet, wenn der Winkel der beiden Spiegel sich 180 Graden noch mehr nähert, und demzufolge die beiden Bilder der Kerzenflamme einander noch näher rücken.

Bei dem Aneinanderfügen der beiden Spiegel muß man mit der größten Sorgfalt darauf achten, daß in der Berührungslinie derselben keiner vor dem andern auch nur im Geringsten hervorspringe, indem ein geringer Vorsprung des einen vor dem andern von $0^{mm},01$ bis $0^{mm},02$ oft schon hinreicht, den ganzen mit diesen Spiegeln anzustellenden, und sogleich ausführlich zu beschreibenden Versuch zu vereiteln. Fresnel bedient sich, um die beiden Spiegel in die richtige gegenseitige Lage zu bringen, einer eigenen Schraubenvorrichtung, welche ausführlich zu beschreiben hier zu weitläufig sein würde, indem man überdies seinen Zweck, völlig genügend, leichter und einfacher auf folgende Weise erreichen kann. Auf die größte Seitenfläche eines parallelepipedischen Holzklötzchens, dessen drei in einer und derselben Ecke zusammenstoßende Kanten ungefähr 2, 3, 10 Centi-

Digitized by Google

meter lang sind, klebe man an drei Stellen etwas weiches Wachs, in der Mitte und gegen die beiden kürzeren Seiten der in Rede stehenden Seitenfläche des Holzklötzchens hin. Auf dieses Wachs lege man die beiden etwa 5 Centimeter langen, 3 Centimeter breiten Spiegel so auf, daß sie auf dem mittleren Wachsstücke zusammenstoßen. Wenn man nun da, wo die beiden Spiegel an einander gränzen, dieselben etwas stärker auf das Wachs drückt als an den beiden Enden, so kann man es leicht dahin bringen, daß ihre beiden Ebenen einen sehr stumpfen Winkel mit einander einschließen, und ob die oben als ganz besonders wichtig hervorgehobene Bedingung rücksichtlich des Aneinanderstoßens der beiden Spiegel gehörig erfüllt ist, davon überzeugt man sich mit hinreichender Genauigkeit dadurch, daß man mit der inneren Seite eines Fingers einige Mal über die Durchschnittslinie der beiden Spiegel hinfährt, wobei man gewiß die Stellen, wo der eine Spiegel noch etwas über den andern hervorspringt, sogleich bemerken und auffinden wird, was man dann durch etwas stärkeres Eindrücken des betreffenden Spiegels in das mittlere Wachsstück sorgfältigst beseitigen und überhaupt dieses einfache Verfahren so oft wiederholen muß, bis die gemeinschaftliche Gränze der beiden Spiegel mit aller nur möglichen Genauigkeit als eine wirkliche gerade Linie sich darstellt, was man dann zum Ueberfluß auch noch mit Hülfe einer Loupe untersuchen kann. Fig. 85. dient zu größerer Versinnlichung der so eben beschriebenen Befestigungsart der beiden Spiegel auf dem Holzklötzchen.

Durch eine kleine runde Oeffnung in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers lasse man nun Sonnenlicht in dasselbe treten, welches mit Hülfe eines Heliostaten in horizontale Lage gebracht worden ist, und concentrire dasselbe mittelst einer Sammellinse zu einem Lichtpunkte, hinter welchem die Strahlen divergirend fortgehen. Man kann das Licht aber auch durch eine feine vertikal stehende Spalte in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers in letzteres treten lassen, und es mittelst eines aus zwei Cylindersegmenten gebildeten Glases, einer sogenannten Cylinderlinse, zu einer feinen Lichtlinie concentriren, hinter welcher die Strahlen divergirend fortgehen. Statt des Sonnenlichts kann man sich auch selbst bloß des Kerzen- oder Lampenlichts bedienen, welches man sich ganz einfach dadurch verschafft, daß man vor die Flamme einer Kerze oder Lampe einen mit einem ganz feinen runden Loche oder einer ganz feinen geradlinigen, vertikal stehenden Spalte versehenen Schirm stellt. Um aber die nachher zu beschreibenden Erscheinungen in größter Reinheit und Einfachheit darzustellen, ist es unbedingt nöthig, mit homogenem oder einfachem Lichte zu operiren, welches man sich leicht entweder dadurch verschafft, daß man das weiße Licht vor seinem Durchgange durch die Oeffnung in dem Fensterladen oder dem Schirme mittelst eines Prismas zerlegt und nur homogenem Lichte von einer bestimmten Farbe den Eintritt in die Oeffnung verstattet, oder auch dadurch, daß man

Digitized by Google

die nachher zu beschreibende Erscheinung durch farbige Gläser oder gefärbte Flüssigkeiten, welche nur homogenes Licht durchlassen, betrachtet.

Läßt man nun auf die beiden vertikal aufgestellten Spiegel in möglichst schiefer Lage gegen dieselben homogenes Licht fallen, so entstehen in den beiden Spiegeln zwei sehr nahe bei einander liegende Bilder des Lichtpunktes oder des Lichtstreifens, welche man in einer beliebigen, aber etwas großen, Entfernung von den beiden Spiegeln mit Hülfe einer Loupe betrachten kann. Thut man dies, so bemerkt man zwischen den beiden Bildern eine Reihe heller, mit der Durchschnittslinie der beiden Spiegel paralleler Streifen von der Farbe des eintretenden Lichts, welche durch dunkele Zwischenräume oder Streifen von einander getrennt sind. Diese Streifen nennt man Interferenzstreifen, und die ganze so eben in ihren ersten und einfachsten Grundzügen beschriebene Erscheinung heißt das Interferenzphänomen, hergenommen von dem englischen Worte to interfere, welches sich verwickeln, sich einmischen, zusammentreffen u. dergl. bedeutet, wobei wir zugleich bemerken wollen, daß diese Benennungen von dem englischen Physiker Thomas Young eingeführt worden sind, welcher zuerst im Jahre 1800 die Aufmerksamkeit der Physiker wieder auf die merkwürdigen Interferenzerscheinungen leitete, nachdem schon ein älterer italienischer Physiker und Mathematiker, der Jesuit Grimaldi, hierher gehörende Erscheinungen beobachtet und in seiner Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride libri duo. Bologna. 1665. beschrieben hatte, die aber größtentheils in Vergessenheit gerathen waren, bis sie, wie gesagt, zuerst Thomas Young wieder an's Licht zog, weiter entwickelte, und ihre große Bedeutung für die gesammte Lehre vom Lichte auf das Deutlichste nachwies, worüber in einem späteren Kapitel dieses Werks das Weitere vorkommen wird. Man kann die Interferenzstreifen auch auf einer weißen Tafel oder mattgeschliffenen Glasplatte sich darstellen lassen, was in vielen Fällen die Deutlichkeit noch erhöhen dürfte.

Vorzüglich verdient hat sich aber Fresnel um das Interferenzphänomen gemacht, einmal durch die oben beschriebene sehr schöne Art der Anstellung des Fundamentalversuchs, dann aber auch, und zwar nach unserer Ueberzeugung vorzüglich, dadurch, daß er zuerst mittelst einer an der Loupe angebrachten mikrometrischen Vorrichtung, das ganze Phänomen einer mit der größten Sorgfalt und Genauigkeit angestellten Messung unterworfen, und dadurch die Möglichkeit herbeigeführt hat, die specielleren bei dem Phänomene sich zeigenden Umstände und Verhältnisse, von denen bis jetzt absichtlich noch gar nicht die Rede gewesen ist, da wir für's Erste die Erscheinung dem Leser nur in ihrer allgemeinsten Gestalt vor die Augen führen wollten, auf bestimmte mathematische Ausdrücke zu bringen, und dem ganzen Phänomen überhaupt eine sichere mathematische Grundlage zu geben. Bevor wir aber zu dieser höchst wichtigen

Digitized by Google

näheren Charakterisirung des Phänomens im Einzelnen übergehen können, ist es nöthig, die folgende allgemeine geometrische Betrachtung über die beiden von einem leuchtenden Punkte in zwei gegen einander geneigten Spiegeln entstehenden Bilder vorauszuschicken, weil dieselbe allem Folgenden zur Grundlage dient.

§. 120.

Seien daher in Fig. 86. OM und OM′ die Durchschnittslinien der beiden gegen einander geneigten Spiegel mit der Ebene des Papiers, auf welcher dieselben senkrecht stehend angenommen werden, und S sei ein leuchtender Punkt vor denselben. Die Bilder Σ und Σ' dieses leuchtenden Punktes in den beiden Spiegeln OM und OM′ erhält man nach einem bekannten katoptrischen Satze, wenn man von dem leuchtenden Punkte S auf OM und OM′ die Perpendikel SN und SN′ fällt, dieselben über N und N′ hinaus verlängert, und $N\Sigma = SN$, $N'\Sigma' = SN'$ macht.

Verbindet man nun die beiden Bilder Σ und Σ' durch die gerade Linie $\Sigma\Sigma'$, halbirt dieselbe in A, und zieht durch A und O die gerade Linie AB, so erhellet sehr leicht, daß diese Linie jederzeit auf der Linie $\Sigma\Sigma'$ senkrecht steht. Denkt man sich nämlich die Linien OS, $O\Sigma$, $O\Sigma'$ gezogen, so ist, weil die Linien ON und ON′ nach der Construction auf den Linien $S\Sigma$ und $S\Sigma'$ in deren Mittelpunkten N und N′ senkrecht stehen, $OS = O\Sigma$ und $OS = O\Sigma'$, also $O\Sigma = O\Sigma'$, und folglich, weil nach der Voraussetzung A der Mittelpunkt von $\Sigma\Sigma'$ ist, AO oder AB senkrecht auf $\Sigma\Sigma'$, wie bewiesen werden sollte. Weil die Linien OS, $O\Sigma$, $O\Sigma'$ einander gleich sind, so kann man sich mit denselben als Halbmesser um O als Mittelpunkt einen durch die Punkte S, Σ, Σ' gehenden Kreis beschrieben denken, und schließt dann sogleich aus dem bekannten Satze vom Centri- und Peripherie-Winkel, wenn beide auf demselben Bogen stehen, daß der Winkel $\Sigma O\Sigma'$ doppelt so groß als der Winkel $\Sigma S\Sigma'$, oder daß jeder der beiden nach dem Vorhergehenden offenbar einander gleichen Winkel $AO\Sigma$ und $AO\Sigma'$ dem Winkel $\Sigma S\Sigma'$ gleich ist. Bezeichnen wir nun den, den Winkel MOM′ zu 180° ergänzenden spitzen Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander durch i, so ist in dem Vierecke SNON′, dessen an den Punkten N und N′ liegende Winkel nach dem Obigen rechte Winkel sind, nach einem bekannten geometrischen Satze

$$\angle\, \Sigma S\Sigma' + (180° - i) = 180°,$$

also der Winkel $\Sigma S\Sigma' = i$, und folglich nach dem Vorhergehenden auch jeder der beiden einander gleichen Winkel $AO\Sigma$ und $AO\Sigma'$ dem Winkel i gleich. Bezeichnen wir also die Entfernung OS des leuchtenden Punktes S von dem Punkte O durch E, so erhält man, weil $OS = O\Sigma = O\Sigma'$ ist, in den beiden Dreiecken $AO\Sigma$ und $AO\Sigma'$ auf der Stelle

$$AO = E \cos i$$

Digitized by Google

und

$$A\Sigma = A\Sigma' = E \sin i$$

oder

$$\Sigma\Sigma' = 2E \sin i .$$

Hieraus erhellet nun zuvörderst, daß, wenn man die Entfernung des leuchtenden Punktes S von dem Punkte O und den spitzen Neigungswinkel der beiden Spiegel gegen einander genau gemessen hat, daraus die Linien AO und $\Sigma\Sigma'$, oder die Hälften $A\Sigma$ und $A\Sigma'$ der letzteren, leicht berechnet werden können. Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden

$$AO = m \text{ und } A\Sigma = A\Sigma' = n ,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$m = E \cos i \text{ und } n = E \sin i$$

setzen.

Ist nun Ω eine beliebige Stelle des Auges, wo dasselbe von den von dem leuchtenden Punkte S ausgehenden und von den beiden Spiegeln in P und P′ reflectirten Strahlen $SP\Omega$ und $SP'\Omega$ getroffen wird, so sind $SP + P\Omega$ und $SP' + P'\Omega$ die Wege, welche diese Strahlen durchlaufen müssen, um von dem leuchtenden Punkte S bis zu dem Auge in Ω zu gelangen, und es ist also, wenn wir diese beiden Wege durch w und w′ bezeichnen,

$$w = SP + P\Omega \text{ und } w' = SP' + P'\Omega .$$

Die Linien $P\Omega$ und $P'\Omega$ gehen aber nach bekannten katoptrischen Gesetzen, wenn man sie über die Punkte P und P′ hinaus verlängert, respective durch die Punkte Σ und Σ', und es ist $SP = \Sigma P$, $SP' = \Sigma' P'$, also nach dem Obigen

$$w = \Sigma P + P\Omega = \Sigma\Omega , \quad w' = \Sigma' P' + P'\Omega = \Sigma'\Omega .$$

Denken wir uns jetzt die Lage des Orts Ω des Auges in Bezug auf den Punkt O als Anfang und die Linie OB als den positiven Theil der Abscissenaxe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems durch die Abscisse x und die Ordinate y bestimmt, wobei wir der Einfachheit wegen x und y, eben so wie schon vorher m und n, immer als positiv annehmen wollen, so ist offenbar in Bezug auf den in der Figur dargestellten, freilich nur speciellen Fall:

$$w^2 = (m+x)^2 + (n+y)^2 ,$$
$$w'^2 = (m+x)^2 + (n-y)^2 ;$$

also

$$w = \sqrt{(m+x)^2 + (n+y)^2} ,$$
$$w' = \sqrt{(m+x)^2 + (n-y)^2} ;$$

und die Wege w und w′ können also aus den Größen m, n, x, y, d. h. nach dem Obigen aus den Größen i, E, x, y, bestimmt werden.

Digitized by Google

Weil

$$w = (m+x)\sqrt{1+\left(\frac{n+y}{m+x}\right)^2},$$

$$w' = (m+x)\sqrt{1+\left(\frac{n-y}{m+x}\right)^2}$$

ist, und im vorliegenden Falle die Brüche

$$\frac{n+y}{m+x} \text{ und } \frac{n-y}{m+x}$$

immer der Null außerordentlich nahe kommen, so kann man mit einer hier völlig hinreichenden Annäherung

$$w = (m+x)\left\{1+\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+y}{m+x}\right)^2\right\},$$

$$w' = (m+x)\left\{1+\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-y}{m+x}\right)^2\right\};$$

also

$$w - w' = \frac{2ny}{m+x}$$

setzen. Bezeichnet man aber den in Theilen der Einheit ausgedrückten Winkel BAΩ durch ω, so ist offenbar

$$y = (m+x)\,\text{tang}\,\omega,$$

und folglich, wegen der großen Kleinheit von ω, näherungsweise, aber hier hinreichend genau,

$$y = (m+x)\,\omega.$$

Also ist nach dem Obigen

$$w - w' = 2n\omega,$$

mittelst welcher Formel man, wenn man nur n und ω kennt, die Differenz $w - w'$ der beiden Wege w und w' mit großer Leichtigkeit berechnen kann.

Zur Kenntniß des kleinen Winkels i kann man auf verschiedenen Wegen gelangen; das zweckmäßigste Verfahren, denselben zu bestimmen, scheint mir jedoch folgendes zu sein. Man bringe das Fernrohr eines vorher gehörig berichtigten und sorgfältig aufgestellten Theodoliten in horizontale Lage, stelle in einer großen Entfernung von dem Theodoliten die Spiegel, die wir wenigstens sehr nahe als gleich groß annehmen, vertikal auf, und bringe den Vertikalfaden des Fadenkreuzes des Theodoliten mit der vertikalen Durchschnittslinie der beiden Spiegel zur Coincidenz. Hierauf drehe man die Spiegel nach und nach so lange um ihre vertikale Durchschnittslinie, bis man, den Vertikalfaden des Fadenkreuzes des Theodoliten successive mit den beiden äußersten vertikalen Kanten der Spiegel zur Coin-

Digitized by Google

cidenz bringend, die auf dem Limbus des Theodoliten abgelesenen Abweichungen φ und φ' der Visirlinie des Fernrohrs von ihrer ursprünglichen auf die Durchschnittslinie der beiden Spiegel gerichteten Lage auf beiden Seiten derselben möglichst genau einander gleich findet, und messe dann sowohl die Längen λ und λ' der beiden Spiegel, als auch die Entfernung ϱ des Mittelpunkts des Theodoliten von der Durchschnittslinie der beiden Spiegel. Berechnet man dann mittelst der Proportionen

$$\lambda : \varrho = \sin\varphi : \sin\psi,$$
$$\lambda' : \varrho = \sin\varphi' : \sin\psi';$$

oder mittelst der Gleichungen

$$\sin\psi = \frac{\varrho}{\lambda}\sin\varphi, \quad \sin\psi' = \frac{\varrho}{\lambda'}\sin\varphi'$$

die beiden Winkel ψ und ψ', deren Bedeutung leicht von selbst erhellen wird, so folgt aus dem bekannten Satze, daß die Summe der vier Winkel eines jeden Vierecks vier rechte Winkel beträgt, sogleich die Gleichung

$$\varphi + \varphi' + \psi + \psi' + (180° - i) = 360°,$$

also

$$i = \varphi + \varphi' + \psi + \psi' - 180°,$$

mittelst welcher Formel demnach der Winkel i berechnet werden kann. Wegen der großen Kleinheit der Winkel φ und φ' werden in Folge der Formeln

$$\sin\psi = \frac{\varrho}{\lambda}\sin\varphi, \quad \sin\psi' = \frac{\varrho}{\lambda'}\sin\varphi'$$

selbst merkliche Fehler in der Bestimmung der Verhältnisse $\frac{\varrho}{\lambda}$ und $\frac{\varrho}{\lambda'}$ keinen sehr merklichen Einfluß auf die Bestimmung der Winkel ψ und ψ' ausüben.

Es würden sich leicht noch andere Methoden zur Bestimmung des Winkels i angeben lassen; jedoch mag hier das Vorhergehende genügen, indem es uns an diesem Orte hauptsächlich darauf ankam, die Möglichkeit einer mathematisch strengen und mit den gebräuchlichen Instrumenten leicht praktisch ausführbaren Bestimmung des in Rede stehenden Winkels zu zeigen.

§. 121.

Nach dieser nothwendigen Vorbereitung wollen wir nun das vorher bloß im Allgemeinen beschriebene Interferenzphänomen in allen seinen Einzelheiten genau kennen zu lernen suchen.

1. Was zuerst die gegenseitige Lage der hellen und dunkeln Streifen betrifft, so liegt in der Mitte zwischen den beiden Bildern des Lichtpunktes oder des Lichtstreifens jederzeit ein

Digitized by Google

heller Streifen, und auf dessen beiden Seiten sind die übrigen hellen und dunkeln Streifen symmetrisch vertheilt, in der Weise, daß, was sich nach dem Obigen von selbst versteht, zwei helle Streifen immer durch einen dunkeln Streifen von einander geschieden sind. Helle und dunkele Streifen, welche von dem in der Mitte liegenden hellen Streifen auf beiden Seiten desselben gleich weit entfernt sind, sollen im Folgenden helle und dunkele Streifen von derselben Ordnung genannt werden, und zwar sollen in beiden Fällen die am nächsten bei dem mittleren hellen Streifen liegenden Streifen der ersten Ordnung, die nächst folgenden der zweiten Ordnung, die dann folgenden der dritten Ordnung, u. s. w. angehören; der mittlere helle Streifen selbst aber soll unter den hellen Streifen die nullte Ordnung bilden.

2. Wenn man die Entfernungen der Mitten der einerlei Ordnung angehörenden hellen oder dunkeln Streifen von einander mißt, so liefern die Hälften dieser Entfernungen die Entfernungen der Mitten der betreffenden Streifen von der Mitte des mittleren hellen Streifens, wodurch man augenscheinlich unmittelbar für die betreffenden Streifen die im vorhergehenden Paragraphen durch ω bezeichnete Größe erhält, und daraus ferner nach der in diesem Paragraphen gegebenen Anleitung die Differenz $w - w'$ der Wege berechnen kann, welche die von dem bei dem Versuche gebrauchten Lichtpunkte oder demselben Lichtstreifen ausgehenden und in der Mitte des betreffenden Streifens zusammentreffenden Strahlen, bis Letzteres geschieht, von ihrem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte an zurückgelegt haben. Bezeichnen wir nun die auf diese Weise bestimmten Werthe von $w - w'$ für die hellen Streifen der

0ten, 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ...

Ordnung respective durch

$$L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, \ldots;$$

für die dunkeln Streifen der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ...

Ordnung dagegen respective durch

$$L_1', L_2', L_3', L_4', L_5', \ldots;$$

so haben rücksichtlich dieser Werthe der Differenz $w - w'$ die Versuche auf völlig unzweideutige und unzweifelhafte Weise Folgendes gelehrt.

a. Für homogenes Licht von derselben Farbe ist, unter welchen Verhältnissen man die Versuche auch anstellen mag, immer

$$L_0 : L_1 : L_2 : L_3 : L_4 : \ldots = 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : \ldots,$$

dagegen

$$L_1' : L_2' : L_3' : L_4' : L_5' : \ldots = 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : \ldots.$$

Digitized by Google

b. Für homogenes Licht von derselben Farbe findet man, unter welchen Verhältnissen man den Versuch auch anstellen, und namentlich in welche Stelle des Raums man auch das Auge bringen mag, sowohl für L_1, als auch für L_1', immer denselben constanten Werth, und rücksichtlich des gegenseitigen Verhältnisses dieser beiden constanten Werthe ergiebt sich auf völlig unzweideutige Weise das merkwürdige Resultat, daß immer der constante Werth von L_1' genau halb so groß als der constante Werth von L_1 ist.

Bezeichnen wir also für homogenes Licht von einer bestimmten Farbe den constanten Werth von L_1 durch L, so ist nach a. jederzeit

$$L_0 = 0L,\ L_1 = 1L,\ L_2 = 2L,\ L_3 = 3L,\ \ldots.$$

oder

$$L_0 = \tfrac{0}{2}L,\ L_1 = \tfrac{2}{2}L,\ L_2 = \tfrac{4}{2}L,\ L_3 = \tfrac{6}{2}L,\ \ldots.$$

und

$$L_1' = \tfrac{1}{2}L,\ L_2' = \tfrac{3}{2}L,\ L_3' = \tfrac{5}{2}L,\ L_4' = \tfrac{7}{2}L,\ \ldots.;$$

also ist überhaupt für die hellen Streifen der kten Ordnung:

$$L_k = kL,$$

dagegen für die dunkeln Streifen der kten Ordnung:

$$L_k' = \frac{2k-1}{2}L.$$

c. Für homogenes Licht von verschiedener Farbe ändert sich der Werth von L, und zwar ist derselbe für rothes Licht am größten, für violettes Licht am kleinsten. Nach Fresnel (m. s. Cours de Physique de l'école politechnique par G. Lamé. Tome deuxième. Première Partie. Paris. 1836. p. 323.) ist

für violettes	Licht	L	$= 0^{mm},000423$
„ indigofarbiges	„		$= 0^{mm},000449$
„ blaues	„		$= 0^{mm},000475$
„ grünes	„		$= 0^{mm},000512$
„ gelbes	„		$= 0^{mm},000551$
„ orangefarbiges	„		$= 0^{mm},000583$
„ rothes	„		$= 0^{mm},000620$

d. Aus b. und den im vorhergehenden Paragraphen angestellten geometrischen Betrachtungen ergiebt sich auf der Stelle, daß für eine continuirliche Veränderung des Orts des Auges der geometrische Ort der einerlei Ordnung angehörenden Streifen eine Curve von solcher Beschaffenheit ist, daß die Differenz der Entfernungen ihrer durch die in Rede stehenden Streifen dargestellten Punkte von den beiden Bildern des bei den Versuchen gebrauchten Lichtpunktes oder Lichtstreifens eine constante Größe ist. Eine solche Curve gehört aber zu der Klasse der

Digitized by Google

Kegelschnitte oder der Linien des zweiten Grades oder der zweiten Ordnung, und wird in der Geometrie eine Hyperbel genannt. Die in Fig. 86. durch Σ und Σ' bezeichneten Bilder des bei den Versuchen gebrauchten Lichtpunktes oder Lichtstreifens heißen die beiden Brennpunkte dieser Hyperbel; und der Mittelpunkt A der die beiden Brennpunkte verbindenden geraden Linie wird ihr Mittelpunkt genannt. Nach dem Vorhergehenden ist also für eine continuirliche Veränderung des Orts des Auges der geometrische Ort der einerlei Ordnung angehörenden Streifen eine Hyperbel, deren Brennpunkte die beiden Bilder des bei dem Versuche gebrauchten Lichtpunktes oder Lichtstreifens sind, und deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der diese beiden Bilder mit einander verbindenden geraden Linie ist. Außer durch die Lage der beiden Brennpunkte wird natürlich die Lage und Gestalt dieser Hyperbel auch noch vorzüglich durch die Größe der constanten Differenz der Entfernungen ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten bestimmt, und da diese Differenz für die Streifen verschiedener Ordnungen nach dem Obigen verschieden ist, so gehören die Streifen verschiedener Ordnungen natürlich verschiedenen Hyperbeln an, welche aber alle dieselben Brennpunkte haben.

§. 122.

Wenn man die von dem einen Spiegel reflectirten Strahlen mit einem Schirme auffängt, und bloß den von dem andern Spiegel zurückgeworfenen Strahlen den Zugang verstattet, so verschwindet das Interferenzphänomen augenblicklich völlig, d. h. es zeigen sich keine Streifen mehr, sondern nur ein durch die von dem nicht verdeckten Spiegel reflectirten Strahlen gleichförmig erleuchteter Raum. Hieraus und aus allem Vorhergehenden ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, daß das Interferenzphänomen nur durch ein Zusammentreffen der von zwei verschiedenen Lichtquellen kommenden Strahlen entsteht, und daß ein Zusammentreffen solcher Strahlen nothwendig erforderlich ist, wenn dasselbe sich zeigen soll, wobei es kaum nöthig sein dürfte, noch besonders darauf aufmerksam zu machen, daß die bei dem vorher erörterten Versuche zusammentreffenden und dadurch zur Entstehung der Interferenzstreifen Veranlassung gebenden Strahlen, wenn dieselben allerdings auch eigentlich nur von einer Lichtquelle, nämlich von dem bei dem Versuche gebrauchten Lichtpunkte oder Lichtstreifen, ausgehen, sich doch ganz so verhalten und ganz so betrachtet werden können, als wenn sie geradlinig, d. h. ohne alle Reflexion, von zwei Lichtquellen, nämlich von den beiden Bildern des bei dem Versuche gebrauchten Lichtpunktes oder Lichtstreifens, ausgegangen wären, was sich aus den in den vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen ganz von selbst ergiebt. Ueberlegt man dies, und faßt das ganze Interferenzphänomen nochmals vollständig in's Auge, so wird man sogleich zu dem Schlusse geführt werden,

Digitized by Google

daß zusammentreffende, von verschiedenen Lichtquellen ausgegangene Lichtstrahlen an der Stelle ihres Zusammentreffens unter gewissen Bedingungen verstärktes Licht, unter gewissen Bedingungen dagegen geschwächtes Licht, ja selbst völlige Dunkelheit, erzeugen können, indem dem ersten Falle die hellen, dem zweiten Falle die dunkeln Streifen bei dem Interferenzphänomene auf die deutlichste und unzweideutigste Weise entsprechen. So paradox dies auch allerdings im ersten Augenblicke klingt, so ist doch gerade dieses Resultat eine Hauptstütze der neueren Theorie über die Natur des Lichts geworden, und wird in einem der folgenden Kapitel aus dieser Theorie vollständig und auf die schönste und deutlichste Weise erklärt werden, indem wir für jetzt unser Augenmerk durchaus bloß darauf gerichtet haben, uns eine genaue Kenntniß der Erscheinungen an sich und der bei denselben vorkommenden besondern Umstände zu verschaffen, ohne uns schon hier auf eine Erklärung derselben einzulassen, was, wie gesagt, ganz einem der folgenden Kapitel vorbehalten bleibt.

Noch bestimmter und mathematisch genauer läßt sich aber nach dem Obigen das vorhergehende, aus einer sorgfältigen Betrachtung des Interferenzphänomens gezogene Resultat, welches nach den gegenwärtig so vervielfältigten höchst genauen und sorgfältigen Untersuchungen mehrerer ausgezeichneter Physiker mit Recht mit dem Namen eines Naturgesetzes belegt werden kann, auf folgende Art aussprechen:

Wenn zwei von verschiedenen Lichtquellen kommende homogene Lichtstrahlen mit einander unter einem sehr spitzen Winkel zusammentreffen, so verstärken oder schwächen, ja vernichten, sie sich an der Stelle des Zusammentreffens gegenseitig, jenachdem der Unterschied ihrer von den beiden Lichtquellen bis zu ihrem Zusammentreffen durchlaufenen Wege ein gerades oder ein ungerades Vielfaches der Hälfte der im Obigen durch L bezeichneten, für jedes homogene Licht von derselben Farbe constanten, Größe ist.

§. 123.

Wenn man den Versuch mit weißem, also nicht homogenem oder zusammengesetztem, Lichte anstellt, so erblickt man nur eine Reihe mit der Durchschnittslinie der beiden Spiegel paralleler heller, jedoch mehr oder weniger verwaschener, Streifen von verschiedenen Farben, die jedoch auch nicht in völliger Reinheit hervortreten, was sich leicht aus dem Umstande erklärt, daß der Werth von L für die verschiedenen Farben von verschiedener Größe ist. Fassen wir nämlich z. B. den in dem weißen Lichte enthaltenen rothen Strahl in's Auge, so ist nach dem Obigen für denselben

$$L = 0^{mm},000620$$

Digitized by Google

also

$$\tfrac{1}{2}L = 0^{mm},000310;$$

und für die dem rothen Lichte entsprechenden dunkeln Streifen der zweiten Ordnung ist folglich nach dem Obigen

$$w - w' = L_2' = \tfrac{1}{2}L = 0^{mm},000930;$$

daher ist nach §. 120. für diese Streifen

$$\omega = \frac{w - w'}{2n} = \frac{0^{mm},000930}{2n}.$$

Für den in dem weißen Lichte enthaltenen blauen Strahl ist nun

$$L = 0^{mm},000475;$$

also

$$\tfrac{1}{2}L = 0^{mm},000237;$$

und für die dem blauen Lichte entsprechenden hellen Streifen der zweiten Ordnung ist folglich nach dem Obigen

$$w - w' = L_2 = \tfrac{1}{2}L = 2L = 0^{mm},000950;$$

daher ist nach §. 120. für diese Streifen

$$\omega = \frac{w - w'}{2n} = \frac{0^{mm},000950}{2n}.$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so wird man sich überzeugen, daß die dem in dem weißen Lichte enthaltenen blauen Strahle entsprechenden hellen blauen Streifen der zweiten Ordnung wenigstens nahe mit den dem in dem weißen Lichte enthaltenen rothen Strahle entsprechenden dunkeln Streifen derselben Ordnung zusammenfallen müssen, und wird sich gewiß schon aus diesem einen Beispiele die oben angegebene Beschaffenheit des Interferenzphänomens bei der Anwendung weißen Lichts vollständig erklären können, ohne daß wir uns in weitere Berechnungen über diesen Gegenstand einzulassen brauchen. Zugleich aber wird sich auch aus der vorhergehenden Betrachtung ergeben, wie nothwendig es ist, bei Interferenzversuchen bloß homogenes Licht von einer bestimmten Farbe, mit der man dann beliebig abwechseln kann, anzuwenden, wenn die Interferenzerscheinungen mit vollständiger Reinheit und Bestimmtheit hervortreten, und in ihrer ganzen Schönheit sich darstellen sollen.

§. 124.

Eine andere Methode, den Interferenzversuch anzustellen, hat Thomas Young angegeben, die zwar bei Weitem nicht so schön wie der Fresnel'sche Spiegelversuch das Phänomen darstellt, hier aber doch, weil sie einfacher ist als letzterer, etwas genauer beschrieben zu werden verdient.

Digitized by Google

Durch zwei äußerst feine und einander sehr nahe kreisförmige Oeffnungen oder vertikale Spalten O und O′ (Fig. 87.) in einem Schirme aus Zinnfolie läßt man das Sonnenlicht, nachdem es durch eine vor den Oeffnungen aufgestellte gefärbte Glastafel, welche nur homogenes Licht von einer bestimmten Farbe durchläßt, gegangen ist, in ein verfinstertes Zimmer treten, und fängt in demselben die durch beide Oeffnungen eintretenden und sich durchkreuzenden Strahlen in einer etwas großen Entfernung von den beiden Oeffnungen O und O′ mit einer weißen Tafel oder einer mattgeschliffenen Glastafel auf, so stellt auf derselben das Interferenzphänomen, so wie es schon im Obigen ausführlich beschrieben worden ist, gleichfalls sich dar, und die Entfernungen der Mitten der Interferenzstreifen von der Mitte des mittleren hellen Streifens können auch hier einer Messung unterworfen werden.

Bezeichnen wir nun die Entfernung der Tafel von der die beiden Oeffnungen O und O′ verbindenden geraden Linie OO′ durch a, und die Entfernung der beiden Oeffnungen von einander durch 2e, welche beide Elemente genau gemessen werden müssen, die Entfernung der Mitte eines Interferenzstreifens von der Mitte des mittleren Interferenzstreifens durch u, die Entfernungen der Mitte jenes Interferenzstreifens von den beiden Oeffnungen O und O′ aber durch w und w′; so ist offenbar nach dem pythagoräischen Lehrsatze mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander jederzeit:

$$w = \sqrt{a^2 + (e \mp u)^2}, \quad w' = \sqrt{a^2 + (e \pm u)^2};$$

mittelst welcher Formeln sich also die Wege w und w′ des Lichts von seinem Eintritte durch die beiden Oeffnungen bis zur Durchkreuzungsstelle in der Mitte des betreffenden Interferenzstreifens aus den gemessenen Größen a, e, u berechnen lassen, und also auch deren Differenz, auf welche nach dem Obigen bekanntlich hier Alles ankommt, bestimmt werden kann. Weil jedoch im vorliegenden Falle a im Verhältniß zu e und u, und also auch zu $e \pm u$, immer sehr groß ist, so kann man sich auch mit Näherungsformeln begnügen, indem nämlich

$$w = a\sqrt{1 + \left(\frac{e \mp u}{a}\right)^2}, \quad w' = a\sqrt{1 + \left(\frac{e \pm u}{a}\right)^2}$$

ist, und folglich näherungsweise

$$w = a\left\{1 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{e \mp u}{a}\right)^2\right\}, \quad w' = a\left\{1 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{e \pm u}{a}\right)^2\right\}$$

oder

$$w = a + \frac{(e \mp u)^2}{2a}, \quad w' = a + \frac{(e \pm u)^2}{2a}$$

gesetzt werden kann. Muß man in diesen Formeln die untern Zeichen nehmen, so ist

$$w - w' = \frac{(e + u)^2 - (e - u)^2}{2a},$$

Digitized by Google

also nach einem bekannten Satze

$$w - w' = \frac{(e+u+e-u)\,(e+u-e+u)}{2a},$$

d. i.

$$w - w' = \frac{2eu}{a}.$$

Muß man dagegen in den obigen Formeln die obern Zeichen nehmen, so ist

$$w' - w = \frac{(e+u)^2 - (e-u)^2}{2a},$$

und folglich ganz eben so wie vorher

$$w' - w = \frac{2eu}{a}.$$

Ueber die Folgerungen, welche sich aus diesem Versuche ziehen lassen, braucht hier nichts weiter gesagt zu werden, da Alles, was hierüber zu sagen nöthig wäre, bei dem Fresnel'schen Spiegelversuche schon beigebracht worden ist.

Die oben in §. 119. erwähnten Versuche des Jesuiten Grimaldi, deren auch Newton gedenkt (Optice. Lausannae et Genevae. 1740. p. 251.), gehören zwar vorzugsweise den Beugungserscheinungen an, von denen im folgenden Kapitel ausführlich die Rede sein wird; jedoch hat derselbe schon ganz bestimmt den Satz ausgesprochen: daß ein erleuchteter Körper dunkler werden könne, wenn zu dem ihn schon erleuchtenden Lichte neues Licht hinzutrete, in welchem eigentlich das Princip der Interferenz enthalten ist, und durfte daher auch hier nicht ganz unerwähnt bleiben.

Statt mit Hülfe der Zurückwerfung und der Fresnel'schen Interferenzspiegel kann man das Interferenzphänomen, wie Pouillet zuerst angegeben hat, auch mit Hülfe der Brechung und eines sogenannten Interferenzprismas darstellen. Ein Interferenzprisma ist ein gläsernes Prisma ABC (Fig. 88.), dessen Winkel BAC sehr stumpf ist, und dessen sehr spitze Winkel ABC und ACB einander gleich sind. Die Lichtquelle ist S, und das Prisma muß so aufgestellt werden, daß die Linie SA, wie durch die Figur näher erläutert wird, auf BC senkrecht steht. Das Interferenzphänomen wird an den Durchkreuzungsstellen K mit einer Loupe beobachtet. Gewöhnlich wird das Interferenzprisma, wie Fig. 89. zeigt, in eine Fassung eingeschlossen, und auf einem einfachen Stative M, in welchem es sich aufwärts und abwärts schieben läßt, so wie auch die Loupe auf einem ganz ähnlichen Stative N aufgestellt. Die bloße Erwähnung dieser Methode, die Interferenzversuche anzustellen, kann nach den obigen ausführlichen Erörterungen über die anderen Verfahrungsarten nach Fresnel und Young, von denen die erstere immer die schönste und wichtigste bleibt, hier genügen.

Digitized by Google

Bemerken wollen wir noch zum Schluß dieses Kapitels, daß, wenn man bei dem Fresnel'schen Spiegelversuche die den einen Spiegel treffenden Strahlen vor oder nach der Reflexion durch eine durchsichtige, von parallelen Ebenen begränzte Platte gehen läßt, augenblicklich eine Verrückung der einander parallelen Interferenzstreifen erfolgt, wie sich nach den Gesetzen der Brechung auch von selbst versteht. Unterwirft man diesen ganzen Vorgang der Rechnung, so läßt sich daraus eine Methode ableiten, aus der beobachteten und durch genaue Messung gehörig bestimmten Größe der Verrückung der Interferenzstreifen den Brechungsexponenten für den durchsichtigen Körper zu bestimmen, durch welchen man die Strahlen hindurch gehen läßt. So interessant dieser Gegenstand auch ist, so würden uns doch ausführlichere Entwickelungen über denselben hier zu weit führen, und wir müssen uns daher mit der vorhergehenden kurzen Erwähnung desselben begnügen.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Von den Erscheinungen der Beugung des Lichtes.

§. 125.

Durch eine enge Oeffnung in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers leite man in dasselbe Sonnenlicht, welches man, um wenigstens zuerst mit homogenem Lichte zu operiren und das Phänomen in seiner größten Einfachheit darzustellen, vor seinem Eintritte in die Oeffnung durch ein gefärbtes Glas hat gehen lassen, und concentrire dieses Licht, wie durch Fig. 90. näher erläutert wird, durch eine Sammellinse L von kurzer Brennweite in deren Brennpunkte F, hinter welchem die Strahlen divergirend fortgehen. In den dadurch gebildeten Strahlenkegel bringe man in einiger Entfernung von F einen undurchsichtigen Schirm AB, welchem man eine solche Lage giebt, daß er auf der Linie FA senkrecht steht, und stelle hinter demselben parallel mit ihm eine weiße Tafel oder matt geschliffene ebene Glasplatte MN auf. Bei dieser Einrichtung des Apparats zeigen sich nun die folgenden merkwürdigen Erscheinungen.

1. Wenn C der Durchschnittspunkt der über A hinaus verlängerten Linie FA mit MN ist, so wird, wie es nach dem, was wir früher über den Schatten kennen gelernt haben, eigentlich der Fall sein müßte, der Schatten nicht genau von der Linie AC oder seine Projection auf MN nicht genau von dem

Digitized by Google

Punkte C begränzt, sondern die Erleuchtung der Tafel MN erstreckt sich noch unterhalb C bis auf eine gewisse Weite, wobei man die Lage der hier zur Erläuterung gebrauchten Figur auf dem Papier zu beachten hat, was auch für das Folgende gilt. Die Erleuchtung unterhalb C scheint gewissermaßen bis auf eine gewisse Weite in den Schatten einzudringen.

2. Oberhalb C bemerkt man eine Reihe heller Streifen von der Farbe des eintretenden Lichts, welche durch dunkele Zwischenräume oder Streifen unterbrochen oder von einander getrennt sind. Diese Streifen sind sämmtlich der Schattengränze parallel.

3. Ein jeder heller oder dunkeler Streifen ist in der Mitte am hellsten oder dunkelsten; gegen die Ränder hin nimmt die Helligkeit oder Dunkelheit ab. Auch nimmt die Lebhaftigkeit der Farbenstreifen und die Stärke der Dunkelheit der dunkeln Streifen desto mehr ab, je weiter man sich von C nach oben hin entfernt, bis die Streifen am Ende ganz verschwinden, und eine gleichmäßige Erleuchtung der Tafel eintritt.

4. Die Breite der farbigen Streifen ist nach der Farbe des eintretenden Lichts verschieden. Je größer die Brechbarkeit des Lichts ist, desto schmäler sind die Farbenstreifen; für das violette Licht sind dieselben demnach am schmälsten, für das rothe Licht dagegen am breitesten. Auch nähern sich die Farbenstreifen dem Punkte C desto mehr, je brechbarer das angewandte Licht ist.

5. Die Streifen entstehen am Rande A des Schirms AB und rücken desto weiter aus einander, je weiter man die Tafel MN von dem Schirme AB entfernt. Wenn man in verschiedenen Entfernungen der Tafel MN von dem Schirme AB die entsprechenden Entfernungen der Mitte eines und desselben Streifens von der Linie AC genau mißt und mit den in Rede stehenden Entfernungen der Tafel von dem Schirme vergleicht, so findet man, daß diese Größen einander nicht proportional sind, daß also die betreffenden Punkte von A an bis zur Tafel nicht in geraden Linien liegen können. Vielmehr überzeugt man sich leicht, daß diese Linien krumme Linien sind, welche ihre concave Seite der Linie AC zukehren, wie durch die Figur näher erläutert wird. Um die Natur dieser Curven genauer zu untersuchen, wollen wir in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang A und dessen Abscissenaxe, so daß die positiven Abscissen von A nach C hin genommen werden, die Linie AC ist, die Entfernungen der Tafel von dem Punkte A als Abscissen, die entsprechenden Entfernungen der Mitten der Streifen von der Linie AC als Ordinaten betrachten, und im Allgemeinen die ersteren durch x, die letzteren durch y bezeichnen. Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, und überdies die in Rede stehenden Curven, wie der Augenschein lehrt, die Gestalt von Hyperbeln haben, so wird man, — wobei freilich eigentlich schon einige Bekanntschaft mit der Theorie der Kegelschnitte oder der Linien des zweiten Grades vorausgesetzt werden muß, — leicht darauf

Digitized by Google

geführt, zwischen den Coordinaten x und y die durch die Gleichung

$$y^2 = Ax + Bx^2,$$

wo A und B constante Größen bezeichnen, analytisch ausgedrückte Relation zum Grunde zu legen, und durch genaue Messungen zu prüfen, ob diese Voraussetzung richtig ist, wobei man sich auf folgende Art verhalten kann. Man bestimme durch Messung zwei Paare zusammengehörender Werthe von x, y, welche wir durch x', y' und x'', y'' bezeichnen wollen. Dann hat man, wenn die gemachte Voraussetzung richtig ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$y'^2 = Ax' + Bx'^2,$$
$$y''^2 = Ax'' + Bx''^2;$$

aus denen sich die beiden Constanten A und B durch gewöhnliche algebraische Elimination bestimmen lassen. Nach leichter Rechnung erhält man nämlich:

$$A = \frac{\frac{y'^2}{x'^2} - \frac{y''^2}{x''^2}}{\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}} = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 - \left(\frac{y''}{x''}\right)^2}{\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}},$$

$$B = \frac{\frac{y'^2}{x'} - \frac{y''^2}{x''}}{x' - x''} = \frac{y'\frac{y'}{x'} - y''\frac{y''}{x''}}{x' - x''};$$

oder

$$A = \frac{x'^2 y''^2 - y'^2 x''^2}{x'x''(x' - x'')}, \quad B = \frac{y'^2 x'' - x' y''^2}{x'x''(x' - x'')}.$$

Stellt man nun eine größere Anzahl von Messungen zusammen gehörender Werthe von x und y an, combinirt dieselben auf alle mögliche Arten zu zweien, und bestimmt aus jeder Combination A und B mittelst der vorhergehenden Formeln, so erhält man, natürlich unter Voraussetzung derselben Streifen oder vielmehr von Streifen derselben Ordnung, welchen Ausdruck man leicht verstehen wird, wenigstens sehr nahe für A und B immer dieselben Werthe, wodurch die Richtigkeit der Voraussetzung, von welcher wir ausgegangen sind, bewiesen ist. Nimmt man zwischen allen auf die vorhergehende Art ermittelten Werthen von A und B auf bekannte Weise die arithmetischen Mittel, so erhält man die definitiven Werthe dieser beiden Größen, von denen wir hier nur bemerken wollen, daß dieselben, wie die Messungen und die darauf gegründeten Rechnungen lehren, jederzeit als positiv sich darstellen.

Wenn wir uns zwei Punkte in Bezug auf das im Vorhergehenden zum Grunde gelegte Coordinatensystem durch die Coordinaten

$$\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B} - 1), 0$$

Digitized by Google

und

$$-\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1),\ 0$$

bestimmt denken, die also wegen ihrer verschwindenden Ordinaten beide in der Abscissenaxe liegen, und die Entfernungen eines beliebigen durch die Coordinaten x, y bestimmten Punktes in der durch die Gleichung

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

charakterisirten Curve von diesen Punkten respective durch E und E_1 bezeichnen; so ist offenbar, wie sogleich aus dem pythagoräischen Lehrsatze sich ergiebt:

$$E^2 = \left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1)-x\right\}^2+y^2,$$

$$E_1^2 = \left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1)+x\right\}^2+y^2;$$

also wegen der Gleichung der Curve:

$$E^2 = \left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1)-x\right\}^2+Ax+Bx^2,$$

$$E_1^2 = \left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1)+x\right\}^2+Ax+Bx^2;$$

und folglich, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$E^2=\left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1)\right\}^2+\frac{A}{B}(\sqrt{1+B}-1)\sqrt{1+B}.x+(1+B)x^2,$$

$$E_1^2=\left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1)\right\}^2+\frac{A}{B}(\sqrt{1+B}+1)\sqrt{1+B}.x+(1+B)x^2;$$

d. i., wie man sogleich übersieht:

$$E^2 = \left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1)+\sqrt{1+B}.x\right\}^2,$$

$$E_1^2 = \left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1)+\sqrt{1+B}.x\right\}^2;$$

folglich

$$E = \frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1)+\sqrt{1+B}.x,$$

$$E_1 = \frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1)+\sqrt{1+B}.x.$$

Also ist

$$E_1 - E = \frac{A}{B},$$

und unsere durch die Gleichung

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

Digitized by Google

charakterisirte Curve hat folglich die Eigenschaft, daß die Differenz der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von den beiden durch die Coordinaten

$$\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1), 0$$

und

$$-\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1), 0$$

bestimmten Punkten die constante Größe $\frac{A}{B}$ ist. Daher ist nach §. 121. diese Curve eine Hyperbel, deren Brennpunkte die beiden durch die Coordinaten

$$\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1), 0$$

und

$$-\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1), 0$$

bestimmten Punkte sind.

Die Coordinaten des Mittelpunkts der die beiden Brennpunkte mit einander verbindenden geraden Linie, d. h. nach §. 121. des Mittelpunkts der Hyperbel, sind offenbar

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}-1)-\frac{A}{2B}(\sqrt{1+B}+1)\right\}, 0;$$

d. i.

$$-\frac{A}{2B}, 0;$$

und die Entfernung des Mittelpunkts der Hyperbel von dem Anfange der Coordinaten, welcher in Fig. 90. durch A bezeichnet ist, ist folglich $\frac{A}{2B}$, welche Entfernung also nach dem Obigen der halben Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes der Hyperbel von den beiden Brennpunkten gleich ist.

Den Coefficienten A der ersten Potenz der Abscisse x in der Gleichung

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

der Hyperbel nennt man den Parameter dieser Curve, und bezeichnet ihn in der Lehre von den Kegelschnitten gewöhnlich durch p, so daß also

$$p = A$$

ist. Die constante Differenz der Entfernungen aller Punkte der Hyperbel von ihren beiden Brennpunkten, deren Hälfte nach dem Obigen die Entfernung ihres Mittelpunkts von dem im Vorhergehenden angenommenen Anfange der Coordinaten ist, wird die Hauptaxe der Hyperbel genannt, und gewöhnlich

Digitized by Google

durch $2a$ bezeichnet, so daß also, a die halbe Hauptaxe der Hyperbel, und folglich nach dem Obigen

$$a = \frac{A}{2B}$$

ist. Weil wegen der Gleichungen

$$p = A, \quad a = \frac{A}{2B}$$

offenbar

$$A = p, \quad B = \frac{p}{2a}$$

ist, so kann man durch den Parameter und die Hauptaxe die Gleichung der Hyperbel auf folgende Art ausdrücken:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}.$$

Die mittlere Proportionallinie zwischen der Hauptaxe und dem Parameter wird die Nebenaxe der Hyperbel genannt, und gewöhnlich durch $2b$ bezeichnet, so daß also b die halbe Nebenaxe bezeichnet und nach der gegebenen Erklärung

$$2a : 2b = 2b : p,$$

folglich

$$b^2 = \frac{ap}{2}, \quad b = \sqrt{\frac{ap}{2}};$$

also nach dem Obigen

$$b = \frac{A}{2\sqrt{B}}$$

ist. Die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte der Hyperbel von einander wird die Excentricität derselben genannt, und gewöhnlich durch e bezeichnet, so daß also nach dem Obigen offenbar

$$e = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{2B}\left(\sqrt{1+B} - 1\right) + \frac{A}{2B}\left(\sqrt{1+B} + 1\right)\right\},$$

also, wie leicht erhellet,

$$e = \frac{A}{2B}\sqrt{1+B}$$

ist. Weil

$$a^2 = \frac{A^2}{4B^2}, \quad b^2 = \frac{A^2}{4B}, \quad e^2 = \frac{A^2}{4B^2}(1+B)$$

ist, so ist offenbar

$$e^2 = a^2 + b^2,$$

also

$$e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

mittelst welcher Formel e aus a und b gefunden werden kann.

Digitized by Google

Wenn man den Mittelpunkt der Hyperbel als den Anfang eines neuen rechtwinkligen, dem Systeme der xy parallelen Coordinatensystems der XY annimmt; so muß man, um die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf dieses System zu finden, in der Gleichung

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$$

offenbar für x, y respective $X - a$, Y setzen, wodurch diese Gleichung in die Gleichung

$$Y^2 = p(X - a) + \frac{p(X-a)^2}{2a},$$

also nach einigen leichten Reductionen in die Gleichung

$$Y^2 = \frac{p}{2a} X^2 - \tfrac{1}{2} ap$$

übergeht. Nun ist aber

$$p = \frac{2b^2}{a},$$

also

$$\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \tfrac{1}{2} ap = b^2;$$

und folglich die Gleichung der Hyperbel in dem Systeme der XY:

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2} X^2 - b^2,$$

oder

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(X^2 - a^2),$$

oder

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1.$$

Wenn wir uns durch den Mittelpunkt der Hyperbel zwei durch die Gleichungen

$$Y = \pm \frac{b}{a} X$$

charakterisirte gerade Linien gezogen denken und für dieselbe Abscisse X die entsprechenden Ordinaten dieser geraden Linien und der Hyperbel durch Y′ und Y″ bezeichnen, wobei wir annehmen wollen, daß Y′ und Y″ gleiche Vorzeichen haben sollen, so ist

$$Y'^2 = \frac{b^2}{a^2} X^2, \quad Y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(X^2 - a^2);$$

also

$$Y'^2 - Y''^2 = (Y' - Y'')(Y' + Y'') = b^2;$$

folglich

$$Y' - Y'' = \frac{b^2}{Y' + Y''}.$$

Digitized by Google

Wenn nun der absolute Werth von X in's Unendliche wächst, so wachsen nach den vorhergehenden Gleichungen offenbar auch die absoluten Werthe von Y′ und Y″ in's Unendliche, und weil Y′ und Y″ nach der Voraussetzung gleiche Vorzeichen haben, so wächst auch der absolute Werth von $Y' + Y''$ in's Unendliche, wenn der absolute Werth von X in's Unendliche wächst. Also nimmt nach dem Vorhergehenden der absolute Werth von $Y' - Y''$ in's Unendliche ab, ohne doch jemals völlig zu verschwinden, wenn der absolute Werth von X in's Unendliche wächst. Hieraus sieht man, daß die den ihren absoluten Werthen nach in's Unendliche wachsenden Abscissen X entsprechenden Punkte der Hyperbel sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade den durch die Gleichungen

$$Y = \pm \frac{b}{a} X$$

charakterisirten geraden Linien nähern, ohne doch jemals wirklich in dieselben hinein zu fallen, weshalb man diese beiden durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehenden geraden Linien die Asymptoten derselben genannt hat.

Das Verhältniß oder den Bruch $\frac{A}{B}$ findet man für alle Streifen constant und der Entfernung des Schirms von dem leuchtenden Punkte gleich, woraus sich mittelst des Obigen ergiebt, daß für alle Streifen die Mittelpunkte der Hyperbeln mit dem Mittelpunkte der Entfernung des Schirms von dem leuchtenden Punkte zusammenfallen, und daß für alle diese Hyperbeln die Hauptaxen, also auch die constanten Differenzen der Entfernungen ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten dieselben, nämlich der Entfernung des Schirms von dem leuchtenden Punkte gleich sind. Die Lage der Brennpunkte, und also auch die Excentricität, die Nebenaxe und der Parameter sind aber für alle diese Hyperbeln verschieden.

Die an den Streifen vorzunehmenden Messungen kann man entweder auf der Tafel, auf welcher man dieselben sich darstellen läßt, ausführen, oder auch mit größerer Genauigkeit und Sicherheit, indem man, wie Fresnel that, auf ähnliche Art, wie bei dem Interferenzphänomene, die Streifen unmittelbar ohne Tafel mit einer mit einem genauen mikrometrischen Meßapparate versehenen Loupe beobachtet.

6. Die materielle Beschaffenheit und die Gestalt des bei den Versuchen gebrauchten Schirms hat auf das Phänomen gar keinen Einfluß, so daß dasselbe also nicht etwa in einer besonderen Wirkung, welche die Materie des Schirms auf das Licht ausübt, seine Erklärung finden kann.

7. Die Entfernung des Schirms von dem leuchtenden Punkte hat aber auf das Phänomen einen sehr merklichen Einfluß, indem im Allgemeinen die Streifen desto schmäler werden, und einander desto näher rücken, je weiter man den Schirm von dem leuchtenden Punkte entfernt. Diese Veränderungen,

Digitized by Google

welche das Phänomen durch die verschiedene Entfernung des Schirms von dem leuchtenden Punkte erleidet, sind sehr merklich und lassen sich leicht beobachten. Bei einer Entfernung des Schirms von dem leuchtenden Punkte von 10,100,1000 Millimetern beträgt z. B. der Winkel, welchen die Asymptoten der Hyperbeln der dunkeln Streifen von der ersten und von der zweiten Ordnung mit einander einschließen, respective 16′. 34″, 5′. 15″, 1′. 40″.

8. Wenn man statt des homogenen farbigen Lichtes weißes zusammengesetztes Licht anwendet, so erleidet das Phänomen ganz ähnliche Modificationen wie das Interferenzphänomen in demselben Falle, welche sich auch aus den vorhergehenden Gesetzen auf ganz ähnliche Art wie in §. 123. bei dem Interferenzphänomene erklären lassen, was wir der Kürze wegen füglich dem eignen Nachdenken des Lesers überlassen können.

§. 126.

Wenn man in der Nähe des Brennpunkts F der im Vorhergehenden bei den Versuchen gebrauchten Sammellinse einen sehr schmalen undurchsichtigen Körper, etwa ein Haar oder eine Metallsaite, ausspannt, und dessen Schatten auf einer weißen Tafel oder matt geschliffenen ebenen Glasplatte sich projiciren läßt, so würde die Projection des geometrischen Schattens durch die beiden geraden Linien begränzt werden, in denen die Tafel von zwei durch den Punkt F und die äußersten Kanten des ausgespannten Körpers gelegten Ebenen geschnitten wird, und die Breite der Projection des geometrischen Schattens würde sich, wenigstens mit annähernder Richtigkeit unter Voraussetzung einer sehr geringen Dicke des ausgespannten Körpers verhalten wie die Entfernung der Tafel von dem Punkte F zu der Entfernung des ausgespannten Körpers von dem Punkte F. Statt eines eigentlichen Schattens des ausgespannten Körpers bemerkt man aber außerhalb der beiden geraden Linien, welche die Projection des geometrischen Schattens begränzen sollten, auf beiden Seiten derselben, eine Reihe mit diesen geraden Linien paralleler Streifen, welche abwechselnd hell, von der Farbe des bei dem Versuche gebrauchten Lichts, und dunkel sind. Diese Streifen pflegt man äußere Streifen zu nennen. Aber auch zwischen den beiden geraden Linien, welche die Projection des geometrischen Schattens begränzen sollten, erblickt man ähnliche abwechselnd helle und dunkele Schreifen, welche innere Streifen genannt werden. Die inneren Streifen sind schmäler und schwächer als die äußeren, und verschwinden sogleich, wenn man das an dem einen Rande des ausgespannten undurchsichtigen Körpers vorbeigehende Licht mit einem undurchsichtigen, zwischen die Tafel und den ausgespannten Körper gestellten Schirme auffängt. Auch zeigen die inneren Streifen sich nicht, wenn die Breite des ausgespannten Körpers beträchtlich zunimmt. Im rothen Lichte sind die Streifen breiter wie im violetten, und

Digitized by Google

von einer mittleren Breite bei Anwendung des Lichts von der mittleren Brechbarkeit. Genauere Abmessungen führen auch bei diesem Phänomen zu einem ähnlichen Gesetze der Hyperbeln, wie wir bei dem im Vorhergehenden betrachteten Phänomene gefunden haben, und auch bei der Anwendung des weißen zusammengesetzten statt des farbigen homogenen Lichts treten auch hier ganz ähnliche Modificationen wie die früher bemerkten ein, so daß nämlich in diesem Lichte die Streifen verschiedenartig gefärbt erscheinen.

§. 127.

Durch eine schmale längliche vertikale Oeffnung in dem Fensterladen eines verfinsterten Zimmers lasse man in dasselbe homogenes Licht treten, welches man sich auf die gewöhnliche, aus dem Vorhergehenden hinreichend bekannte Weise verschafft. Dieses Licht lasse man durch eine zweite, die Form eines schmalen Rechtecks habende Oeffnung treten, welche sich in einem Schirme befindet, der aus zwei Metallplatten mit geradlinig zugeschärften Rändern besteht, die man mittelst einer feinen Schraube einander nähern oder von einander entfernen, und dadurch die Oeffnung in diesem Schirme verengern und erweitern kann. Fängt man nun das durch diese Oeffnung in dem Schirme getretene Licht mit einer hinter demselben auf gewöhnliche Weise aufgestellten Tafel auf, so zeigen sich die folgenden Erscheinungen.

1. Das Licht breitet sich stärker auf der Tafel aus, als es die Projection des geometrischen Schattens auf derselben eigentlich zulassen sollte, und es derselben gemäß ist.

2. An der von der mittleren Axe des Lichtbüschels getroffenen Stelle zeigt sich ein heller Streifen von der Farbe des eintretenden Lichts, und auf beiden Seiten desselben erscheinen andere, dem ersteren parallele helle Streifen von derselben Farbe, die durch dunkele Streifen von einander geschieden werden. Helle und dunkele Streifen in gleichen Entfernungen von dem mittleren hellen Streifen auf beiden Seiten desselben werden derselben Ordnung zugezählt, und nach dem früher Dageweseneen wird nun schon von selbst ersichtlich sein, was man unter hellen und dunkeln Streifen der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Ordnung zu verstehen hat.

3. Die Breite der Streifen von derselben Ordnung richtet sich bei übrigens gleichen Umständen nach der Brechbarkeit des eintretenden Lichts, und ist bei dem rothen, d. h. am wenigsten brechbaren, Lichte am größten, bei dem violetten, d. h. am meisten brechbaren, Lichte am kleinsten.

4. Auch hier zeigt sich in ganz ähnlicher Weise wie bei den früheren Versuchen das Gesetz der Hyperbeln, wenn man nur das Phänomen einer genauen Messung unterwirft. Die Hyperbeln sind wie früher immer nur sehr wenig gekrümmt, und können selbst näherungsweise durch ihre Asymptoten ersetzt werden.

Digitized by Google

Eben so lassen sich rücksichtlich der Intensität der Streifen ähnliche Bemerkungen machen wie früher.

5. Je enger die Oeffnung im Schirme ist, desto mehr gewinnen die Streifen an Breite.

6. Fraunhofer, welcher sich vorzüglich mit diesem Phänomene beschäftigt und dasselbe mit einer bewunderungswürdigen Genauigkeit angestellten Messungen unterworfen hat, fand, daß für dieselbe Oeffnung und Farbe die Abstände der Mitten der Streifen von der Mitte des mittleren Streifens auf beiden Seiten desselben in einer arithmetischen Reihe wachsen, deren Differenz ihrem ersten Gliede gleich ist, und daß für verschiedene Oeffnungen die in Rede stehenden Abstände bei den Streifen von derselben Ordnung und Farbe den Breiten der Oeffnungen umgekehrt proportional sind.

7. Die Breite der Oeffnung im Fensterladen des verfinsterten Zimmers ist nur auf die Reinheit, Deutlichkeit und Schärfe von Einfluß; je enger diese Oeffnung ist, desto schärfer und deutlicher stellen die Streifen im Allgemeinen sich dar, und die Breite derselben darf selbst eine gewisse Gränze nicht überschreiten, wenn überhaupt die Streifen erscheinen sollen. Die Oeffnung zu eng zu machen ist jedoch, wegen der dann zu geringen Lichtstärke, auch nicht räthlich, und einige angestellte Proben werden in dieser Beziehung einem Jeden in der Praxis immer leicht und bald das richtige Maaß treffen lehren. Allgemein gültige Vorschriften lassen sich hierüber nicht wohl geben. Von der materiellen Beschaffenheit des bei den Versuchen gebrauchten Schirms zeigt sich übrigens auch dieses Phänomen ganz unabhängig.

8. Wendet man statt des homogenen farbigen Lichts zusammengesetztes weißes Licht an, so treten auch jetzt wieder ganz ähnliche Modificationen wie bei den früheren Versuchen ein, worüber daher hier nichts weiter zu sagen ist.

Eine allgemeine Darstellung des Phänomens für violettes, grünes und rothes Licht liefert Fig. 91. zu näherer Erläuterung dieses Gegenstandes.

Eine sehr große Mannigfaltigkeit und eine große Pracht dieser Erscheinungen läßt sich erreichen, wenn man das Licht nicht bloß durch eine Oeffnung in dem Schirme, sondern durch eine große Anzahl symmetrisch geordneter einander gleicher kleiner Oeffnungen, oder durch sogenannte Gitter treten läßt. Solche Gitter verschafft man sich, wenn man einen feinen Silberdraht oder einen sehr feinen Seidenfaden in die Gänge sehr feiner Schrauben spannt; oder wenn man ein Planglas mit Goldblättchen belegt, und darauf mit einer Stahlspitze gleich weit von einander entfernte Parallellinien radirt; oder auch wenn man mit einer Diamantspitze in ein polirtes Planglas solche Parallellinien zieht, in welchem Falle die Furchen die undurchsichtigen Theile des Gitters darstellen. Besonders prachtvolle Erscheinungen zeigen sich, wenn man zwei solche Gitter sich kreuzen läßt. Selbst eines Stücks Mousselins oder Flors kann man

Digitized by Google

sich zweckmäßig bedienen. Auch die Fahnen der Vogelfedern, wozu besonders die Flügel- oder Schwanzfedern kleinerer Vögel brauchbar sind, zeigen schöne hierher gehörende Erscheinungen. Uebrigens kann man auch diese Versuche sowohl mit homogenem farbigen, als auch mit weißem zusammengesetzten Lichte anstellen; daß aber durch die Anwendung des letzteren die Mannigfaltigkeit und Schönheit der Erscheinungen sehr erhöhet werden muß, versteht sich wegen der Zusammensetzung dieses Lichts aus verschiedenen farbigen Bestandtheilen von selbst. In viele Einzelnheiten über diesen sehr interessanten Gegenstand einzugehen, verstattet die Natur dieses Werks nicht, und scheint uns auch nicht nöthig zu sein, indem einem Jeden, wer selbst praktisch die Hand an's Werk legt, sich nach den vorhergehenden Andeutungen gewiß Mittel und Wege genug ganz von selbst ergeben werden, durch welche es möglich wird, die hierher gehörenden Versuche unter verschiedenen Gestalten anzustellen, und eine möglichst große Mannigfaltigkeit derselben herbeizuführen.

§. 128.

Die Art, die in den vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Versuche anzustellen, gestattet übrigens noch manche Abänderungen, und wenn auch die von uns im Obigen angegebenen Verfahrungsarten, wobei man eines verfinsterten Zimmers nothwendig bedarf, unsern Zwecken am meisten entsprechen, so wollen wir doch nicht unterlassen, dem Vorhergehenden noch die folgenden mehr praktischen Bemerkungen in der Kürze anzuschließen, wobei wir ganz dem Lehrbuche der Physik und Meteorologie von Joh. Müller. Als zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage der Bearbeitung von Pouillet's Lehrbuch der Physik. Erster Band. Braunschweig. 1844. S. 486. folgen, weil in demselben Alles, was wir hier noch nachträglich zu bemerken für nöthig halten, kurz zusammengefaßt ist, und die erforderlichen Apparate deutlich abgebildet sind.

Zuerst wollen wir noch bemerken, daß man die Erscheinungen, wie sie oben hervorzubringen gelehrt worden sind, auch zweckmäßig mit einem Fernrohre beobachten kann.

Fraunhofer setzte die Oeffnung, durch welche er das Licht gehen ließ, unmittelbar vor das Objectiv eines Fernrohrs, welches auf die Lichtquelle gerichtet war, und betrachtete die Erscheinung durch das Ocular.

Die einfachsten Vorrichtungen zur Beobachtung der hierher gehörenden Erscheinungen hat Schwerd angegeben. Die wesentlichste Erleichterung besteht darin, daß er das dunkele Zimmer entbehrlich machte; einen Lichtpunkt lieferte ein inwendig geschwärztes Uhrglas oder ein Metallknopf, eine Lichtlinie ein inwendig geschwärztes Glasröhrchen.

Wenn die Oeffnungen sehr fein sind, so sieht man die Erscheinungen schon sehr schön, wenn man die Oeffnung unmit-

Digitized by Google

telbar vor das Auge hält und nach dem Lichtpunkte hin sieht. Solche feine Oeffnungen kann man nach Schwerd's Angabe am leichtesten in Staniolblättchen machen. Kreisförmige Oeffnungen macht man mit Hülfe einer feinen Nadel. Legt man ein Blättchen Staniol auf eine Glasplatte, so kann man mit der Spitze eines scharfen Federmessers einen kurzen feinen Spalt einschneiden; eine parallelogrammatische Oeffnung erhält man, wenn man zwei mit einem feinen Spalte versehene Staniolblättchen queer über einander legt; um eine dreieckige Oeffnung zu erhalten, legt man drei Staniolblättchen so auf einander, daß ihre Ränder nur eine sehr kleine dreieckige Oeffnung zwischen sich lassen.

Um die Staniolblättchen gehörig zu schützen und bequem zu den Versuchen anwenden zu können, werden sie mit ihrem Rande auf einen Ring von Messingblech, welcher in Fig. 92. ungefähr in der halben natürlichen Größe dargestellt ist, aufgeklebt.

Auch die größeren Oeffnungen, wie man sie zu Versuchen mit dem Fernrohre anwendet, werden aus Staniolblättchen ausgeschnitten, die ebenfalls auf einen Ring von Messingblech geklebt, und in einer Fassung von Holz befestigt sind, die an das Ende des Fernrohrs paßt, durch welches man beobachten will.

Die Art und Weise, wie man die Oeffnungen vor dem Fernrohre anbringt, zeigt Fig. 93. A ist das Objectivende des Fernrohrs, auf welches ein Holzring B aufgesteckt wird, dessen innere Höhlung mit Leder ausgefüttert ist, damit der etwas conische Holzring C, welcher die Oeffnung trägt, ganz genau hinein paßt. In diesen letzteren Holzring ist der Messingrahmen mit dem Staniolblättchen, in welches die Oeffnungen eingeschnitten sind, eingelassen.

Wenn man mit dem Fernrohre beobachtet, muß es so weit ausgezogen werden, daß man den Lichtpunkt deutlich sieht, und auch bei der Beobachtung mit bloßem Auge muß man sich in einer solchen Entfernung vom Lichtpunkte aufstellen, daß man ihn deutlich sehen kann.

§. 129.

Die sämmtlichen in diesem Kapitel beschriebenen Erscheinungen werden gegenwärtig Beugungserscheinungen genannt, indem man dabei von der Ansicht ausgeht, daß das Licht bei seinem Vorübergange an den Rändern undurchsichtiger Körper eine Ablenkung von seinem geradlinigen Wege, eine sogenannte Beugung oder Inflexion erleide. Der Jesuit Grimaldi, welcher diese Erscheinung zuerst beobachtete und in der schon in §. 119. angeführten Schrift beschrieb, nannte dieselbe Diffraction, eine Benennung, welche sich auch jetzt noch, namentlich in den Schriften französischer Physiker, erhal-

Digitized by Google

ten hat. Vorzüglich durch Young, Fresnel, Herschel, Fraunhofer, Schwerd und einige andere Physiker und Mathematiker ist diese ganze Lehre von der Beugung des Lichts auf ihren jetzigen Standpunkt hoher Vervollkommnung und Ausbildung geführt, und die Erscheinungen sind nach und nach sehr vervielfältigt worden, so daß diese Lehre namentlich auch in experimenteller Rücksicht gegenwärtig als eine der schönsten und interessantesten der ganzen Physik betrachtet werden muß.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Von den Erscheinungen der Polarisation des Lichts.

§. 130.

Man denke sich zwei Glasplatten S und S_1, welche auf ihren Rückseiten geschwärzt und mit ihren spiegelnden Flächen gegen einander gekehrt sind. Fällt nun auf die spiegelnde Fläche der einen S dieser beiden Glasplatten von einem leuchtenden Punkte B ein Lichtstrahl BA in dem Punkte A, und wird von der spiegelnden Fläche dieser Glasplatte nach der Richtung AA_1 reflectirt, so wollen wir annehmen, daß dieser reflectirte Strahl die spiegelnde Fläche der Glasplatte S_1 in dem Punkte A_1 treffe, und an derselben eine zweite Reflexion nach der Linie A_1B_1 erleide, und daß also ein in dieser Linie A_1B_1 befindliches Auge den leuchtenden Punkt B nach der Richtung B_1A_1 erblickt. Die beiden durch die Linien BA, AA_1 und AA_1, A_1B_1 bestimmten Ebenen, welche, was auch die spiegelnden Ebenen der Platten S und S_1 für eine Lage gegen einander haben mögen, auf diesen Ebenen senkrecht sind, wollen wir, indem wir von jetzt an die spiegelnden Ebenen der Platten S und S_1 die erste und die zweite spiegelnde Ebene nennen werden, respective die erste und die zweite Reflexionsebene nennen.

Die erste spiegelnde Ebene wollen wir als fest, und sowohl den einfallenden Strahl BA, als auch den reflectirten Strahl AA_1 als unveränderlich annehmen, so daß also AA_1 eine feste gerade Linie im Raume darstellt. Ferner wollen wir die zweite spiegelnde Ebene in eine parallele Lage mit der ersten spiegelnden Ebene bringen, so daß also die zweite Reflexionsebene mit der ersten zusammenfällt, und natürlich beide spiegelnde Ebenen gegen die fixe gerade Linie AA_1 unter gleichen

Digitized by Google

Winkeln geneigt sind. Nun wollen wir uns mit der zweiten Reflexionsebene die zweite spiegelnde Ebene unveränderlich verbunden denken, und wollen die zweite Reflexionsebene um die Linie AA_1 wie um eine feste Axe herumdrehen, wobei also unter der so eben gemachten Voraussetzung, daß die zweite spiegelnde Ebene mit der zweiten Reflexionsebene als fest verbunden gedacht werden solle, auch die zweite spiegelnde Ebene um die Linie AA_1, und zwar so herumgedreht werden wird, daß sie gegen diese Linie immer unter demselben Winkel geneigt ist, welcher nämlich stets dem Winkel gleich ist, unter dem die erste spiegelnde Ebene gegen die Linie AA_1 geneigt ist. Nimmt man nun ferner an, daß dieser Bewegung das Auge des Beobachters ununterbrochen in einer solchen Weise folge, daß es sich immer in der Richtung des von der zweiten spiegelnden Ebene reflectirten Strahls $A_1 B_1$ befindet, so läßt sich nach dem, was uns bis jetzt von der Reflexion des Lichts bekannt ist, durchaus nichts Anderes im Voraus erwarten, als daß das Auge des Beobachters den leuchtenden Punkt B, von welchem der Strahl BA auf den ersten Spiegel fällt, immer nach der Richtung $B_1 A_1$, und zwar, so viel sich für jetzt nach unseren bisherigen Kenntnissen von der Reflexion des Lichts urtheilen läßt, immer auf dieselbe, oder wenigstens auf eine keine sehr merklichen Veränderungen erleidende Weise, namentlich immer nahe mit derselben Lichtintensität, erblicken wird.

Diesem widerspricht aber die Erfahrung, indem nämlich im Jahre 1808 der berühmte französische Physiker Malus die höchst merkwürdige Entdeckung machte, daß bei dem obigen Versuche, ganz dem entgegen, was wir nach unseren bisherigen Kenntnissen von der Reflexion des Lichts erwarten sollten, dem fortwährend dem reflectirten Strahle $A_1 B_1$ folgenden Auge des Beobachters der leuchtende Punkt B keineswegs sich immer mit derselben Lichtintensität darstellt, sondern daß diese Lichtintensität sich mit dem von den beiden Reflexionsebenen eingeschlossenen Winkel ändert. Dabei machte aber **Malus** zugleich die Entdeckung, daß die Veränderungen der Lichtintensität des leuchtenden Punktes nur dann auf eine besonders in die Augen fallende Weise hervortreten, und mit einer gewissen Gesetzmäßigkeit erfolgen, wenn von dem leuchtenden Punkte B der Strahl BA unter einem ganz bestimmten Neigungswinkel auf die erste spiegelnde Ebene fällt, und also, wie sich aus dem Vorhergehenden ganz von selbst ergiebt, auch von der zweiten spiegelnden Ebene stets unter demselben Winkel, nur nach verschiedenen Richtungen hin, reflectirt wird. Durch sorgfältige Versuche ergab sich dieser Winkel $= 35°. 25'$ *), und zugleich zeigten die Versuche auf eine völlig unzwei-

*) Ich gebe diese Zahl nach Biot an; nach Anderen beträgt dieser Winkel nur 34°.

Digitized by Google

deutige Weise, daß die Intensität, mit welcher der leuchtende Punkt dem stets dem von dem zweiten Spiegel reflectirten Strahle folgenden Auge erscheint, von einem gewissen Maximo, welches dieselbe hat, wenn der Neigungswinkel der beiden Reflexionsebenen 0^0 ist, indem der Neigungswinkel der beiden Reflexionsebenen von 0^0 bis zu 90^0 wächst, gleichzeitig bis zu Null abnimmt, so daß bei einem Neigungswinkel von 90^0 der leuchtende Punkt dem Auge (fast) gänzlich verschwindet, oder (fast) völlige Dunkelheit eintritt; wenn nun der Neigungswinkel der beiden Reflexionsebenen ferner von 90^0 bis 180^0 wächst, so wächst die Intensität, mit welcher der leuchtende Punkt dem Auge erscheint, wieder gleichzeitig von Null bis zu ihrem ursprünglichen Maximo, und zwar in gleicher Weise, wie sie vorher abnahm; setzt man dann die Drehung weiter fort, so daß der von den beiden Reflexionsebenen eingeschlossene convexe Winkel von 180^0 bis 270^0 wächst, so nimmt die Lichtintensität des leuchtenden Punktes wieder von ihrem Maximo bis zu Null ab, so daß bei einem Winkel von 270^0 derselbe wieder dem Auge (fast) gänzlich verschwindet, oder (fast) völlige Dunkelheit eintritt; und wenn nun der von den beiden Reflexionsebenen eingeschlossene convexe Winkel endlich von 270^0 bis 360^0 wächst, so nimmt die Lichtintensität des leuchtenden Punktes wieder von Null bis zu ihrem ursprünglichen Maximo zu. Ein stetiges Zu- und Abnehmen der Lichtintensität des leuchtenden Punktes findet hierbei gleichzeitig mit dem stetigen Wachsen des von den beiden Reflexionsebenen eingeschlossenen Winkels von 0^0 bis 360^0 immer statt, und es treten bei 0^0 und 180^0 zwei Maxima, bei 90^0 und 270^0 zwei Minima der Lichtintensität ein. Ist der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die erste spiegelnde Fläche von $35^0.\ 25'$ verschieden, so zeigen sich diese oder wenigstens ähnliche Erscheinungen zwar auch, aber immer in einer desto weniger vollkommenen Weise und mit desto geringerer Gesetzmäßigkeit, je mehr der Neigungswinkel des einfallenden Strahls gegen die erste spiegelnde Fläche von dem obigen bestimmten Werthe abweicht.

Zweckmäßig ist es, bei diesen Versuchen zwischen den beiden Spiegeln eine Art von Schirm anzubringen, der mit einer kleinen Oeffnung versehen und so angebracht sein muß, daß nur Licht, welches von dem ersten Spiegel unter einem Winkel von $35^0.\ 25'$ reflectirt worden ist, auf den zweiten Spiegel gelangen, und von demselben zum zweiten Male reflectirt werden kann. Bringt man einen solchen Schirm in dieser Weise zwischen den beiden Spiegeln an, so treten die vorher beschriebenen Erscheinungen in größerer Reinheit und Deutlichkeit hervor, wovon der Grund leicht erhellen wird.

Digitized by Google

Die so eben beschriebenen höchst merkwürdigen Erscheinungen nennt man die Erscheinungen der Polarisation des Lichts durch Reflexion, und von den beiden bei der Hervorbringung dieser Erscheinungen gebrauchten Spiegeln heißt der erste, auf welchen der von dem leuchtenden Punkte ausgehende Strahl unmittelbar fällt, der Polarisationsspiegel; der zweite Spiegel wird der Zerlegungsspiegel (Analyseur) genannt. Der von dem Polarisationsspiegel reflectirte Strahl heißt der polarisirte Strahl, und der ganz bestimmte Winkel, unter welchem der einfallende Strahl gegen den Polarisationsspiegel geneigt sein muß, wenn die Erscheinungen der Polarisation durch Reflexion sich mit der größten Vollständigkeit zeigen sollen, wird der Polarisationswinkel genannt. Ein diesem bestimmten Winkel entsprechender, von dem Polarisationsspiegel reflectirter Strahl heißt vollständig polarisirt; unter anderen Winkeln von dem Polarisationsspiegel reflectirte Strahlen werden unvollständig polarisirt genannt. Den von den beiden Reflexionsebenen eingeschlossenen, von 0^0 bis 360^0 wachsenden Winkel nennt man wohl auch das Azimuth, ein aus der Astronomie in diese Lehre zweckmäßig übertragener Ausdruck, dessen man sich der Kürze wegen gewöhnlich bedient, wie auch in der Folge geschehen wird.

§. 131.

Um die im vorhergehenden Paragraphen beschriebenen Polarisationserscheinungen mit möglichster Leichtigkeit und Bestimmtheit, und auch mit möglichst mannigfaltigen Abänderungen hervorbringen zu können, haben verschiedene Physiker, namentlich Biot, Seebeck, Brewster, Nörrenberg, Baumgartner u. A. besondere Instrumente angegeben, welche Polarisations-Instrumente oder Polarisations-Apparate genannt werden, und haben sich dadurch um diesen wichtigen Theil der Lehre vom Lichte sehr verdient gemacht. Wenn auch der Polarisations-Apparat von Biot unter allen wohl der älteste ist, so scheint er mir doch immer noch der vollkommenste zu sein, und soll daher hier etwas genauer beschrieben werden, ohne daß ich mich auf eine ausführliche und in's Einzelne gehende Erläuterung seines Gebrauchs einlassen werde, weil dieselbe aus seiner leicht zu verstehenden Einrichtung und dem, was im vorhergehenden Paragraphen über die Versuche, zu deren Anstellung derselbe dienen soll, gesagt worden ist, sich so leicht und ganz von selbst ergiebt, daß darüber sich noch in ausführliche Auseinandersetzungen einlassen zu wollen, als unnütze Weitläufigkeit erscheinen würde.

Das Polarisations-Instrument von Biot ist in Fig. 94. seinen wesentlichen Theilen nach dargestellt*), und besteht aus

*) Einige Abänderungen kommen vor; namentlich ist AB nicht immer ein wirkliches Rohr, sondern wird zuweilen bloß durch einzelne Stäbe dar-

Digitized by Google

einem cylindrischen, inwendig geschwärzten Rohre AB, welches an beiden Enden offen und auf einem metallenen Fuße so befestigt ist, daß es in horizontaler und vertikaler Richtung jede Lage annehmen kann, was auf eine ganz ähnliche Weise wie gewöhnlich bei größeren Fernröhren bewerkstelligt wird. An dem Ende bei A ist ein eingetheilter Quadrant DF an dem Rohre befestigt, um dessen Mittelpunkt C sich ein Zeiger drehen läßt. Mit diesem Zeiger zugleich dreht sich um dieselbe Axe eine geschwärzte Glasplatte, oder besser eine Obsidianplatte*) CG. Am anderen Ende des Rohrs ist ein breiterer Ring HH befestigt, dessen Umfang ebenfalls eingetheilt ist. In diesem Ringe dreht sich das kurze Rohr J, und der daran befestigte Zeiger JK giebt die Größe der Drehung an. An dem kurzen Rohre J ist ein zweiter eingetheilter Quadrant LL befestigt, welcher auf dieselbe Weise wie der erste mit einem Zeiger und einer Glasplatte versehen ist. Aus dieser Einrichtung sieht man, daß der ersten und zweiten Glasplatte jede beliebige Stellung gegen die Axe des Rohrs AB gegeben werden kann, und daß man zugleich die obere Glasplatte um diese Axe zu drehen vermag. Stellt man die untere Platte so, daß ein von ihr reflectirter Lichtstrahl einen Winkel von 35°. 25′ mit ihr bildet und zugleich mit der Axe des Rohrs zusammenfällt, so ist er polarisirt. Fällt er daher auf den zweiten Spiegel, während dieser dem ersten parallel ist, so wird er davon zurückgeworfen und kann bei der gehörigen Stellung des Auges beobachtet werden; dreht man aber den oberen Spiegel, während man seine Neigung gegen die Axe des Rohrs ungeändert läßt, mittelst des Zeigers JK an dem kurzen Rohre J, so wird das reflectirte Licht immer schwächer und verschwindet fast gänzlich, wenn die Drehung 90° beträgt; bei 180° wird er wieder vollkommen sichtbar und bei 270° verschwindet er abermals, was wir Alles schon aus dem Vorhergehenden wissen. Auf das obere oder untere Ende des Rohrs AB kann man Deckel mit runden Oeffnungen stecken, um durch sie das polarisirte Licht auf Krystalle oder andere Körper zu leiten und die Veränderungen zu beobachten, die es bei'm Durchgange durch dieselben oder bei der Reflexion von ihnen erleidet. Diese freilich nur oberflächliche Beschreibung des Instruments und kurze Anleitung zum Gebrauche desselben wird jedoch gewiß hinreichend sein, um sich von demselben einen deutlichen Begriff zu machen, und es mit Sicherheit in Anwendung bringen zu können, wobei sich die nöthigen Handgriffe einem Jeden bald leicht von selbst ergeben werden.

Der einfachste Polarisationsapparat, welchen es giebt, ist wohl der von Herschel (Vom Lichte. S. 453.) und Brewster (A Treatise on Optics. p. 165.) angegebene, den wir

---

gestellt. Die hier beschriebene, durch Einfachheit sich empfehlende Einrichtung ist aus dem Lehrbuch der Physik von W. Eisenlohr. Vierte Auflage. Mannheim. 1844. 8. S. 312. entlehnt.

*) Obsidian ist ein dunkles glasartiges Mineral.

Digitized by Google

daher, eben seiner großen Einfachheit wegen, vermöge welcher ihn man sich fast selbst verfertigen kann, hier noch kurz beschreiben wollen. Man nimmt, wie durch Fig. 95. erläutert wird, zwei aus Metall oder aus Pappe bestehende Röhren, die an beiden Enden offen sind und so in einander passen, daß sie sich schwer in einander drehen lassen. In jeder dieser Röhren befestige man in dem von ihrer Vereinigung C entfernten Ende eine Glasplatte, die auf der einen Seite geschwärzt ist und einen Winkel von 33° (nach Herschels Annahme) mit der Axe der Röhre macht. Hat man dann die Röhre, welche die eine Glasplatte A enthält, so gestellt, daß das von irgend einem leuchtenden Körper herkommende Licht, welches von der Platte zurückgeworfen wird, in der Richtung der Axe durch die Röhre hindurch geht, so befestige man sie in dieser Lage, und der zurückgeworfene Strahl wird dann wieder von dem Spiegel B reflectirt, und kann nach seinem Heraustreten auf einer Tafel oder unmittelbar mit dem Auge aufgefangen werden. Nun drehe man die den Spiegel B enthaltende Röhre in der anderen herum, so daß sich der Spiegel um den Strahl AB als Axe bewegt, indem er dieselbe Neigung behält. Dann wird sich der zweimal zurückgeworfene Strahl mit gleicher Winkelgeschwindigkeit bewegen und eine Kegeloberfläche beschreiben. Man wird aber wie früher auch jetzt bemerken, daß er hierbei seine Intensität ändert und in zwei Punkten der Umdrehung der Röhre völlig verschwindet. Beachtet man nun die gegenseitige Lage der Spiegel in diesem Augenblicke, so wird man finden, daß die erste und zweite Zurückwerfungsebene mit einander einen rechten Winkel bilden. So weit Herschel. Die von Brewster angegebene, der vorhergehenden übrigens ganz ähnliche, Einrichtung ist in Fig. 96. abgebildet.

Wenn man bei diesen Versuchen das vom Himmel kommende Licht anwendet, so darf man nicht das Licht des blauen Himmels gebrauchen, sondern man muß dazu das Licht einer weißen Wolke oder des bedeckten Himmels anwenden, weil das Licht des blauen Himmels nach einer wohl von Brewster zuerst gemachten Entdeckung schon selbst Spuren von Polarisation zeigt, ehe es den Spiegel trifft.

§. 132.

Nicht bloß Glas ist geeignet, als Polarisationsspiegel die Erscheinungen der Polarisation hervorzubringen, sondern auch andere spiegelnde Körper, als Wasser, Oele, polirtes Holz u. s. w. können dazu angewandt werden; nur Metalle und eben deshalb auch mit Metallbelegung versehene Gläser schicken sich nicht dazu. Durch vielfache Versuche, namentlich von Biot, Arago und Brewster, hat sich aber ergeben, daß bei jedem Körper der Polarisationswinkel ein anderer ist, indem übrigens die Polarisationserscheinungen im Allgemeinen ganz dieselben bleiben, wie sie vorher beschrieben worden sind, wenn man nur beachtet, daß,

Digitized by Google

insofern der zweite Spiegel ein Glasspiegel ist, derselbe immer auf den dem Glase angemessenen Polarisationswinkel gestellt sein muß, von welcher Substanz auch der polarisirte Strahl reflectirt sein mag, die nur natürlich nicht, wie die Metalle, zur Polarisirung überhaupt ungeeignet sein darf. Für Wasser ist z. B. der Polarisationswinkel ungefähr 37^0, für den Diamant nach Brewster etwa 22^0 oder 23^0, für schwefelsauren Baryt (Schwerspath) ungefähr 32^0.

Malus gab sich vergebliche Mühe, die Veränderung der Größe des Polarisationswinkels für verschiedene Substanzen unter ein bestimmtes Gesetz zu bringen, und nur erst Brewster ist es gelungen, ein solches Gesetz aufzufinden, welches auch gegenwärtig allgemein als unzweifelhaft richtig und völlig ausgemacht angesehen wird, da es durch sehr viele genaue Versuche vollkommen bestätigt worden ist. Wenn nämlich in Fig. 97. auf einen durch einen das Licht brechenden Körper MN M′N′ dargestellten Spiegel MN ein Lichtstrahl BA in dem Punkte A unter dem der Substanz des Spiegels entsprechenden Polarisationswinkel MAB auffällt, und man den durch Reflexion von dem Spiegel nach AC fortgehenden und den durch Brechung nach AD in die Substanz des Spiegels nach AD übergehenden Theil des Strahls in's Auge faßt, so stehen nach der von **Brewster** gemachten Entdeckung der reflectirte Strahl AC und der gebrochene Strahl AD jederzeit genau auf einander senkrecht. Ist nun GH das Einfallsloth in dem Punkte A, so ist, wenn wir den Polarisationswinkel MAB durch $\overline{\omega}$ bezeichnen, der Einfallswinkel $GAB = 90^0 - \overline{\omega}$; bezeichnen wir also den Brechungswinkel HAD durch $\overline{\omega}_1$, so ist, weil nach dem Reflexionsgesetze $\angle GAC = \angle GAB = 90^0 - \overline{\omega}$ und nach Brewster's Entdeckung $\angle CAD = 90^0$ ist, offenbar $(90^0 - \overline{\omega}) + \overline{\omega}_1 = 90^0$, also $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1$. Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für Luft und die Substanz des Spiegels, wobei angenommen wird, daß der Strahl aus Luft in diese Substanz übergehe, durch n, so ist nach dem Brechungsgesetze bekanntlich

$$\frac{\sin(90^0 - \overline{\omega})}{\sin \overline{\omega}_1} = \frac{\cos \overline{\omega}}{\sin \omega_1} = n,$$

also, weil nach dem Vorhergehenden $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1$ ist,

$$\frac{\cos \overline{\omega}}{\sin \overline{\omega}} = n,$$

d. i.

$$\cot \overline{\omega} = n \text{ oder } \operatorname{tang} \overline{\omega} = \frac{1}{n},$$

woraus sich das folgende höchst wichtige und merkwürdige Gesetz ergiebt:

Die Cotangente des Polarisationswinkels eines beliebigen Körpers ist dem Brechungsexponenten für Luft und diesen Körper gleich, oder die Tangente

Digitized by Google

des Polarisationswinkels eines beliebigen Körpers ist dem Brechungsexponenten für diesen Körper und Luft gleich.

Setzen wir z. B. den Brechungsexponenten für Luft und Wasser = 1,336 und bezeichnen durch ϖ den Polarisationswinkel des Wassers, so ist

$$\cot \varpi = 1{,}336$$

also

$$\log \cot \varpi = 10{,}1258065 - 10$$

woraus sich $\varpi = 36^0.\ 49'$ ergiebt. Setzt man den Brechungsexponenten für Luft und Kronglas nach Herschel (Vom Lichte. S. 454.) = 1,535 und läßt ϖ den Polarisationswinkel für Kronglas bezeichnen, so ist

$$\cot \varpi = 1{,}535$$

also

$$\log \cot \varpi = 10{,}1861084 - 10$$

woraus sich $\varpi = 33^0.\ 5'$ ergiebt. Man sieht hieraus, wie man mittelst Brewster's Gesetz aus dem Brechungsexponenten den Polarisationswinkel, und natürlich auch umgekehrt aus dem Polarisationswinkel den Brechungsexponenten berechnen kann, welches Letztere für die Bestimmung der Brechungsexponenten solcher Substanzen, die entweder sehr wenig durchsichtig oder nur in so kleinen und unregelmäßigen Massen vorhanden sind, daß aus ihnen Prismen nicht geformt werden können, von großer Wichtigkeit ist. Denn um den Polarisationswinkel zu bestimmen, ist nur eine sehr kleine polirte Oberfläche nöthig, und man braucht nur den von ihr zurückgeworfenen Strahl auf einem geschwärzten Glase oder überhaupt einem polirten Körper, dessen Polarisationswinkel man schon kennt, aufzufangen.

Bemerken wollen wir hier noch, um Mißverständnissen vorzubeugen, daß von mehreren Schriftstellern der Winkel, welchen der einfallende Strahl, wenn die Polarisation vollkommen sein soll, mit dem Einfallslothe einschließen muß, also der eigentliche sogenannte Einfallswinkel im Falle der vollkommenen Polarisation, der Polarisationswinkel genannt wird; wie hiernach Brewster's Gesetz zu modificiren ist, ergiebt sich von selbst ohne weitere Erläuterung.

Aus dem Gesetze von Brewster erklärt sich auch ganz von selbst, warum bei der Anwendung weißen, also zusammengesetzten, Lichtes die Polarisirung, wie die Versuche auch unzweideutig zeigen, nie ganz vollständig sein kann, indem nämlich jeder weiße Lichtstrahl aus sieben farbigen Strahlen zusammengesetzt ist, von denen jeder einen verschiedenen Brechungsexponenten, also auch nach Brewster's Gesetze einen verschiedenen Polarisationswinkel hat; nur bei der Anwendung einfachen Lichtes, d. h. einzelner farbiger Strahlen, wird man eine möglichst vollständige Polarisirung hervorbringen können, und die den einzelnen farbigen Strahlen für verschiedene brechende Substanzen

Digitized by Google

entsprechenden Polarisationswinkel lassen sich leicht mittelst der Gleichungen $\cot \varpi = n$ oder $\tang \varpi = \frac{1}{n}$ aus den Brechungsexponenten dieser Strahlen, für so viele Substanzen man dieselben kennt, bestimmen.

§. 133.

Schon Malus hat sich bemühet, das Gesetz der Abhängigkeit der Intensität des reflectirten Strahls von dem Winkel, welchen wir oben das Azimuth genannt haben, aufzufinden, und ist zu der Aufstellung eines solchen Gesetzes durch die folgende einfache Betrachtung gelangt, die aber freilich, wie man aus dem Nachstehenden sogleich selbst sehen wird, nicht im Entferntesten als ein Beweis dieses von Malus aufgestellten oder vielmehr nur angenommenen Gesetzes gelten kann. Bezeichnen wir das Azimuth durch α und die Intensität des entsprechenden reflectirten Strahls durch J, so lehren die Beobachtungen, daß J für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$ ein Maximum, für $\alpha = 90^0$ und $\alpha = 270^0$ dagegen gleich Null wird. Außerdem nimmt J von seinem Maximo bis Null fortwährend ab, wenn α von 0^0 bis 90^0 wächst, nimmt dann wieder in ganz gleicher Weise von Null bis zu seinem Maximo zu, wenn α von 90^0 bis 180^0 wächst, nimmt hierauf eben so von seinem Maximo bis Null ab, wenn α von 180^0 bis 270^0 wächst, und nimmt endlich auf ähnliche Art wieder von Null bis zu seinem Maximo zu, wenn α von 270^0 bis 360^0 wächst. Hieraus erkennt man auf der Stelle, daß J als eine periodische Function des Azimuths α sich, wenn α von 0^0 bis 360^0 wächst, auf ganz ähnliche Weise ändert wie der Cosinus des Azimuths bei gleichem Wachsen des letzteren. Weil aber J natürlich fortwährend positiv, der Cosinus des Azimuths α dagegen von $\alpha = 0^0$ bis $\alpha = 180^0$ positiv, von $\alpha = 180^0$ bis $\alpha = 360^0$ negativ ist, so ist es nicht zulässig, die Intensität J dem Cosinus des Azimuths α selbst proportional zu setzen, sondern man wird mit der meisten Wahrscheinlichkeit sich berechtigt halten dürfen, J dem Quadrate des Cosinus des Azimuths α proportional zu setzen, indem dieser Annahme wenigstens die größte Einfachheit zur Seite steht; und bezeichnen wir daher den Werth der Intensität J in ihrem Maximo, d. h. für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$, durch A, so erhalten wir nach der vorhergehenden Betrachtung für J den folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$J = A \cos \alpha^2 .$$

Wie wenige Strenge die vorhergehende, übrigens von Malus im Wesentlichen ganz in der obigen Weise angestellte Betrachtung besitzt, und daß dieselbe auf den Namen eines eigentlichen Beweises der Gleichung $J = A \cos \alpha^2$ nicht im Entferntesten Anspruch machen kann, braucht hier wohl nicht noch besonders hervorgehoben zu werden. Jedoch stellt dieser

Digitized by Google

Ausdruck der Intensität des reflectirten Strahls, wie Herschel sagt, welcher von Malus aus keinen anderen als den vorher angegebenen Gründen angenommen wurde, die Aenderungen der Intensität mit so viel Genauigkeit durch das entsprechende Azimuth dar, als die photometrischen Versuche fähig sind, und wir müssen für jetzt diesen Ausdruck der Intensität des reflectirten Strahls als ein empirisches Naturgesetz betrachten, von welchem eine jede gute Theorie der Polarisation a priori Rechenschaft abzulegen im Stande sein muß. Versuche zur Bewahrheitung der obigen Formel hat u. A. Arago angestellt.

§. 134.

Der im Vorhergehenden beschriebene Polarisationsversuch kann, um darzuthun, daß auch bei der Brechung Polarisationserscheinungen sich zeigen, dadurch abgeändert werden*), daß man die Glasspiegel mit Glasplattenschichten vertauscht, denen man genau dieselbe Lage giebt. Ist die Anzahl der Platten in den Schichten hinlänglich groß, etwa zehn bis zwölf, so zeigen sie nicht nur dieselben Erscheinungen an den reflectirten Strahlen, sondern es sind auch die durchgehenden Strahlen polarisirt, und zwar an jeder Schicht entgegengesetzt mit den reflectirten. Wählt man nämlich statt des ersten Spiegels, der das directe Licht aufnimmt, eine Plattenschicht, und stellt den Apparat so, daß der zweite Spiegel von dem durchgehenden Lichte getroffen wird, so zeigt sich dieses nach der Reflexion von diesem Spiegel unwirksam bei derjenigen Lage, in welcher das reflectirte unwirksam war. Läßt man die den directen Strahl auffangende Schicht spiegelnd wirken, beobachtet aber den reflectirten Strahl, nachdem er durch eine zweite Plattenschicht hindurch gegangen ist, der man dieselbe Stellung gegeben hat, wie dem zweiten Spiegel zukommt, so findet man bei derjenigen Lage, in welcher der Spiegel den Strahl aufheben würde, jetzt eine Wirksamkeit desselben; bei der anderen Lage, in welcher der Spiegel den Strahl zeigt, bemerkt man keinen Lichteindruck.

*) E. G. Fischer's Lehrbuch der mechanischen Naturlehre, neu bearbeitet von E. F. August. Thl. II. Berlin. 1840. S. 499.

Digitized by Google

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Von der doppelten Strahlenbrechung.

§. 135.

Wir haben im vorhergehenden Kapitel eine höchst merkwürdige Abweichung von den gewöhnlichen Gesetzen der Zurückwerfung und Brechung des Lichts unter dem Namen der Polarisation des Lichts kennen gelernt, und werden in diesem Kapitel noch eine andere in vielen Beziehungen eben so wichtige und merkwürdige Abweichung von dem gewöhnlichen Brechungsgesetze ihren Grundzügen nach kennen lernen, welche sich bei dem Durchgange des Lichts durch die meisten krystallisirten Körper zeigt. Wenn nämlich ein Lichtstrahl durch einen Krystall geht, dessen Grundgestalt nicht der Würfel oder eine daraus abgeleitete Gestalt ist, und demzufolge in dem Punkte des Eintritts in den Krystall eine Brechung erleidet, so zeigt sich die schon von Erasmus Bartholinus in Kopenhagen am Isländischen Kalkspathe (Isländischen Krystalle oder Doppelspathe) entdeckte*), und später von dem berühmten holländischen Mathematiker Hugenius oder Huygens in der Schrift Tractatus de lumine (Opera reliqua. Tom. I. Amstelodami. 1728. p. 39.**)) weiter untersuchte und mit bewunderungswürdigem Scharfsinne auf bestimmte Gesetze zurückgeführte Erscheinung, daß der Strahl bei seinem Eintritte in den Krystall im Allgemeinen in zwei gebrochene Strahlen oder vielmehr Strahlenbündel auf sehr merkliche Weise gesondert oder gespalten wird, von denen der eine völlig den gewöhnlichen Gesetzen der Brechung folgt, der andere aber sich nach ganz anderen Gesetzen richtet, weshalb man auch den ersten dieser beiden Strahlen den gewöhnlichen Strahl, den anderen den ungewöhnlichen Strahl zu nennen pflegt; die ganze Erscheinung wird aber aus Gründen, die sich aus dem Vorhergehenden ganz von selbst ergeben, die doppelte Strahlenbrechung oder die Doppelbrechung genannt.

§. 136.

Man hat diese Erscheinung bei sehr vielen Krystallen genauer untersucht, und hat dadurch gefunden, daß ein jeder das Licht doppelt brechende Krystall sich entweder nach nur einer bestimmten Ebene oder nach zwei bestimmten Ebenen so durchschneiden oder schleifen läßt, daß Strahlen, welche normal auf

*) Experimenta Crystalli Islandici, disdiaclastici, quibus mira et insolita refractio detegitur. Havniae. 1669.

**) Diese merkwürdige Schrift ist auch französisch erschienen unter dem Titel: Traité de la lumière. Leyd. 1690.

Digitized by Google

diese Ebenen auffallen, ganz ungebrochen durch den Krystall hindurch gehen, und insbesondere also auch gar keine Doppelbrechung erleiden. Die Richtungen, welche auf diesen Ebenen senkrecht stehen oder normal sind, werden die optischen Axen des Krystalls genannt, und man theilt in Folge des Vorhergehenden alle das Licht doppelt brechende Krystalle in zwei Klassen, nämlich in Krystalle mit einer Axe oder einaxige Krystalle und in Krystalle mit zwei Axen oder zweiaxige Krystalle, wobei wir übrigens bemerken wollen, daß z. B. Biot allen Krystallen zwei optische Axen beilegt, und nur annimmt, daß bei den sogenannten einaxigen Krystallen die beiden Axen in eine mit einander zusammenfallen, so daß also bei dieser Betrachtungsweise allen das Licht doppelt brechenden Krystallen im Allgemeinen dieselben Eigenschaften zukommen, und die sogenannten einaxigen Krystalle nur als ein besonderer Fall des allgemeinen Falls, nach welchem alle das Licht doppelt brechenden Krystallen zwei Axen zukommen, auftreten.

§. 137.

Eine ausführliche Darstellung der Lehre von der doppelten Strahlenbrechung kann in diesem Werke seiner ganzen Tendenz nach nicht unser Zweck sein, und wir wollen uns daher bloß auf die etwas genauere Betrachtung des Isländischen Krystalls oder des Doppelspaths beschränken, den wir daher jetzt zuerst etwas näher charakterisiren wollen.

Der Isländische Krystall oder Doppelspath ist krystallisirter kohlensaurer Kalk, und kommt besonders schön und durchsichtig auf der Insel Island vor. Schon Huygens sagt a. a. O. von diesem Mineral: „Advehitur huc ex Islandia, Insula Maris Borealis ad altitudinem 66 graduum, species Crystalli vel lapidis diaphani valde notabilis ob figuram suam aliasque qualitates; sed imprimis ob miras ejus Refractiones.“ — „In Islandia reperiuntur plurima ejus Crystalli frusta, quorum quaedam ad quatuor aut quinque libras vidi“ — „Sed praeterea nascitur quoque in aliis Regionibus, namque ejusmodi lapides habui qui in Gallia prope Trecas in Campania reperti fuerant, alios qui in Insula Corsica; verum utrique obscuriores erant et in parvis frustulis collecti, ita ut vix animadvertere in eis Phaenomenon aliquot refractionis liceret“. Dieser Krystall gehört zu der Klasse der einaxigen Krystalle, und kommt in der Natur in sehr verschiedenen äußeren Gestalten vor; immer aber lassen sich in ihm drei Durchgangsrichtungen seiner Blätter von einander unterscheiden, nach denen er sich mit Leichtigkeit zerspalten läßt. Thut man Letzteres, so lassen sich aus allen Doppelspath-Krystallen, wie verschieden auch deren äußere Gestalt sein mag, immer sogenannte Rhomboëder darstellen, nämlich Parallelepipeda, deren sechs Seitenflächen einander gleiche und ähnliche Rhomben sind, welches die sogenannte Grund- oder Kerngestalt des Doppelspaths ist; und daß der Krystall unter

Digitized by Google

dieser Gestalt dargestellt sei, soll im Folgenden der Kürze wegen immer angenommen werden; sollte man verhindert sein, ihm Behufs der anzustellenden Versuche durch die nöthigen Zerspaltungen diese Gestalt zu geben, so müßte man sich wenigstens vorstellen, daß er diese Gestalt habe, und ihn dieser Vorstellung gemäß bei den Versuchen in Anwendung bringen, was, wenn man dieser Vorstellung durch geeignete geometrische Betrachtungen zu Hülfe kommt, in den meisten Fällen auch nicht schwierig sein wird, weshalb wir der Kürze wegen darüber hier nichts weiter sagen wollen.

Nach Huygens betragen die beiden stumpfen und die beiden spitzen Winkel der rhombischen Seitenflächen des Krystalls respective $101^0.\ 52'$ und $78^0.\ 8'$, nach neueren Angaben $101^0.\ 55'$ und $78^0.\ 5'$, und die Kenntniß dieser Winkel reicht hin, um alle übrigen geometrischen Elemente des Krystalls zu berechnen, was wir der Kürze wegen hier nicht weiter erläutern wollen, indem ein Jeder, wer die nöthigen geometrischen und trigonometrischen Kenntnisse besitzt, den besten Weg der Berechnung leicht selbst finden wird. Unter den acht körperlichen Winkeln des Krystalls kommen zwei einander gegenüberstehende vor, welche von drei unter einander gleichen stumpfen ebenen Winkeln gebildet werden; die sechs übrigen körperlichen Winkel werden von zwei einander gleichen spitzen ebenen Winkeln und einem stumpfen ebenen Winkel eingeschlossen. Die beiden einander gegenüberstehenden, von drei einander gleichen stumpfen ebenen Winkeln gebildeten körperlichen Winkel des Krystalls sind von besonderer Bedeutung für denselben, denn die gerade Linie, welche die Spitzen dieser beiden körperlichen Winkel des Krystalls mit einander verbindet, ist seine optische Axe. Wenn Fig. 98. den Krystall darstellt, und **A** und **B** die Spitzen der beiden in Rede stehenden körperlichen Winkel desselben sind, so ist **AB** die optische Axe, und die Ebene **ABCD**, welche, wie leicht mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung, etwa mit Hülfe eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks, welches man sich, für **A** als Mittelpunkt der entsprechenden Kugel, innerhalb des an der Fläche **A** liegenden, von drei einander gleichen ebenen stumpfen Winkeln gebildeten körperlichen Winkels beschrieben denkt, wobei man zu beachten hat, daß, weil **ADEF** ein Rhombus ist, **AD** den Winkel **EAF** halbirt, gezeigt werden kann, auf den parallelen Seitenflächen **ADEF** und **BCGH** des Krystalls senkrecht steht, wird von Huygens (a. a. O. p. 41. Nr. 8.) der Hauptschnitt desselben genannt.

§. 138.

Durch ein sehr einfaches von Malus angegebenes Mittel*) läßt sich die doppelte Strahlenbrechung sehr schön beobachten,

*) M. s. Lehrbuch der Experimental-Physik von Biot u. s. w. Band IV. S. 326.

Digitized by Google

und die gegenseitige Lage des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls bestimmen. Auf einer weißen Ebene, etwa auf einer großen Elfenbeinplatte, zeichne man, wie Fig. 99. zeigt, mit deutlichen schwarzen Strichen ein bei a rechtwinkliges Dreieck abc, dessen Kathete ab viel kleiner als die Kathete ac ist, und theile sowohl ac, als auch bc in zehn gleiche Theile, und jeden dieser Haupttheile wieder in eine größere Anzahl kleinerer gleicher Theile, ein, so daß man auf jeder der beiden Linien ac und bc eine möglichst genaue Scale erhält. Legt man dann auf die weiße Ebene ein Kalkspath-Rhomboëder, und betrachtet das rechtwinklige Dreieck abc durch dasselbe, so erscheint es doppelt, in welche Lage man auch das Auge bringen mag, und für jede Lage wird es einen Punkt d geben, in welchem die Linie a′c′, das ungewöhnliche Bild von ac, die Hypotenuse bc, die wir dem gewöhnlichen Bilde angehörend annehmen wollen, schneidet. Nimmt man also auf dem Dreieck abc selbst eine Länge ce gleich c′d, so wird der Punkt e derjenige sein, dessen ungewöhnliches Bild mit dem gewöhnlichen Bilde des als der Hypotenuse bc angehörig betrachteten Punktes d zusammenfällt. Der von d ausgegangene gewöhnliche, und der von e herkommende ungewöhnliche Strahl verschmelzen also nach ihrem Austritte mit einander, und geben nur einen einzigen, in der Richtung nach dem Auge austretenden Strahl. Umgekehrt wird also auch ein natürlicher Strahl, der nach dieser letzten Richtung von dem Orte, wo sich das Auge befindet, ausgegangen ist, und auf den Krystall fällt, sich in demselben in zwei Bündel brechen, deren eines zum Punkte d, das andere zum Punkte e des unter der Grundfläche des Rhomboëders verzeichneten Dreiecks abc gelangt. Hiernach wird sich aus den auf ac und bc aufgetragenen Scalen immer ergeben, welches die Punkte von ac und bc sind, deren gewöhnliche und ungewöhnliche Bilder zusammenfallen; wenn daher die Lage dieser Linien, so wie die der Lage des Dreiecks abc zu den Kanten der Grundfläche des Rhomboëders bekannt ist, so wird man in jedem Falle wissen können, welchem Orte dieser Grundfläche der Punkt d, welchem anderen der Punkt e entspricht. Zur vollständigen Construction der gebrochenen Strahlen wird also nur noch erforderlich sein, die Lage ihres gemeinschaftlichen Austrittspunkts f zu bestimmen, wozu man gelangt, wenn man über die obere Fläche des Rhomboëders zwei rechtwinklig sich kreuzende ganz feine Silberfäden ausspannt, und beobachtet, wie weit die Bilder aus einander weichen, wenn der gemeinschaftliche austretende Strahl durch den Punkt der Oberfläche, wo die Fäden sich kreuzen, hindurch geht. Aber auch die Richtung dieses Strahls muß man kennen, damit man anzugeben wisse, unter welchem Einfallswinkel das beobachtete Auseinanderweichen statt gefunden hat. Zu diesem Zwecke braucht man bloß in der Ebene des Dreiecks, nach welchem man visirt, vier gerade, eingetheilte, und in Gestalt eines Rechtecks angeordnete Linien zu ziehen, die sich aber außerhalb des Raums befinden, den das Rhom-

Digitized by Google

boëder bedeckt. In dem Augenblicke, wo man das Auseinanderweichen der Bilder beobachtet, bemerke man nun, auf welche Punkte dieser Eintheilungen die Fäden sich projiciren. Der gemeinschaftliche Durchschnitt der, durch diese Punkte und durch die Fäden gelegten, und nach dem Auge erweiterten Ebenen wird offenbar die Richtung des austretenden Strahls angeben. Ich bemerke nochmals, daß die vorhergehende Darstellung dieser Versuche ganz von Biot entlehnt ist, weil sie sich mir durch besondere Deutlichkeit und Genauigkeit auszuzeichnen scheint; allerdings wird man aber, um zu einer völlig klaren Einsicht in die Natur dieses Gegenstandes zu gelangen, selbst Hand an's Werk legen müssen.

§. 139.

Zum Schluß wollen wir nun noch die Haupterscheinungen der doppelten Brechung nach Baumgartner (Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande. Achte Auflage. Wien. 1845. S. 609.) in der Kürze zusammenstellen, indem wir bemerken, daß wir hier mit Baumgartner unter einem einer natürlichen oder durch Anschleifen erzeugten Gränzfläche eines Doppelspaths entsprechenden Hauptschnitte jede auf dieser Gränzfläche normale und der Axe des Krystalls parallele Ebene verstehen werden. Nach dem angeführten Schriftsteller sind die Haupterscheinungen der Doppelbrechung die folgenden: 1) Fällt ein Lichtstrahl senkrecht auf eine Theilungsfläche des Doppelspaths, wobei der gewöhnlich gebrochene Theil desselben in unveränderter Richtung fortgeht, so wird der ungewöhnlich gebrochene um den Winkel von $6^0.\ 12'.\ 38''$ gegen den spitzigen Winkel des Rhomboëders abgelenkt und liegt in dem durch den Einfallspunkt gelegten entsprechenden Hauptschnitte. 2) Fällt der Strahl schief ein, so ist der Erfolg verschieden, jenachdem die Einfallsebene die Lage eines entsprechenden Hauptschnitts hat oder nicht. Liegt die Einfallsebene in einem entsprechenden Hauptschnitte, so bleibt auch der ungewöhnlich gebrochene Strahl in dieser Ebene, allein der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des Brechungswinkels in keinem constanten Verhältnisse, sondern dieses Verhältniß ändert sich mit dem Einfallswinkel. Ist aber die Einfallsebene gegen den entsprechenden Hauptschnitt geneigt, so ist nicht bloß das Verhältniß zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels nach Maßgabe des Einfallswinkels verschieden, sondern es tritt der ungewöhnliche Strahl überdies noch aus der Einfallsebene heraus und wird gleichsam von dem entsprechenden Hauptschnitte weggetrieben, und zwar desto mehr, je mehr sich der Winkel, den die Einfallsebene des Strahls mit dem entsprechenden Hauptschnitte macht, einem rechten Winkel nähert. Ist dieser Winkel ein rechter Winkel, so bekommt die Ablenkung ihren größten Werth. Diese Gesetze gelten, die Fläche des Doppelspaths, welche das einfallende Licht trifft,

Digitized by Google

mag eine natürliche Theilungsfläche oder eine durch Anschleifen des Krystalls erzeugte sein; nur bei solchen künstlich erzeugten Flächen, die auf der Axe des Krystalls senkrecht stehen oder mit ihr parallel sind, erfolgt eine Ausnahme. 3) Schleift man vom Krystall solche Stücke weg, daß auf der Axe des Krystalls senkrechte Ebenen entstehen, so wird ein Strahl, der senkrecht darauf fällt, weder in zwei Bündel gespalten noch überhaupt gebrochen; schief einfallende Strahlen erleiden zwar eine doppelte Brechung; da aber hier jede Einfallsebene ein entsprechender Hauptschnitt ist, so bleibt der ungewöhnlich gebrochene Strahl stets in derselben. 4) Ist die künstlich erzeugte Fläche des Doppelspaths, auf die der Strahl fällt, der Axe des Krystalls parallel, und macht die Einfallsebene mit der Axe einen rechten Winkel, so gehorcht auch der sonst ungewöhnlich gebrochene Strahl den gewöhnlichen Brechungsgesetzen; er bleibt nicht nur in der Einfallsebene, sondern es verhält sich auch der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels stets wie 1,4833 : 1 oder wie 1 : 0,6742. Dieses Verhältniß meint man, wenn von dem Brechungsverhältnisse des ungewöhnlichen Strahls im Doppelspathe die Rede ist.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

Ansichten über die Natur des Lichts.

§. 140.

Die Betrachtungen über die Natur des Lichts, denen das gegenwärtige Kapitel gewidmet sein soll, wollen wir mit einer allgemeinen mathematischen Untersuchung über die Schwingungen elastischer Körper beginnen oder vielmehr einleiten, weil wir späterhin mehrmals Gelegenheit haben werden, auf die Resultate dieser Untersuchung zurückzukommen, müssen aber bemerken, daß wir der Natur dieses Werks gemäß uns in den Gränzen elementar mathematischer Sätze und Betrachtungen zu halten genöthigt sind, und also bei derselben an eine Erschöpfung des fraglichen wichtigen Gegenstandes nicht im Entferntesten gedacht werden kann, sondern dieselbe sich nur auf das Einfachste und unmittelbar Erforderliche, um von der Natur solcher Schwingungen einen nur einigermaßen deutlichen, zugleich aber streng theoretisch begründeten Begriff zu bekommen, zu beschränken haben wird.

Digitized by Google

Indem wir uns bei der in Rede stehenden Untersuchung an das schon aus Thl. I. S. 24. bekannte Hauptgesetz der Elasticität, nach welchem innerhalb der Gränze der vollkommenen Elasticität die auf elastische Körper durch Zug, Druck, Biegung oder Drehung wirkenden Kräfte den durch sie hervorgebrachten räumlichen Veränderungen dieser Körper proportional sind, woraus denn auch umgekehrt folgt, daß der Widerstand, welchen die Elasticität leistet, oder das Bestreben, mit welchem die aus ihrer Stelle verrückten Theile elastischer Körper wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren streben, in gleichem Verhältnisse steht mit den Raumveränderungen, welche die Theile der Körper erleiden, anschließen, wollen wir uns jetzt die folgende Aufgabe stellen:

Einem beweglichen Punkte **M**, der sich in dem Punkte **A** in Ruhe befindet, werde von einer momentan wirkenden Kraft nach der Richtung **AB** hin eine gewisse Geschwindigkeit **c** ertheilt, in Folge welcher sich der Punkt **M**, wenn keine andere Kraft auf ihn wirkte, nach der Richtung **AB** gleichförmig bewegen würde. Wenn dann aber zugleich in jedem Punkte der geradlinigen Bahn **AB** des Punktes **M** derselbe von einer stetig wirkenden Kraft sollicitirt wird, die stets nach dem Punkte **A** hin gerichtet und jederzeit der Entfernung des Punktes **M** von dem Punkte **A** proportional ist: so soll man die Umstände der Bewegung des Punktes **M** ermitteln.

In welchem Zusammenhange diese Aufgabe mit den Schwingungen elastischer Körper, mit Rücksicht auf das obige Hauptgesetz der Elasticität, steht, ist leicht zu übersehen. Man kann sich nämlich den in **A** sich in Ruhe befindenden beweglichen Punkt **M** als ein Molecül eines elastischen Körpers denken, welches durch eine auf dasselbe wirkende Momentankraft, die ihm in Folge dieser Wirkung die Geschwindigkeit **c** ertheilt, aus seiner Stelle getrieben wird, und in Folge der Elasticität, die in jedem Punkte des Wegs des Punktes **M**, dessen Entfernung von dem Punkte **A** proportional ist, wieder in seine ursprüngliche Lage **A** zurückzukehren strebt. Bevor wir aber zu der Auflösung der obigen Aufgabe übergehen, wollen wir zuvörderst, um jede mögliche Undeutlichkeit zu beseitigen, den folgenden geometrischen Satz beweisen, welcher bei der Auflösung dieser Aufgabe zur Anwendung kommen wird, dessen Richtigkeit aber auch übrigens so leicht von selbst einleuchtet, daß er eigentlich gar keines besonderen Beweises bedarf.

§. 141.

Lehrsatz. Eine ganz in einer und derselben Ebene liegende stetige Curve, deren Elemente sämmtlich auf den nach ihnen von einem in derselben Ebene liegenden bestimmten Punkte gezogenen geraden

Digitized by Google

Linien senkrecht stehen, ist eine aus dem in Rede stehenden Punkte als Mittelpunkt beschriebene Kreislinie.

Beweis. In Fig. 100. sei AB ein Theil oder Bogen der in Rede stehenden, ganz in der Ebene des Papiers liegenden Curve, und O sei der in derselben Ebene liegende Punkt, welcher nach der Voraussetzung eine solche Lage gegen die gegebene Curve hat, daß alle Elemente der Curve auf den nach ihnen von dem Punkte O gezogenen geraden Linien senkrecht stehen. Man denke sich jetzt den Bogen AB der gegebenen Curve in die (unendlich kleinen) Elemente AC, CD, DE, EF, FG, GH, HB, welche ohne allen merklichen Fehler als gerade Linien betrachtet werden können, getheilt, und ziehe von O aus nach den Punkten A, C, D, E, F, G, H, B die geraden Linien OA, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OB, nach den Mittelpunkten sämmtlicher Elemente aber die in der Figur nur punktirten geraden Linien. Da nun diese letzteren auf den Elementen AC, CD, DE, EF, FG, GH, HB nach der Voraussetzung senkrecht stehen, so sind nach einem bekannten geometrischen Satze AOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOH, HOB sämmtlich gleichschenklige Dreiecke, und folglich $OA = OC = OD = OE = OF = OG = OH = OB$. Weil aber diese Betrachtung gilt, wie klein man auch die Elemente, in welche man den Bogen AB getheilt hat, annehmen mag, und sich natürlich auch auf jeden beliebig großen Theil AB der gegebenen Curve ausdehnen läßt, so ist klar, daß alle Punkte dieser ganz in der Ebene des Papiers liegenden Curve von dem in derselben Ebene liegenden Punkte O gleich weit entfernt sind, und diese Curve also offenbar eine in der Ebene des Papiers liegende aus dem Mittelpunkte O beschriebene Kreislinie ist, wie bewiesen werden sollte.

In etwas veränderter Weise könnte man übrigens den Beweis unseres obigen Satzes auch auf folgende Art darstellen. Man denke sich zuerst eine ganz in einer und derselben Ebene liegende, aus mehreren geradlinigen, sämmtlich einander gleichen Theilen AB, BC, CD, DE, EF, u. s. w., wobei wir uns auf eine bestimmte Figur nicht beziehen, bestehende gebrochene Linie, und nehme an, daß diese gebrochene Linie so beschaffen sei, daß die sämmtlichen einzelnen geradlinigen einander gleichen Theile derselben auf den nach ihren Mittelpunkten von einem in derselben Ebene liegenden Punkte O gezogenen geraden Linien senkrecht stehen. Zieht man dann noch die Linien OA, OB, OC, OD, OE, OF, u. s. w., so sind nach einem bekannten geometrischen Satze die Dreiecke AOB, BOC, COD, DOE, EOF, u. s. w. sämmtlich gleichschenklig, und es ist folglich $OA = OB = OC = OD = OE = OF = \ldots$. Also ist unsere gebrochene Linie, wenn wir uns dieselbe nur noch als völlig geschlossen oder in sich selbst zurückkehrend denken, offenbar der Umfang eines regulären Vielecks, dessen Mittelpunkt O ist. Da dies nun aber immer gilt, wie klein man sich auch die einzelnen geradlinigen Theile der gebrochenen Linie denken mag, so ist klar, daß unser

Digitized by Google

Satz auch in der Weise, wie er oben ausgesprochen worden ist, seine vollkommene Richtigkeit hat.

§. 142.

Indem wir jetzt zu der Auflösung der in §. 140. vorgelegten Aufgabe selbst übergehen, wollen wir annehmen, daß der sich bewegende Punkt M am Ende der Zeit t sich in dem Punkte S (Fig. 101.) der Linie AB befinde, und wollen seine Entfernung AS von dem Ausgangspunkte A in diesem Zeitmomente durch s, seine Geschwindigkeit in demselben Zeitmomente, welche er also in dem Punkte S seiner Bahn hat, aber durch v bezeichnen. Lassen wir nun die Zeit t um Δt wachsen, wo also Δt eine positive Größe ist, so soll am Ende der Zeit $t + \Delta t$ der Punkt M sich in dem Punkte S′ befinden, und seine Entfernung AS′ von dem Ausgangspunkte A in diesem Zeitmomente wollen wir durch $s + \Delta s$, seine Geschwindigkeit in demselben Zeitmomente, welche er also in dem Punkte S′ hat, aber durch $v + \Delta v$ bezeichnen, wo also $\Delta s = SS'$ eine positive Größe ist, aus der Natur der Bewegung oder vielmehr der bei derselben thätigen Kräfte dagegen auf der Stelle hervorgeht, daß Δv nothwendig eine negative Größe sein muß, wenn wir nur, was für jetzt vorausgesetzt werden soll, die Bewegung des Punktes M bloß während einer so großen Zeit betrachten, während welcher die Geschwindigkeit v nicht verschwindet oder durch Null hindurch geht.

Nehmen wir jetzt das Zeitintervall Δt unendlich klein an, so werden wir während desselben ohne merklichen Fehler die den Punkt M sollicitirende stetig wirkende Kraft als constant betrachten können, und da nun diese stetig wirkende constante Kraft in der Zeit Δt offenbar die Geschwindigkeit $-\Delta v$ hervorbringt, so wird diese stetig wirkende constante Kraft in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $-\frac{\Delta v}{\Delta t}$ hervorbringen, woraus sich unmittelbar ergiebt, daß, wenn man eine stetig wirkende constante Kraft, welche in der Zeiteinheit eine der Längeneinheit gleiche Geschwindigkeit hervorbringt, als Krafteinheit annimmt, die Intensität der auf den Punkt M stetig wirkenden Kraft am Ende der Zeit t mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, durch $-\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ausgedrückt werden kann. Will man aber dieser Betrachtung vollkommene Strenge verleihen, so muß man eigentlich sagen, daß die Intensität der auf den Punkt M stetig wirkenden Kraft am Ende der Zeit t die Gränze ist, welcher $-\frac{\Delta v}{\Delta t}$ sich nähert, wenn Δt sich der Null nähert, welche Gränze wir durch

$$\text{Lim}\left(-\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = -\text{Lim}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Digitized by Google

ausdrücken wollen. Nach der unserer Aufgabe zum Grunde gelegten Voraussetzung ist aber die Intensität der auf den Punkt M stetig wirkenden Kraft am Ende der Zeit t der Entfernung s des Punktes M von dem Ausgangspunkte A am Ende dieser Zeit proportional, und die Intensität der auf den Punkt M stetig wirkenden Kraft am Ende der Zeit t kann also in Bezug auf dieselbe Krafteinheit wie oben, wenn k eine gewisse constante positive Größe bezeichnet, auch durch ks ausgedrückt werden, was also, mit dem Obigen verglichen, zu der Gleichung

$$ks = -\operatorname{Lim}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

führt.

Je kleiner aber Δt ist, mit desto größerer Genauigkeit kann man offenbar die Bewegung des Punktes M während des Zeitintervalls Δt, in welchem der Punkt M den Weg Δs zurücklegt, als gleichförmig, d. h. mit der constanten Geschwindigkeit v vor sich gehend betrachten, was die mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner Δt ist, geltende Gleichung

$$\Delta s = v\Delta t \text{ oder } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

giebt, wobei aber wieder zu bemerken ist, daß in völliger Strenge v nur die Gränze ist, welcher $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sich nähert, wenn Δt sich der Null nähert, was wir auf ähnliche Art wie oben durch

$$v = \operatorname{Lim}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ausdrücken wollen.

Daher haben wir jetzt die beiden Gleichungen

$$ks = -\operatorname{Lim}\frac{\Delta v}{\Delta t},\quad v = \operatorname{Lim}\frac{\Delta s}{\Delta t};$$

aus denen sich durch Division

$$\frac{ks}{v} = -\frac{\operatorname{Lim}\frac{\Delta v}{\Delta t}}{\operatorname{Lim}\frac{\Delta s}{\Delta t}},$$

also, wie leicht erhellet,

$$\frac{ks}{v} = -\operatorname{Lim}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t} : \frac{\Delta s}{\Delta t}\right),$$

d. i.

$$\frac{ks}{v} = -\operatorname{Lim}\frac{\Delta v}{\Delta s}$$

ergiebt, oder es ist, um uns der Einfachheit wegen im Folgenden dieses verkürzten Ausdrucks zu bedienen, mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner Δt ist:

$$\frac{ks}{v} = -\frac{\Delta v}{\Delta s},$$

Digitized by Google

oder

$$s\,\Delta s = -\frac{v\,\Delta v}{k},$$

oder auch

$$s\cdot\Delta s = -\frac{v}{\gamma k}\cdot\frac{\Delta v}{\gamma k}.$$

In den Punkten S und S′ errichte man nun auf AB auf derselben Seite dieser Linie die Perpendikel

$$ST = \frac{v}{\gamma k},\quad S'T' = \frac{v+\Delta v}{\gamma k};$$

verbinde T und T′ durch die gerade Linie TT′, ziehe UT′ durch T′ mit AB parallel, und verbinde A und T durch die gerade Linie AT. Dann ist offenbar

$$AS = s,\ UT' = SS' = \Delta s,\ ST = \frac{v}{\gamma k},\ UT = -\frac{\Delta v}{\gamma k};$$

und weil nun nach dem Obigen

$$s\cdot\Delta s = -\frac{v}{\gamma k}\cdot\frac{\Delta v}{\gamma k}$$

ist, so ist

$$AS\cdot UT' = ST\cdot UT$$

oder

$$\frac{AS}{ST} = \frac{UT}{UT'}.$$

Daher sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke AST und TUT′ einander ähnlich, und es ist folglich $\angle SAT = \angle UTT'$, $\angle ATS = \angle UT'T$; also $\angle ATT' = \angle ATS + \angle UTT' = \angle UT'T + \angle UTT'$, woraus sich unmittelbar ergiebt, daß der Winkel ATT′ ein rechter Winkel ist.

Denkt man sich nun in jedem Punkte der geradlinigen Bahn AB des Punktes M auf AB ein Perpendikel errichtet, welches der diesem Punkte der Bahn entsprechenden Größe $\frac{v}{\gamma k}$ gleich ist, und die Endpunkte aller dieser Perpendikel durch eine Curve mit einander verbunden, so erhellet aus dem Vorhergehenden mit völliger Deutlichkeit, daß alle Elemente dieser Curve auf denen nach ihnen von dem Punkte A aus gezogenen geraden Linien senkrecht stehen, und daß folglich diese Curve nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze eine aus dem Punkte A als Mittelpunkt beschriebene Kreislinie ist, deren Halbmesser sich offenbar durch den dem Punkte A entsprechenden Werth der Größe $\frac{v}{\gamma k}$, welcher, wie sogleich erhellet, $\frac{c}{\gamma k}$ ist, ausdrücken läßt, so daß also, wenn wir den Halbmesser der in Rede stehenden Kreislinie durch r bezeichnen,

$$r = \frac{c}{\gamma k}$$

gesetzt werden kann.

Digitized by Google

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AST und TUT′ ergiebt sich aber ferner die Proportion

$$AT : ST = TT' : UT',$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$r : \frac{v}{\gamma k} = TT' : \Delta s,$$

woraus sich

$$TT' = r\gamma k \cdot \frac{\Delta s}{v},$$

oder, weil nach dem Obigen $r\gamma k = c$ ist,

$$TT' = c\frac{\Delta s}{v}$$

ergiebt. Nach dem Obigen ist aber auch

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ also } \frac{\Delta s}{v} = \Delta t;$$

und es ist folglich

$$TT' = c\Delta t,$$

welches ein sehr einfacher Ausdruck für das dem Zeitelemente Δt entsprechende Kreisbogenelement TT′ ist.

Denken wir uns nun die Zeit t in n unendlich kleine Elemente, deren jedes τ sein mag, getheilt, und bezeichnen die diesen vom Anfange der Bewegung an successive auf einander folgenden gleichen Zeitelementen entsprechenden, nach dem Vorhergehenden offenbar ebenfalls einander gleichen Kreisbogenelemente sämmtlich durch u, so ist $u = c\tau$, und die Summe aller dieser Kreisbogenelemente ist folglich $nc\tau = ct$. Da aber die Summe dieser Kreisbogenelemente offenbar dem, dem Complemente des Winkels SAT entsprechende Kreisbogen in dem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise gleich ist, so ist, wenn wir einen das Complement des Winkels SAT messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise durch φ bezeichnen, nach dem Vorhergehenden offenbar

$$ct = r\varphi, \; ct = \frac{c\varphi}{\gamma k}, \; \varphi = t\gamma k \cdot$$

Nun ist aber

$$s = AS = r\cos(90^\circ - \varphi) = r\sin\varphi,$$

$$\frac{v}{\gamma k} = ST = r\sin(90^\circ - \varphi) = r\cos\varphi;$$

also

$$s = r\sin(t\gamma k) = \frac{c}{\gamma k}\sin(t\gamma k),$$

$$v = r\gamma k \cdot \cos(t\gamma k) = c\cos(t\gamma k).$$

Durch diese beiden Gleichungen:

$$s = \frac{c}{\gamma k}\sin(t\gamma k), \; v = c\cos(t\gamma k)$$

Digitized by Google

ist unsere Bewegung, wenn nur, was wir oben vorausgesetzt haben, während der Zeit t die Geschwindigkeit v nicht verschwindet, vollständig charakterisirt.

In der That verschwindet aber, wie aus der obigen Betrachtung ganz von selbst hervorgeht, die Geschwindigkeit v, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, d. i. nach dem Vorhergehenden, wenn

$$t\sqrt{k} = \tfrac{1}{2}\pi\,, \text{ also } t = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$$

ist, und dann ist

$$s = \frac{c}{\sqrt{k}} = r\,.$$

Wenn dieser Zeitpunkt eingetreten ist, wird sich der Punkt M nicht mehr wie bisher von dem Punkte A entfernen, sondern er wird sich vielmehr vermöge der auf ihn nach dem Punkte A hin stetig wirkenden Kraft, welche jederzeit der Entfernung des Punktes M von dem Punkte A proportional ist, dem Punkte A wieder nähern, und wir wollen daher auch diese rückgängige Bewegung des Punktes M jetzt einer genauen Betrachtung unterwerfen.

Zu dem Ende sei A_1 in Fig. 102. der Punkt der Linie AB, von welchem der Punkt M sich nach dem Punkte A hin zu bewegen anfängt, und die Entfernung des Punktes A_1 von dem Punkte A, also die Linie AA_1, werde durch a bezeichnet. Am Ende der Zeit t_1, von dem Zeitpunkte an gerechnet, wo der Punkt M seine Bewegung in A_1 beginnt, befinde sich derselbe in S_1, so daß er in der Zeit t_1 den Weg $A_1S_1 = s_1$ zurücklegt; am Ende der Zeit $t_1 + \Delta t_1$ aber, wo Δt_1 positiv ist, gelange der Punkt M nach S_1', und lege daher in der Zeit $t_1 + \Delta t_1$ den Weg $A_1S_1' = s_1 + \Delta s_1$, wo $\Delta s_1 = S_1S_1'$ ist, zurück. Die am Ende der Zeit t_1 und am Ende der Zeit $t_1 + \Delta t_1$, d. h. in den Punkten S_1 und S_1', erlangten Geschwindigkeiten seien respective v_1 und $v_1 + \Delta v_1$, wo jetzt offenbar Δv_1 eine positive Größe ist.

Ganz auf ähnliche Art wie vorher kann man nun wieder, mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner Δt_1 ist, die Intensität der auf den Punkt M stetig wirkenden Kraft am Ende der Zeit t_1 durch $\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}$ ausdrücken, wobei man nur zu beachten hat, daß jetzt Δv_1 eine positive Größe ist, und da nun nach den unserer Aufgabe zum Grunde liegenden Voraussetzungen diese Kraft auch $k(a - s_1)$ ist, so erhalten wir die mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner Δt_1 ist, geltende Gleichung

$$k(a - s_1) = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}\,,$$

statt welcher man sich auf ähnliche Art wie früher auch leicht eine völlig genaue Gränzgleichung gesetzt denken kann.

Digitized by Google

Ferner ist auf ganz ähnliche Art wie oben

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1},$$

gleichfalls mit desto größerer Genauigkeit, je kleiner Δt_1 ist.

Daher haben wir jetzt die beiden Gleichungen

$$k\,(a - s_1) = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}, \quad v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1};$$

aus denen durch Division

$$\frac{k\,(a - s_1)}{v_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta s_1},$$

oder

$$(a - s_1)\,\Delta s_1 = \frac{v_1\,\Delta v_1}{k}, \quad ,$$

oder

$$(a - s_1) \cdot \Delta s_1 = \frac{v_1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\Delta v_1}{\sqrt{k}}$$

folgt.

Macht man nun nach Anleitung von Fig. 101. die Construction wieder auf ganz ähnliche Art wie vorher, so ist

$$AS_1 = a - s_1, \; U_1 T_1' = S_1 S_1' = \Delta s_1, \; S_1 T_1 = \frac{v_1}{\sqrt{k}}, \; U_1 T_1 = \frac{\Delta v_1}{\sqrt{k}};$$

und da nach dem Obigen

$$(a - s_1) \cdot \Delta s_1 = \frac{v_1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\Delta v_1}{\sqrt{k}}$$

ist, so ist

$$AS_1 \cdot U_1 T_1' = S_1 T_1 \cdot U_1 T_1$$

oder

$$\frac{AS_1}{S_1 T_1} = \frac{U_1 T_1}{U_1 T_1'},$$

woraus wieder die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $AS_1 T_1$ und $T_1 U_1 T_1'$ folgt, mittelst welcher man dann ferner leicht zeigt, daß der Winkel $AT_1 T_1'$ ein rechter Winkel ist.

Denkt man sich aber auch jetzt wieder in jedem Punkte der geradlinigen Bahn des Punktes M auf AB ein Perpendikel errichtet, welches der diesem Punkte der Bahn entsprechenden Größe $\frac{v_1}{\sqrt{k}}$ gleich ist, und die Endpunkte aller dieser Perpendikel durch eine Curve mit einander verbunden, so erhellet auf ganz ähnliche Art wie oben, daß diese Curve ein aus dem Punkte A als Mittelpunkt mit der Größe a als Halbmesser beschriebener Kreis ist, wo nach dem Obigen bekanntlich

$$a = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

gesetzt werden muß.

Digitized by Google

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AS_1T_1 und $T_1U_1T_1'$ ergiebt sich aber ferner die Proportion $AT_1 : S_1T_1 = T_1T_1' : U_1T_1'$, d. i. nach dem Vorhergehenden

$$a : \frac{v_1}{\gamma k} = T_1T_1' : \Delta s_1,$$

woraus sich

$$T_1T_1' = a\gamma k \cdot \frac{\Delta s_1}{v_1},$$

oder, weil nach dem Obigen $a\gamma k = c$ ist,

$$T_1T_1' = c\frac{\Delta s_1}{v_1}$$

ergiebt. Nach dem Obigen ist aber auch

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}, \text{ also } \frac{\Delta s_1}{v_1} = \Delta t_1;$$

und es ist folglich

$$T_1T_1' = c\Delta t_1,$$

welches wieder ein sehr einfacher Ausdruck für das dem Zeitelemente Δt_1 entsprechende Kreisbogenelement T_1T_1' ist.

Bezeichnet man jetzt einen den Winkel S_1AT_1 messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise durch φ_1, so gelangt man durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie in dem ersten oben behandelten Falle zu den Gleichungen

$$ct_1 = a\varphi_1, \quad ct_1 = \frac{c\varphi_1}{\gamma k}, \quad \varphi_1 = t_1\gamma k;$$

und da nun

$$s_1 = A_1S_1 = AA_1 - AS_1 = a - a\cos\varphi_1,$$

$$\frac{v_1}{\gamma k} = S_1T_1 = a\sin\varphi_1$$

ist; so ist

$$s_1 = a - a\cos(t_1\gamma k) = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t_1\gamma k),$$

$$v_1 = a\gamma k \cdot \sin(t_1\gamma k) = c\sin(t_1\gamma k).$$

Durch diese beiden Gleichungen

$$s_1 = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t_1\gamma k), \quad v_1 = c\sin(t_1\gamma k)$$

ist unsere Bewegung wieder vollständig charakterisirt.

Wenn der Punkt M in dem Punkte A anlangt, so ist offenbar $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, d. i. nach dem Vorhergehenden

$$t_1\gamma k = \tfrac{1}{2}\pi, \text{ also } t_1 = \frac{\pi}{2\gamma k};$$

und folglich nach den obigen Gleichungen:

$$s_1 = \frac{c}{\gamma k}, \quad v_1 = c.$$

Digitized by Google

Denken wir uns jetzt den der ersten Bewegung von A gegen A_1 entsprechenden Punkt S und den der zweiten Bewegung von A_1 gegen A entsprechenden Punkt S_1 mit einander zusammenfallend, so ist

$$s + s_1 = a = \frac{c}{\gamma k},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$s = \frac{c}{\gamma k} \sin(t\gamma k), \quad s_1 = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k} \cos(t_1\gamma k)$$

ist:

$$\sin(t\gamma k) = \cos(t_1\gamma k).$$

Weil nun nach dem Obigen bekanntlich weder $t\gamma k$, noch $t_1\gamma k$ größer als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist

$$t\gamma k = \tfrac{1}{2}\pi - t_1\gamma k, \quad t + t_1 = \frac{\pi}{2\gamma k};$$

und da ferner

$$v = c\cos(t\gamma k), \quad v_1 = c\sin(t_1\gamma k)$$

ist, so ist

$$v = c\cos(t\gamma k), \quad v_1 = c\sin(\tfrac{1}{2}\pi - t\gamma k) = c\cos(t\gamma k);$$

also $v = v_1$. Hieraus schließt man leicht, daß bei der ersten Bewegung von A gegen A_1 und bei der zweiten Bewegung von A_1 gegen A dieselben Wege vorwärts und rückwärts immer in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, und daß bei beiden Bewegungen der sich bewegende Punkt in denselben Punkten der Linie AB immer dieselbe Geschwindigkeit hat.

Wenn der Punkt M nach seiner in A_1 (Fig. 103.) anfangenden rückgängigen Bewegung in A mit der Geschwindigkeit c wieder angekommen ist, so bewegt er sich nun offenbar über A hinaus ganz in derselben Weise wie vorher von A bis A_1 wieder von A bis A′, wo $AA' = AA_1$ ist, und dann wieder in derselben Weise wie vorher von A_1 bis A wieder von A′ bis A, wo er abermals die Geschwindigkeit c erlangt; und daß dann diese zwischen den Punkten A′ und A_1 vor sich gehende Bewegung unausgesetzt ganz in derselben Weise fortdauern wird, versteht sich von selbst.

Eine Bewegung von der so eben näher charakterisirten Art wird überhaupt eine schwingende Bewegung oder eine oscillirende Bewegung, eine Schwingungsbewegung oder eine Oscillationsbewegung genannt; und wenn man sich jetzt den Anfang dieser Bewegung in A′ denkt, so nennt man die ganze Bewegung von A′ durch A nach A_1 und dann wieder zurück von A_1 durch A nach A′ eine Schwingung oder eine Oscillation. Die Zeit einer Schwingung oder einer Oscillation wird die Schwingungsdauer oder die Oscillationsdauer, auch die Schwingungszeit oder die Oscillationszeit, genannt; $AA' = AA_1$ heißt die

Digitized by Google

Schwingungsweite oder Amplitude*); und die Geschwindigkeit, welche das Mobil in A hat, die größte Geschwindigkeit nämlich, welche es bei seiner Bewegung überhaupt erlangt, wird die Schwingungsintensität genannt.

Bei jeder Schwingung oder Oscillation unterscheidet man vier Hauptphasen; der ersten, zweiten, dritten, vierten Phase entspricht nämlich die Bewegung von A' bis A, wo die Geschwindigkeit von 0 bis c wächst; die Bewegung von A bis A_1, wo die Geschwindigkeit von c bis 0 abnimmt; die Bewegung von A_1 bis A, wo die Geschwindigkeit von 0 bis c wächst; die Bewegung von A bis A', wo die Geschwindigkeit von c bis 0 abnimmt. Die beiden ersten Phasen pflegt man auch wohl die positiven Phasen, die beiden letzten Phasen die negativen Phasen zu nennen.

§. 143.

Rechnen wir jetzt die Zeit t von dem Momente des Anfangs der Schwingungsbewegung in dem Punkte A' an, und bezeichnen den ganzen in derselben durchlaufenen Weg durch s, die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit, indem wir dieselbe in den positiven Phasen, wo die Bewegung von A' nach A_1 hin gerichtet ist, als positiv, in den negativen Phasen, wo die Bewegung von A_1 nach A' hin gerichtet ist, als negativ betrachten, aber durch v; so ist nach dem Vorhergehenden während der ersten Phase:

$$s = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k).$$

Während der zweiten Phase ist:

$$s = \frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\sin(t\gamma k - \tfrac{1}{2}\pi), \quad v = c\cos(t\gamma k - \tfrac{1}{2}\pi);$$

d. i.

$$s = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k).$$

Während der dritten Phase ist:

$$s = 2\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k - \pi), \quad -v = c\sin(t\gamma k - \pi);$$

d. i.

$$s = 3\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k).$$

Während der vierten Phase ist:

$$s = 3\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\sin(t\gamma k - \tfrac{3}{2}\pi), \quad -v = c\cos(t\gamma k - \tfrac{3}{2}\pi);$$

*) Einige Schriftsteller, z. B. J. F. W. Herschel, nennen A'A, die Amplitude, also AA' = AA_1 die halbe Amplitude. Ich bin im Obigen Baumgartner, v. Ettingshausen und Anderen gefolgt.

Digitized by Google

d. i.

$$s = 3\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k).$$

Also ist für die positiven Phasen:

$$s = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k);$$

und für die negativen Phasen:

$$s = 3\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k).$$

Bezeichnet man die Amplitude durch a, so ist nach dem Obigen bekanntlich

$$a = \frac{c}{\gamma k};$$

also für die positiven Phasen:

$$s = a - a\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k);$$

und für die negativen Phasen:

$$s = 3a + a\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k).$$

Bezeichnet man die Schwingungsdauer durch T, so ist nach dem Obigen

$$T = 4 \cdot \frac{\pi}{2\gamma k} = \frac{2\pi}{\gamma k}, \text{ also } \gamma k = \frac{2\pi}{T};$$

folglich

$$a = \frac{cT}{2\pi};$$

und für die positiven Phasen:

$$s = a - a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad v = c\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right);$$

für die negativen Phasen dagegen:

$$s = 3a + a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad v = c\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right).$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Mobils am Ende der wie vorher genommenen Zeit t von dem Punkte A, indem wir dieselbe als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem sie von A aus nach A_1 oder nach A' hin liegt, durch σ; so ist für die erste Phase offenbar

$$\sigma = -\left(\frac{c}{\gamma k} - s\right) = s - \frac{c}{\gamma k},$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$s = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k)$$

ist,

$$\sigma = -\frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k).$$

Digitized by Google

Für die zweite Phase ist offenbar

$$\sigma = s - \frac{c}{\gamma k},$$

also, weil wieder

$$s = \frac{c}{\gamma k} - \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k)$$

ist,

$$\sigma = -\frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k).$$

Für die dritte Phase ist offenbar

$$\sigma = 3\frac{c}{\gamma k} - s,$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$s = 3\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k)$$

ist,

$$\sigma = -\frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k).$$

Für die vierte Phase ist offenbar

$$\sigma = -\left(s - 3\frac{c}{\gamma k}\right) = 3\frac{c}{\gamma k} - s,$$

also, weil wieder

$$s = 3\frac{c}{\gamma k} + \frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k)$$

ist,

$$\sigma = -\frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k).$$

Daher haben wir die beiden folgenden ganz allgemein gültigen Formeln:

$$\sigma = -\frac{c}{\gamma k}\cos(t\gamma k), \quad v = c\sin(t\gamma k);$$

oder

$$\sigma = -a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad v = c\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right).$$

§. 144.

Ueber die Natur des Lichts sind hauptsächlich zwei Ansichten geltend gemacht worden, von denen man die eine, ursprünglich von Newton vertretene, und späterhin vorzüglich von Laplace, Biot, J. F. W. Herschel, Brandes u. A. weiter ausgebildete, und namentlich auch kritisch beleuchtete Ansicht die Emissionstheorie oder die Corpusculartheorie zu nennen pflegt. Die Sätze oder vielmehr Annahmen, von denen diese Theorie ausgeht, sind folgende *):

*) J. F. W. Herschel: Vom Lichte. Stuttgart. 1831. S. 268.

Digitized by Google

1. Das Licht besteht aus materiellen Theilchen, welche wie die Materie überhaupt die Eigenschaft der Trägheit besitzen, und von allen leuchtenden Körpern mit fast derselben Geschwindigkeit ausgesandt werden.

2. Diese Theilchen sind von einander verschieden, rücksichtlich der ihnen beiwohnenden anziehenden und abstoßenden Kräfte, so wie auch rücksichtlich ihrer Verwandtschaft zu den anderen Körpern in der Natur, und ihrer Massen oder der Trägheit.

3. Indem diese Theilchen die Netzhaut treffen, reizen sie dieselbe und bringen das Sehen hervor. Die Theilchen, deren Trägheit am größten ist, bringen die Empfindung von rother Farbe hervor; diejenigen, deren Trägheit am kleinsten ist, erregen die Empfindung von violetter Farbe.

4. Die Molecule der materiellen Körper und die des Lichts üben auf einander eine gegenseitige Wirkung aus, die in einer Anziehung und Abstoßung besteht, welche sich nach einem Gesetze richtet, das eine Function ihres gegenseitigen Abstandes ist; dieses Gesetz läßt vielleicht verschiedene Abwechselungen zu, indem es aus einer anziehenden in eine abstoßende Kraft übergeht; allein wenn die Entfernung kleiner ist als eine gewisse sehr kleine Gränze, so ist dasselbe allemal anziehend bis zur Berührung; jenseits dieser Gränze befindet sich gewiß immer eine Sphäre, in welcher die Kraft abstoßend ist. Diese zurückstoßende Kraft bringt die Zurückwerfung des Lichts an den äußeren Oberflächen der dichten Mittel hervor, und die innere Anziehung bewirkt die Brechung und die innere Zurückwerfung (§. 43. S. 131.) des Lichts.

5. Diese Kräfte haben verschiedene absolute Werthe oder Intensitäten, nicht bloß für alle verschiedenen materiellen Körper, sondern für jede verschiedene Art der Lichttheilchen, indem sie von der Natur der chemischen oder Wahlverwandschaften sind, so daß daraus die verschiedene Brechbarkeit des Lichts hervorgeht.

6. Die Bewegung eines Lichttheilchens, welches der Wirkung dieser Kräfte unterworfen ist, so wie auch seine Geschwindigkeit, gehorcht denselben mechanischen Gesetzen, welchen die Bewegungen der gewöhnlichen Materie folgen, so daß daher jedes Theilchen eine Bahn beschreibt, die berechnet werden kann, wenn die wirkenden Kräfte bekannt sind.

7. Die Entfernung der einzelnen Körpertheilchen ist im Vergleich mit der Ausdehnung ihrer Wirkungssphäre auf die Lichttheilchen sehr gering.

8. Die Kräfte, welche die Zurückwerfung und die Brechung des Lichts hervorbringen, sind in allen meßbaren und merklichen Entfernungen von den Körpertheilchen, welche sie ausüben, völlig unmerklich.

9. Jedes Lichttheilchen gelangt während seines ganzen Weges durch den Raum in abwechselnd periodisch wiederkehrende Zustände, welche Newton Anwandlungen des leichtern Zurückwerfens und des leichtern Durchgangs nannte, vermöge

Digitized by Google

deren (auf welche Art sie auch entstehen mögen, ob durch eine Axendrehung der Theilchen, und dem daraus hervorgehenden Abwenden und Zuwenden der anziehenden und abstoßenden Pole, oder aus irgend einer anderen Ursache) sie in dem einen Zustande leichter den anziehenden, in dem anderen Zustande leichter den abstoßenden Kräften gehorchen.

Ich habe hier die hauptsächlichsten Grundlagen der Emissionstheorie oder der Corpusculartheorie nach einem der bewährtesten Schriftsteller über das Licht vollständig angegeben, muß aber nun bemerken, daß eine weitere Ausführung dieser Theorie durchaus nur mit Hülfe der höheren Analysis und der höheren Mechanik möglich ist, also hier nicht gegeben werden kann. Daß mehrere Erscheinungen mit Hülfe solcher die höheren Theile der Mathematik in Anspruch nehmenden Untersuchungen sehr genügend aus dieser Theorie abgeleitet und auf diese Weise also erklärt werden können, ist jedenfalls nicht zu leugnen; aber eben so gewiß ist es, daß sie uns auch über eine nicht geringe Anzahl von Erscheinungen fast ganz im Unklaren läßt, was namentlich von den Lichterscheinungen gilt, durch deren Entdeckung in neuerer Zeit der Kreis dieser Erscheinungen so sehr erweitert, und eine noch größere Erweiterung desselben fast mit Gewißheit für die Folge in Aussicht gestellt worden ist. Deshalb hat insbesondere in neuester Zeit eine andere Ansicht von der Natur des Lichts über die Emissionstheorie oder die Corpusculartheorie die Oberhand gewonnen und fast bei allen Physikern Eingang gefunden, welche wir daher jetzt etwas näher charakterisiren wollen.

§. 145.

Diese andere Ansicht über die Natur des Lichts, welche ursprünglich von Huygens vertreten, und späterhin hauptsächlich von Euler, Th. Young, Fresnel, J. F. W. Herschel, Cauchy u. A. weiter ausgebildet und streng theoretisch zu begründen versucht worden ist, nennt man die Undulationstheorie oder die Wellentheorie, und die wichtigsten Grundlagen derselben sind folgende *):

1. Ein sehr dünnes, feines und elastisches Mittel, der Aether, erfüllt den ganzen Raum und durchdringt alle Körper, indem es die Zwischenräume zwischen den Molecülen derselben einnimmt, und legt der Bewegung der Erde, der Planeten und Kometen in ihren Bahnen, entweder weil es frei durch diese Körper hindurchgeht, oder weil es zu dünn ist, ein Hinderniß nicht in den Weg, welches durch die feinsten astronomischen Beobachtungen merklich würde **); dieser Aether besitzt die Eigenschaft der Trägheit, aber keine Schwere.

*) A. a. O. S. 286.

**) Von neueren astronomischen Rechnungen, welche allerdings auf einen gewissen Widerstand, den die Weltkörper bei ihren Bewegungen im Raume erleiden, hinzudeuten scheinen, wollen wir hier absehen.

Digitized by Google

2. Die Theilchen des Aethers können durch die wägbare Materie in Bewegung gesetzt werden, so daß, wenn ein Theil eine Bewegung erhält, dieser die Bewegung den zunächst liegenden Theilen mittheilt; auf diese Art pflanzt sich die Bewegung immer weiter nach allen Richtungen nach denselben mechanischen Gesetzen fort, welche die Fortpflanzung der Wellen in andern elastischen Mitteln, als Luft, Wasser oder auch in festen Körpern, nach ihrer relativen Beschaffenheit bestimmen.

3. Im Inneren der brechenden Mittel befindet sich der Aether in einem Zustande von geringerer Elasticität im Vergleich mit der Dichtigkeit, als im leeren Raume; und je stärker das Mittel bricht, desto geringer ist, relativ genommen, die Elasticität des darin befindlichen Aethers.

4. Die dem Aether im leeren Raume mitgetheilten Schwingungen werden durch brechende Mittel vermittelst des in ihnen enthaltenen Aethers fortgepflanzt, allein mit einer Geschwindigkeit, die dem geringeren Grade der Elasticität entspricht.

5. Werden schwingende Bewegungen von einer besonderen Art durch den Aether fortgepflanzt, und erreichen sie nach ihrem Durchgange durch das Auge die Netzhaut, so bringen sie durch ihren Reiz auf dieselbe die Empfindung von Licht oder das Sehen hervor.

6. Die Anzahl der in einer bestimmten Zeit unsern Nerven durch die denselben am nächsten liegenden Aethertheilchen ertheilten Stöße oder Schläge bestimmt die Farbe des Lichts, und von der derselben Zeit entsprechenden Amplitude der Schwingungen hängt die Helligkeit ab.

Auch diese Ansicht über die Natur des Lichts, die allerdings viele Erscheinungen mit überraschender Leichtigkeit zu erklären geeignet ist, und sich auch durch ihre Analogie mit den Erklärungen anderer Naturerscheinungen, namentlich des Schalls, empfiehlt, gestattet eine vollständige Ausführung und strenge theoretische Begründung ohne eine sehr ausgedehnte und sehr weitgehende Anwendung der höheren Analysis und der höheren Mechanik durchaus nicht; da dieselbe aber vorzüglich in neuester Zeit eine so große Anerkennung fast bei allen Physikern gefunden, und so viele scharfsinnige theoretische Arbeiten schon hervorgerufen hat und fernerhin gewiß noch mehr hervorrufen wird, so werden einige weitere Ausführungen über diesen wichtigen Gegenstand hier nicht fehlen dürfen, zu denen wir daher jetzt übergehen wollen.

§. 146.

Wir wollen annehmen, daß durch einen leuchtenden Punkt ein Aethertheilchen in geradlinige Schwingungen versetzt worden sei, so muß sich diese schwingende Bewegung durch alle in ihrer Richtung liegende Aethertheilchen in gleicher Weise fortpflanzen, was freilich seine vollständige Begründung und nähere

Digitized by Google

Bestimmung nur in einer strengen mathematischen Theorie der Fortpflanzung schwingender Bewegungen durch elastische Körper, die sich aber hier nicht geben läßt, würde finden können. Diese Fortpflanzung erfordert aber eine gewisse Zeit und wird die von dem zuerst schwingenden Aethertheilchen entfernteren Theilchen des Aethers später erreichen, als die näher bei dem zuerst schwingenden Aethertheilchen liegenden Theilchen des Aethers. Nehmen wir nun an, daß diese Fortpflanzung mit der Geschwindigkeit G, welche nach dem Mittel, in welchem der Aether sich befindet, verschieden sein wird, vor sich gehe, so wird, wenn e die Entfernung eines Aethertheilchens von dem zuerst schwingenden Aethertheilchen bezeichnet, offenbar $\frac{e}{G}$ die Zeit sein, welche von dem Momente, wo das zuerst schwingende Aethertheilchen seine Schwingungen begann, bis zu dem Momente, wo das in der Entfernung e von diesem Aethertheilchen befindliche Aethertheilchen zu schwingen anfängt, verfließt. Ist nun t eine gewisse von dem Anfange der ersten positiven Phase des zuerst schwingenden Aethertheilchens verflossene Zeit, und bezeichnen σ_e, v_e für das in der Entfernung e von dem zuerst schwingenden Aethertheilchen befindliche Aethertheilchen die den in §. 143. überhaupt durch σ, v bezeichneten Größen entsprechenden Größen; so hat man nach dem angeführten Paragraphen offenbar die Gleichungen

$$\sigma_e = -a\cos\left\{2\pi\frac{t-\frac{e}{G}}{T}\right\},\quad v_e = c\sin\left\{2\pi\frac{t-\frac{e}{G}}{T}\right\}$$

oder

$$\sigma_e = -a\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\},\quad v_e = c\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\};$$

wo die Bedeutung von a, c, T aus dem angeführten Paragraphen bekannt ist.

Denken wir uns jetzt zwei Aethertheilchen, die sich in den Entfernungen e, ε von dem zuerst schwingenden Aethertheilchen befinden, so ist für diese beiden Aethertheilchen unter Voraussetzung derselben Zeit t, d. h. in demselben Zeitmomente, nach dem Vorhergehenden:

$$\sigma_e = -a\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\},\quad v_e = c\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\}$$

und

$$\sigma_\varepsilon = -a\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\right\},\quad v_\varepsilon = c\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\right\}.$$

Sollen nun diese beiden Aethertheilchen sich in demselben Zeitmomente genau in demselben Schwingungszustande befinden, so muß offenbar

$$\sigma_e = \sigma_\varepsilon,\quad v_e = v_\varepsilon;$$

Digitized by Google

also nach dem Vorhergehenden

$$\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\}=\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\right\},$$

$$\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\}=\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\right\}$$

sein, woraus sich nach bekannten goniometrischen Sätzen, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)=2n\pi\pm 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right),$$

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)=\begin{cases}2n\pi+2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\\(2n+1)\pi-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\end{cases};$$

also, weil zugleich

$$\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\}=\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\right\},$$

$$\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)\right\}=\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right)\right\}$$

sein muß,

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e}{GT}\right)=2n\pi+2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varepsilon}{GT}\right),$$

und hieraus ferner

$$\frac{\varepsilon-e}{GT}=n \quad \text{oder} \quad \varepsilon-e=nGT$$

ergiebt.

Schneiden wir nun auf der von dem zuerst in Schwingungen gerathenen Aethertheilchen ausgehenden geraden Linie, in welcher die Schwingungen erfolgen, von einem beliebigen Punkte in dieser Linie an, gleiche Stücke von der Größe GT ab, so befinden sich die Aethertheilchen in den Endpunkten dieser Stücke in demselben Zeitmomente nach dem Vorhergehenden offenbar sämmtlich in denselben Schwingungszuständen, die zwischen den Endpunkten der in Rede stehenden Stücke liegenden Aethertheilchen können sich aber in allen beliebigen Schwingungszuständen befinden. Dies hat darauf geführt, Stücke des Aethers von der Länge GT Wellen zu nennen; nur muß man, weil offenbar die durch einen leuchtenden Punkt in dem Aether erregten Schwingungen im Aether nach allen möglichen von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Richtungen fortgepflanzt werden, diese Wellen sich als von um die Größe GT von einander entfernten concentrischen Kugelflächen begränzte Kugelschalen denken, und die Größe GT pflegt man dann die Wellen-

Digitized by Google

länge zu nennen, so daß also, wenn L die Wellenlänge bezeichnet,

$$L = GT,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\sigma_0 = -a\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{L}\right)\right\}, \quad v_0 = c\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{L}\right)\right\}$$

ist.

Die Richtung eines Strahls im Undulationssysteme ist immer als eine auf der Oberfläche gewisser Wellen senkrecht stehende gerade Linie zu betrachten.

§. 147.

Die Zurückwerfung und Brechung des Lichts sind schon von Huygens nach der Undulationstheorie im Wesentlichen auf folgende Art erklärt worden.

Wir wollen annehmen, daß S ein leuchtender Punkt sei, von welchem aus in einem gewissen Mittel M sich Aetherwellen nach den Richtungen SA, SA_1, SA_2, SA_3, ... fortpflanzen, und in den Punkten A, A_1, A_2, A_3, ... die ebene Begränzungsfläche eines zweiten Mittels M' treffen, was, weil die Linien SA, SA_1, SA_2, SA_3, ... nicht sämmtlich unter einander gleich sind, nothwendig zu verschiedenen Zeiten geschehen wird. Dann werden die Punkte A, A_1, A_2, A_3, ... die Mittelpunkte neuer Wellen, die sich theils in dem Aether, welchen das Mittel M' enthält, mit einer gewissen diesem Mittel entsprechenden, im Allgemeinen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwellen in dem Mittel M verschiedenen, Geschwindigkeit, theils in dem im ersten Mittel M selbst enthaltenen Aether mit der demselben entsprechenden Geschwindigkeit, welche natürlich von der Geschwindigkeit, mit der sich früher die Wellen nach den Linien SA, SA_1, SA_2, SA_3, ... fortpflanzten, nicht verschieden sein kann, fortpflanzen werden. Diese letzteren, von der das Mittel M' begränzenden Ebene aus in dem Mittel M gewissermaßen zurückgehenden Aetherwellen, die offenbar dem Falle der Zurückwerfung allein entsprechen können, wollen wir von jetzt an bloß in nähere Betrachtung ziehen und ihre Richtungen untersuchen. Diese Richtungen mögen die Linien AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... sein, und wenn nun B, B_1, B_2, B_3, ... einem und demselben Zeitmomente entsprechende Punkte in den convexen sphärischen Oberflächen der in Rede stehenden Wellen sein sollen, so muß, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den sämmtlichen Linien SA, SA_1, SA_2, SA_3, ... und AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... völlig ein und dieselbe ist, nothwendig

$$SA + AB = SA_1 + A_1B_1 = SA_2 + A_2B_2 = \ldots.$$

sein. Beschreiben wir jetzt, dies vorausgesetzt, aus den Mittelpunkten A, A_1, A_2, A_3, ... mit den Halbmessern AB, A_1B_1,

Digitized by Google

$A_2 B_2$, $A_3 B_3$, ... Kugelflächen, welche also die convexen Oberflächen der gleichzeitigen Wellen darstellen werden, denken uns von dem leuchtenden Punkte S auf die das Mittel M' begränzende ebene Fläche ein dieselbe in dem Punkte S treffendes Perpendikel gefällt, und verlängern selbiges über die in Rede stehende Ebene hinaus nach deren entgegengesetzter Seite hin bis zu einem Punkte S', für welchen $SS = S'S$ ist; so erhellet sehr leicht, daß, wenn wir

$$SA + AB = SA_1 + A_1 B_1 = SA_2 + A_2 B_2 = ... = R$$

setzen, eine aus dem Punkte S' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser R beschriebene Kugelfläche die sämmtlichen vorher aus den Punkten A, A_1, A_2, A_3, ... als Mittelpunkten mit den Halbmessern AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, ... beschriebenen Kugelflächen berühren oder, wie man, wenn man sich die letzteren Kugelflächen in stetiger Folge denkt, in der Geometrie zu sagen pflegt, einhüllen wird. Denken wir uns nun die Linien SA, SA_1, SA_2, SA_3, ... einander unendlich nahe, und gewissermaßen zu einem Strahlenbündel, als welches wir uns eigentlich jeden Lichtstrahl vorstellen müssen, vereinigt, so ist die aus dem Mittelpunkte S' mit dem Halbmesser R beschriebene Kugelfläche gewissermaßen als die Oberfläche einer durch die Gesammtheit der dem in Rede stehenden Lichtstrahle entsprechenden einzelnen gleichzeitigen Wellen entstandenen oder gebildeten größeren Welle zu betrachten, und ein in der Oberfläche dieser größeren Welle sich befindendes Auge wird daher einen besonders vorherrschenden oder besonders starken Eindruck von dem von der das Mittel M' begränzenden Ebene in dem Mittel M zurückgehenden Lichte, d. h. eigentlich von den in diesem Mittel zurückgehenden Aetherwellen, erhalten, woraus sich, da die größere Welle ihren Mittelpunkt in S' hat und also als aus diesem Punkte ausgegangen betrachtet werden kann, unmittelbar ergiebt, daß das Auge den Punkt S in dem Punkte S' erblicken muß. Daß aber hierin das Reflexionsgesetz, wie wir es aus unseren früheren Betrachtungen schon kennen, geradezu vollständig ausgesprochen ist, übersieht ein Jeder auf den ersten Blick*).

Bei der Erklärung der Refraction wollen wir größerer Einfachheit wegen nur Strahlen (man weiß, was man im Sinne der Undulationstheorie unter einem Strahle zu verstehen hat) betrachten, welche, sonst eine beliebige Lage im Raume habend, einander parallel sind, dessenungeachtet aber als von

*) Das im Obigen bei der Erklärung der Reflexion hauptsächlich in Anwendung gebrachte Princip, welches wir in ganz ähnlicher Weise nachher auch bei der Erklärung der Refraction in Anwendung bringen werden, nennt z. B. Moigno in seinem Répertoire d'Optique moderne. I. Paris. 1847. p. 78., aber auch andere französische Physiker, vorzugsweise le principe d'Huygens oder auch le principe de la grande onde oder le principe de l'onde principale (Princip der großen Welle).

Digitized by Google

einem und demselben leuchtenden Punkte S ausgehend angesehen werden, wo dann die Wellen nicht mehr von Kugelflächen, sondern von Ebenen begränzt sind. Eigentlich werden die Strahlen nur so nahe bei einander zu einem Strahlenbündel mit einander vereinigt gedacht, daß sie ohne allen merklichen Fehler als parallel betrachtet werden können, was sich weiter unten noch mit größerer Deutlichkeit herausstellen wird. Diese Strahlen sollen sich in dem Mittel M, eigentlich in dem dasselbe erfüllenden Aether, fortpflanzen, und mögen die Trennungsebene der beiden Mittel M und M′ in den Punkten A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... treffen, so daß also SA, SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, ... die parallelen Strahlen selbst sind. Die Punkte A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... werden, wie wir aus den vorhergehenden Betrachtungen über die Reflexion schon wissen, die Mittelpunkte neuer in dem Mittel M′, eigentlich in dem dasselbe erfüllenden Aether, fortschreitender sphärischer Wellen, wo nun aber die Fortschreitung in den Mitteln M und M′ mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die wir durch G und G′ bezeichnen wollen, vor sich geht. Die parallelen Strahlen SA, SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, ... denken wir uns nun auf eine Ebene projicirt, welche diesen sämmtlichen Strahlen parallel ist und auf der die beiden Mittel M und M′ von einander trennenden Ebene senkrecht steht, und in Fig. 104. die Ebene des Papiers sein mag. Sind dann in dieser Figur S′A′, $S'A_1'$, $S'A_2'$, $S'A_3'$, $S'A_4'$.... die in Rede stehenden Projectionen, so daß A′, A_1', A_2', A_3', A_4', ... die Projectionen der Punkte A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... sind, so werden diese Projectionen A′, A_1', A_2', A_3', A_4', ... sämmtlich in einer und derselben geraden Linie KL liegen, welche die Durchschnittslinie der Projectionsebene mit der die beiden Mittel M und M′ von einander trennenden Ebene ist. Die in dem Mittel M nach den parallelen Linien SA, SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, ... fortschreitenden Wellen mögen in den Punkten A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... respective zu den Zeiten t, t_1, t_2, t_3, t_4, ... eintreffen, so ist, wenn wir durch den Punkt A′ eine auf den natürlich einander sämmtlich parallelen Linien S′A′, $S'A_1'$, $S'A_2'$, $S'A_3'$, $S'A_4'$, ... senkrecht stehende Linie ziehen, welche die Linien $S'A_1'$, $S'A_2'$, $S'A_3'$, $S'A_4'$, ... respective in den Punkten C_1', C_2', C_3', C_4', ... schneidet, offenbar

$$A_1'C_1' = G(t_1 - t),$$
$$A_2'C_2' = G(t_2 - t),$$
$$A_3'C_3' = G(t_3 - t),$$
$$A_4'C_4' = G(t_4 - t),$$

u. s. w.

Sind ferner r, r_1, r_2, r_3, r_4, ... die Halbmesser der convexen sphärischen Oberflächen der von den Mittelpunkten A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... aus in dem Mittel M′ fortschreitenden sphärischen Wellen in demselben Zeitmomente, etwa am Ende der Zeit τ; so ist augenscheinlich

Digitized by Google

$$r = G'(\tau - t),$$
$$r_1 = G'(\tau - t_1),$$
$$r_2 = G'(\tau - t_2),$$
$$r_3 = G'(\tau - t_3),$$
$$r_4 = G'(\tau - t_4),$$

u. s. w.

also, wenn man subtrahirt:

$$r - r_1 = G'(t_1 - t),$$
$$r - r_2 = G'(t_2 - t),$$
$$r - r_3 = G'(t_3 - t),$$
$$r - r_4 = G'(t_4 - t),$$

u. s. w.

und folglich, in Verbindung mit dem Obigen, wenn man dividirt:

$$\frac{A_1'C_1'}{r - r_1} = \frac{A_2'C_2'}{r - r_2} = \frac{A_3'C_3'}{r - r_3} = \frac{A_4'C_4'}{r - r_4} = \ldots = \frac{G}{G'}.$$

Denkt man sich nun an die beiden Projectionen der der Projectionsebene parallelen größten Kreise der convexen sphärischen Oberflächen der den Mittelpunkten A, A_1 in demselben Zeitmomente τ entsprechenden, in dem Mittel M' fortschreitenden sphärischen Wellen auf der Projectionsebene die gemeinschaftliche äußere Berührende TU*) gezogen, welche die beiden in Rede stehenden Projectionen in den Punkten B', B_1' berührt; so stehen die Linien $A'B'$, $A_1'B_1'$ auf TU senkrecht, und es ist

$$A'B' = r, \quad A_1'B_1' = r_1.$$

Fällen wir dann ferner von A_2', A_3', A_4', ... auf TU die Perpendikel $A_2'B_2'$, $A_3'B_3'$, $A_4'B_4'$, ...; so ist offenbar

$$A'B' - A_1'B_1' : A'B' - A_2'B_2' : A'B' - A_3'B_3' : A'B' - A_4'B_4' : \ldots.$$
$$= A'A_1' : A'A_2' : A'A_3' : A'A_4' : \ldots.$$
$$= A_1'C_1' : A_2'C_2' : A_3'C_3' : A_4'C_4' : \ldots.$$

d. i.

$$r - r_1 : r - A_2'B_2' : r - A_3'B_3' : r - A_4'B_4' : \ldots.$$
$$= A_1'C_1' : A_2'C_2' : A_3'C_3' : A_4'C_4' : \ldots.$$

oder

$$\frac{A_1'C_1'}{r - r_1} = \frac{A_2'C_2'}{r - A_2'B_2'} = \frac{A_3'C_3'}{r - A_3'B_3'} = \frac{A_4'C_4'}{r - A_4'B_4'} = \ldots.$$

*) Daß diese Berührende TU nur eine solche Lage haben kann, wie die in Fig. 104. angenommene, geht aus der aus dem Obigen bekannten Gleichung $r - r_1 = G'(t_1 - t)$ hervor, weil nämlich natürlich $t_1 > t$, also $t_1 - t$ positiv, folglich auch $r - r_1$ positiv, und daher $r > r_1$, d. h. in Bezug auf die Figur (man vergleiche das Nachfolgende oben im Texte) $A'B' > A_1'B_1'$ ist.

Digitized by Google

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so erhält man

$$\frac{A_2'C_2'}{r-A_2'B_2'} = \frac{A_2'C_2'}{r-r_2},$$

$$\frac{A_3'C_3'}{r-A_3'B_3'} = \frac{A_3'C_3'}{r-r_3},$$

$$\frac{A_4'C_4'}{r-A_4'B_4'} = \frac{A_4'C_4'}{r-r_4},$$

u. s. w.

woraus auf der Stelle

$$A_2'B_2' = r_2,\ A_3'B_3' = r_3,\ A_4'B_4' = r_4, \ldots.$$

folgt, so daß also überhaupt

$$A'B' = r,\ A_1'B_1' = r_1,\ A_2'B_2' = r_2,\ A_3'B_3' = r_3,\ A_4'B_4' = r_4, \ldots$$

ist. Nimmt man nun alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich auf unzweideutige Weise, daß die convexen sphärischen Oberflächen der sämmtlichen den Mittelpunkten A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... und derselben Zeit τ entsprechenden Wellen in dem Mittel M' von der durch die Linie TU gelegten, auf der Projectionsebene senkrecht stehenden Ebene berührt werden, und diese Berührungsebene kann also auf ähnliche Art wie früher bei der Reflexion gewissermaßen als die Gesammtheit aller von den Punkten A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... in dem Mittel M' ausgegangenen gleichzeitigen Wellen betrachtet werden. Das in dieser Ebene befindliche Auge wird also einen besonders vorherrschenden oder besonders starken Lichteindruck erhalten, und wird den Punkt S, von dem man sich, wie schon oben erinnert worden ist, ein unendlich dünnes Bündel als parallel zu betrachtender Strahlen in dem Mittel M ausgehend zu denken hat, nach einer auf der in Rede stehenden Ebene senkrecht stehenden Richtung, welche daher überhaupt durch eine der auf der Linie TU senkrecht stehenden Linien $A'B'$, $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$, $A_3'B_3'$, $A_4'B_4'$, ... dargestellt gedacht werden kann, erblicken. Bezeichnen wir nun die Ergänzungen der Winkel $KA'S'$ und $LA'B'$ zu 90^0 durch ω und ω', so daß also $\angle\, KA'S' = 90^0 - \omega$, $\angle\, LA'B' = 90^0 - \omega'$ ist; so ist, wie leicht erhellen wird:

$$A_1'C_1' = A'A_1' \cdot \cos(90^0 - \omega) = A'A_1' \cdot \sin\omega,$$

$$A'B' - A_1'B_1' = A'A_1' \cdot \cos(90^0 - \omega') = A'A_1' \cdot \sin\omega';$$

also

$$\frac{A_1'C_1'}{A'B' - A_1'B_1'} = \frac{A_1'C_1'}{r-r_1} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega'},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\frac{A_1'C_1'}{r-r_1} = \frac{G}{G'}$$

ist,

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = \frac{G}{G'},$$

Digitized by Google

woraus sich ergiebt, daß $\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}$ ein constantes Verhältniß, nämlich dem Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in dem die beiden Mittel M und M′ erfüllenden Aether gleich ist. Aus allem Bisherigen geht aber wieder das Refractionsgesetz, so wie es uns aus unseren früheren Untersuchungen schon bekannt ist, unmittelbar vollständig hervor, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird.

Anmerkung. Die Newton'sche Theorie des Lichts führt, streng theoretisch mit Hülfe der höheren Analysis und der höheren Mechanik verfolgt, zu dem Resultate, daß das Verhältniß $\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}$ dem umgekehrten Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten G und G′ des Lichts in den beiden Mitteln M und M′ gleich ist*), so daß also nach dieser Theorie

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = \frac{G'}{G},$$

und folglich nicht, wie wir vorher aus der Undulationstheorie abgeleitet haben,

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = \frac{G}{G'}$$

ist, was wir hier, auch ohne die Newton'sche Theorie weiter begründen zu können, anführen, um wenigstens auf eine sehr in die Augen springende Verschiedenheit in den Resultaten, zu denen die beiden Theorieen des Lichts führen, hier aufmerksam zu machen.

Zugleich aber bemerken wir noch Folgendes. Die Newton'sche Theorie supponirt vorzüglich eine gewisse anziehende Kraft, mit der die brechenden Mittel auf das Licht wirken, und wenn wir die Intensität dieser anziehenden Kraft in einem brechenden Mittel, dessen Dichtigkeit als Einheit der Dichtigkeiten angenommen wird, in der Entfernung x von seiner Oberfläche durch F(x) bezeichnen, ferner

$$k^2 = \int_0^\infty F(x)\,\partial x$$

setzen, das Brechungsverhältniß für den Uebergang des Lichts aus dem leeren Raume in ein Mittel von der Dichtigkeit D aber durch n, die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im leeren Raume durch v bezeichnen; so ist **)

$$n = \sqrt{1 + \frac{4k^2 D}{v^2}},$$

also

$$n^2 - 1 = \frac{4k^2}{v^2} D, \quad \frac{n^2 - 1}{D} = \frac{4k^2}{v^2};$$

*) M. s. z. B. meine Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. Thl. I. Heft 1. Leipzig. 1848. S. 132. ff.

**) A. a. O. S. 140. Nr. 201., wenn man in der betreffenden Gleichung D = 0, für D′ aber D, und n für $\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}$ setzt.

Digitized by Google

folglich, da $\frac{4k^2}{v^2}$ offenbar eine constante Größe ist, auch $\frac{n^2-1}{D}$ eine constante Größe, wobei man oben §. 47. zu vergleichen hat. Beachtet man, daß

$$k^2 = \int_0^\infty F(x)\,\partial x$$

und v die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im leeren Raume ist, so ist klar, daß $\frac{4k^2}{v^2}$ eine Größe ist, welche gewissermaßen der Summe aller anziehenden Kräfte in einem Mittel von einer der Einheit gleichen Dichtigkeit proportional ist, und da dies nun nach dem Obigen auch von $\frac{n^2-1}{D}$ gilt, so hat man diese Größe die specifische Brechungskraft oder auch das Brechungsvermögen (m. s. §. 47.) genannt; die Größe n^2-1 aber, welche man erhält, wenn man die specifische Brechungskraft oder das Brechungsvermögen mit der Dichtigkeit des Mittels multiplicirt, nennt man die Brechungskraft dieses Mittels, wobei man von der Ansicht ausgeht, daß die anziehenden Kräfte, mit denen die Mittel auf das Licht wirken, ihren Dichtigkeiten proportional sind. Newton selbst (Optice. Lausannae et Genevae. Lib. II. Pars III. Prop. X.) spricht sich ziemlich dunkel über diesen Gegenstand aus, den wir hier mit den uns nach der Anlage dieses Werks zu Gebote stehenden Hülfsmitteln nicht weiter verfolgen können, und uns daher mit den obigen Andeutungen, die übrigens auch nur für der höheren Analysis kundige Leser völlig verständlich sind, begnügen müssen. Der Inhalt von §. 47. ist auch namentlich nur im Sinne der Newton'schen Theorie aufzufassen, indem auch die Ausdrücke vis refringens und vis refringens respectu densitatis, was man durch Brechungskraft und Brechungsvermögen im Deutschen wiedergegeben hat, von Newton (a. a. O. pp. 210. 211.) herrühren.

§. 148.

Vorzüglich und zunächst durch die ungemein einfache und leichte Erklärung, welche die Undulationstheorie von den Interferenzerscheinungen zu geben im Stande ist, hat dieselbe ein großes Uebergewicht über die Emanationstheorie gewonnen, und wir müssen daher auch hier auf diese sinnreiche Erklärung unser besonderes Augenmerk richten, wobei wir vorzugsweise das in §. 122. ausgesprochene Hauptgesetz der Interferenz des Lichts in's Auge fassen, weil ein weiteres Eingehen auf diesen wichtigen und interessanten Gegenstand uns die Natur dieses Werkes nicht gestattet.

Wir wollen im Allgemeinen annehmen, daß zwei von zwei verschiedenen Punkten A und A' ausgegangene Lichtstrahlen, die wir übrigens als völlig gleichartig annehmen, und im Folgenden in der Kürze beziehungsweise den ersten und den zweiten Strahl nennen werden, sich in einem gewissen Punkte B unter

Digitized by Google

einem so spitzen Winkel schneiden, daß sie in der Nähe des Punktes B ohne merklichen Fehler als mit einander zusammenfallend betrachtet werden können, und wollen die von diesen Strahlen von den Punkten A, A' bis zu dem Punkte B, in welchem sie sich treffen, zurückgelegten Wege AB, A'B respective durch w, w', die Zeiten aber, welche das Licht gebraucht, um diese Wege zu durchlaufen, respective durch t, t' bezeichnen. Wird dann, wie gewöhnlich, die Schwingungsdauer durch T, die Wellenlänge durch L, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch G bezeichnet, wo also nach §. 146. L = GT ist, und angenommen, daß auf die Wege w, w' eine Anzahl von respective n, n' halben Wellenlängen kommen, wo n, n' der Einfachheit wegen ganze Zahlen sein sollen; so ist

$$w = n \cdot \tfrac{1}{2}L = \tfrac{1}{2}nL, \quad w' = n' \cdot \tfrac{1}{2}L = \tfrac{1}{2}n'L;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$w = \tfrac{1}{2}nGT, \quad w' = \tfrac{1}{2}n'GT.$$

Nun ist aber ferner offenbar

$$w = Gt, \quad w' = Gt';$$

also

$$Gt = \tfrac{1}{2}nGT, \quad Gt' = \tfrac{1}{2}n'GT;$$

d. i.

$$t = \tfrac{1}{2}nT, \quad t' = \tfrac{1}{2}n'T;$$

und folglich, wenn wir w' größer als w, also auch t' größer als t annehmen:

$$t' - t = \tfrac{1}{2}(n' - n)T.$$

Ist nun n' — n eine gerade Zahl, so kann man

$$t' - t = \frac{n' - n}{2}T,$$

wo $\frac{n' - n}{2}$ eine ganze Zahl ist, setzen, und es erhellet auf der Stelle, daß in demselben Momente, wo der erste Strahl von dem Punkte A ausgeht, der Aether sich in beiden Strahlen genau in demselben Schwingungszustande befindet, so daß die Geschwindigkeiten gleich und nach derselben Seite hin gerichtet sind, was also auch ferner in dem Momente der Fall sein wird, wo die beiden Strahlen in dem Punkte B mit einander zusammentreffen, so daß also in dem Punkte B unter der gemachten Voraussetzung, in Folge welcher n' — n eine gerade Zahl sein soll, nothwendig eine Lichtverstärkung eintreten wird. Wenn dagegen n' — n eine ungerade Zahl ist, so kann man

$$t' - t = \frac{n' - n - 1}{2}T + \tfrac{1}{2}T,$$

wo wieder $\frac{n' - n - 1}{2}$ eine ganze Zahl ist, setzen, und es erhellet auf der Stelle, daß jetzt in demselben Momente, wo der

Digitized by Google

erste Strahl von dem Punkte A ausgeht, der Aether sich in den beiden Strahlen in solchen Schwingungszuständen befindet, daß die Geschwindigkeiten zwar gleich, aber nach entgegengesetzten Seiten hin gerichtet sind, was also auch ferner in dem Momente der Fall sein wird, wo die beiden Strahlen in dem Punkte B mit einander zusammentreffen, so daß also in dem Punkte B unter der gemachten Voraussetzung, in Folge welcher $n' - n$ eine ungerade Zahl sein soll, nothwendig eine Lichtvernichtung eintreten muß.

Wenn also zwei von verschiedenen leuchtenden Punkten ausgegangene gleichartige Strahlen mit einander unter einem sehr spitzen Winkel zusammentreffen, so tritt in dem Punkte, in welchem dies geschieht, eine Lichtverstärkung oder Lichtvernichtung ein, jenachdem die von den beiden Strahlen von den leuchtenden Punkten bis zu ihrem Durchschnittspunkte durchlaufenen Wege um ein gerades oder um ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge von einander verschieden sind.

Daß dies aber vollständig das uns schon aus §. 122. bekannte Hauptgesetz der Interferenz des Lichts ist, erhellet auf der Stelle, und zugleich leuchtet ein, daß die in §. 121. durch L bezeichnete und zu messen gelehrte Größe nichts anderes als eine Wellenlänge im Sinne der Undulationstheorie ist, so daß also mittelst des angeführten Paragraphen nun zugleich erhellet, wie es möglich gewesen ist, für die verschiedenen farbigen Strahlen die Wellenlängen zu bestimmen.

§. 149.

Auch die Erscheinungen der Beugung des Lichts bei dem Durchgange des Lichts durch eine schmale Spalte (§. 127.) lassen sich leicht auf das Princip der Interferenzen zurückführen, wenn man nur noch annimmt, daß jeder Punkt der convexen Oberfläche einer Welle wieder ein Mittelpunkt nach allen Seiten hin fortschreitender Wellen wird, nach deren Richtungen sich sein eigenthümlicher Schwingungszustand fortpflanzt.

Sei daher AB in Fig. 105. die Spalte, durch welche das Licht eintritt, und MN die derselben parallele Ebene, welche das eintretende Licht auffängt; C sei der Mittelpunkt von AB, und CE stehe auf MN senkrecht. Dann erhellet zuerst auf der Stelle durch eine ganz leichte Betrachtung, daß, wenn AG, BG zwei von A und B nach dem beliebigen Punkte G in MN gezogene gerade Linien sind, die Differenz AG — BG, welche verschwindet, wenn G mit E zusammenfällt, und nach einem bekannten Satze vom Dreieck immer kleiner als AB ist, sich der Linie AB nähert, wenn G sich von E entfernt, und der Linie AB beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur G weit genug von E entfernt nimmt, oder die Entfernung EG in's Unendliche wachsen läßt. So einfach dies aus einer bloßen Anschauung der

Digitized by Google

Figur sogleich hervorgeht, so kann es doch vielleicht noch etwas strenger auf folgende Art gezeigt werden. Es ist offenbar

$$AG^2 = CE^2 + (EG + \tfrac{1}{2}AB)^2,$$
$$BG^2 = CE^2 + (EG - \tfrac{1}{2}AB)^2;$$

also

$$AG^2 - BG^2 = (AG - BG)(AG + BG) = 2AB \cdot EG,$$

und folglich

$$AG - BG = 2AB \cdot \frac{EG}{AG + BG},$$

also

$$AG - BG = 2AB \cdot \frac{EG}{\sqrt{CE^2 + (EG + \tfrac{1}{2}AB)^2} + \sqrt{CE^2 + (EG - \tfrac{1}{2}AB)^2}},$$

oder

$$AG - BG = \frac{2AB}{\sqrt{\left(\frac{CE}{EG}\right)^2 + \left(1 + \frac{AB}{2EG}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{CE}{EG}\right)^2 + \left(1 - \frac{AB}{2EG}\right)^2}}.$$

Weil nun CE und AB constante Größen sind, so nähern die Brüche

$$\frac{CE}{EG} \text{ und } \frac{AB}{2EG}$$

sich der Null, wenn EG in's Unendliche wächst, und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur EG groß genug annimmt. Also nähert sich offenbar der Bruch

$$\frac{2AB}{\sqrt{\left(\frac{CE}{EG}\right)^2 + \left(1 + \frac{AB}{2EG}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{CE}{EG}\right)^2 + \left(1 - \frac{AB}{2EG}\right)^2}},$$

d. i. die Differenz $AG - BG$, der Gränze $\frac{2AB}{2} = AB$, wenn EG in's Unendliche wächst, und kann dieser Gränze beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur EG groß genug annimmt, was die oben aufgestellte Behauptung war.

Im Folgenden wollen wir nun immer jede von einem Punkte der Linie AB nach einem Punkte der Linie MN gezogene gerade Linie als die Richtung von Wellen betrachten, welche den, dem in Rede stehenden Punkte der Linie AB entsprechenden Schwingungszustand der in die Spalte AB getretenen Welle, wo nun AB selbst als ein seiner Kleinheit wegen als geradlinig anzusehender Theil dieser Welle zu betrachten ist, fortpflanzen.

In Fig. 106. schneide man auf MN von dem Punkte E aus die Stücke

$$EE_1, EE_2, EE_3, EE_4, EE_5, \ldots EE_n, \ldots$$

so ab, daß, wenn L wie gewöhnlich die Wellenlänge bezeichnet,

Digitized by Google

$$AE - BE = 0L,$$
$$AE_1 - BE_1 = 1L,$$
$$AE_2 - BE_2 = 2L,$$
$$AE_3 - BE_3 = 3L,$$
$$AE_4 - BE_4 = 4L,$$
u. s. w.
$$AE_n - BE_n = nL,$$
u. s. w.

ist; weil aber bekanntlich immer

$$AE_n - BE_n < AB$$

ist, und die Differenz $AE_n - BE_n$ sich der Größe AB bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, so wird das in Rede stehende Abschneiden der Stücke EE_1, EE_2, EE_3, EE_4, ... nur so lange möglich sein, so lange

$$nL < AB, \text{ d. i. } n < \frac{AB}{L}$$

ist, und es muß daher, wenn dieses Abschneiden überhaupt bis zu einer gewissen Gränze hin möglich sein soll, wenigstens immer $AB > L$, d. h. die Spalte AB wenigstens breiter als eine Wellenlänge sein.

Denkt man sich aus dem Punkt E_1 als Mittelpunkt mit den Halbmessern E_1B, E_1C zwischen den Schenkeln der Winkel AE_1B, AE_1C Kreisbogen beschrieben, so lassen sich diese Kreisbogen im vorliegenden Falle ihrer Kleinheit wegen näherungsweise als auf der Linie AE_1 senkrecht stehende gerade Linien betrachten, und es erhellet dann leicht, daß

$$AE_1 - CE_1 = \tfrac{1}{2}L$$

ist, so daß also nach dem Principe der Interferenz die Strahlen AE_1, CE_1 bei ihrem Zusammentreffen in E_1 sich gegenseitig vernichten, was ganz auf ähnliche Weise auch von den Strahlen CE_1, BE_1, und überhaupt von den Strahlen aE_1, bE_1 gilt, wenn a, b zwei beliebige Punkte in AC, BC sind, welche in diesen Linien nur eine solche Lage haben, daß sie von A, C gleich weit entfernt sind, wobei man nur immer zu beachten hat, daß den Punkten a, b der Strahlen aE_1, bE_1 gleiche Schwingungszustände entsprechen. Hieraus sieht man, daß in dem Punkte E_1 überhaupt Dunkelheit herrschen muß.

In dem Punkte E_2 ist

$$AE_2 - CE_2 = 1L, \quad CE_2 - BE_2 = 1L;$$

und es gilt also jetzt von AC und BC, nämlich von jedem dieser Theile der in die Spalte tretenden Welle für sich, ganz dasselbe, was vorher bei dem Punkte E_1 von AB galt, so daß also auch in dem Punkte E_2 Dunkelheit herrschen muß.

Für den Punkt E_3 denke man sich AB in drei gleiche Theile getheilt; dann gilt von jedem dieser Drittheile der Linie AB

Digitized by Google

als ein Theil der in die Spalte tretenden Welle betrachtet, ganz dasselbe, was vorher bei dem Punkte E_1 von AB galt, so daß also auch in E_2 Dunkelheit herrschen muß.

Für den Punkt E_4 denke man sich eben so AB in vier gleiche Theile getheilt, und betrachte jedes dieser Viertheile als einen besondern Theil der in die Spalte tretenden Welle; dann gilt offenbar wieder für jedes dieser Viertheile für sich ganz dasselbe, was vorher bei dem Punkte E_1 von AB galt, so daß also auch in E_4 Dunkelheit herrschen muß.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es muß also in den sämmtlichen Punkten

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, \ldots,$$

so viel deren nach dem Obigen überhaupt existiren können, Dunkelheit herrschen.

In dem Punkte E ist $AE = BE$, es kommen also offenbar die Strahlen AE, BE, so wie eben so jede von zwei in AB liegenden Punkten, die von C nach beiden Seiten hin gleich weit entfernt sind, ausgegangene Strahlen, in E mit völlig gleichen Schwingungszuständen an, und es muß folglich in E nothwendig Lichtverstärkung eintreten.

Von E an gegen E_1 hin nimmt die Lichtintensität ab bis zu Null in E_1; von E_1 an gegen E_2 hin nimmt die Lichtintensität von Null an bis zu einem gewissen Maximo zu und dann wieder ab bis zu Null in E_2, was nach dem Obigen nun leicht begreiflich ist, und durch die Versuche vollkommen bestätigt wird; ganz eben so ist es in E_1E_2, E_2E_3, E_3E_4, u. s. w. Daß in MN links von E ganz ähnliche Erscheinungen sich zeigen müssen, wie nach dem Vorhergehenden rechts von E, versteht sich von selbst.

Ist es möglich, die Differenz $AE_n - BE_n$ zu messen, so hat man, weil

$$AE_n - BE_n = nL$$

ist, auch

$$L = \frac{AE_n - BE_n}{n},$$

und kann also die Wellenlänge auf diese Weise bestimmen. Bezeichnet man den Winkel BCE_n durch φ_n, so ist, wie leicht erhellen wird, wenigstens näherungsweise

$$AE_n - BE_n = AB \cdot \cos\varphi_n,$$

folglich nach dem Obigen

$$L = \frac{AB \cdot \cos\varphi_n}{n},$$

so daß also die Wellenlänge L auch gefunden werden kann, wenn man die Breite AB der das Licht durchlassenden Spalte und den Winkel φ_n gemessen hat.

Nach Fraunhofer sind für die verschiedenen Farben die Wellenlängen folgende:

Digitized by Google

Roth	0,00002428	Pariser Zoll	=	$0^{mm},0006559$
Orange	0,00002175	„ „	=	$0^{mm},0005888$
Grün	0,00001945	„ „	=	$0^{mm},0005265$
Blau	0,00001794	„ „	=	$0^{mm},0004856$
Dunkelblau	0,00001587	„ „	=	$0^{mm},0004296$
Violett	0,00001464	„ „	=	$0^{mm},0003963$

Ich habe diese mit den in §. 121. nach Lamé angegebenen Werthen nicht ganz übereinstimmenden Zahlen aus dem Lehrbuche der Experimentalphysik von L. F. Kämtz. Halle. 1839. S. 382. entlehnt. M. s. auch Pouillet Thl. I. S. 493. Für die über das Roth hinaus liegenden Strahlen (bei B im Spectrum) findet man in anderen physikalischen Lehrbüchern noch:

0,00002541 Pariser Zoll = $0^{mm},0006879$.

§. 150.

Ich habe bisher versucht, mit Hülfe bloßer mathematischer Elementarsätze einige der wichtigsten Erscheinungen, welche das Licht darbietet, aus der Undulationstheorie so vollständig, als es auf diesem ganz elementaren Wege möglich ist, zu erklären. Auf dem nämlichen Wege aber noch weiter fortzuschreiten, ist ohne sehr große, dem Zwecke dieses Werks nicht entsprechende Weitläufigkeit nicht möglich, und würde am Ende doch nur zu wenig genügenden Resultaten führen. Zugleich bin ich auch der Meinung, daß eine vollständige Darstellung der Lehre von der Natur des Lichts ohne eine sehr weitgreifende Kritik, mit gleichmäßiger und, ich möchte sagen, völlig unpartheiischer Berücksichtigung der beiden über die Natur des Lichts bis jetzt hauptsächlich aufgestellten Ansichten in zweckmäßiger und wahrhaft fruchtbringender Weise nicht gegeben werden kann, aber auch, von dieser Seite aufgefaßt, jedenfalls noch ein dringendes Bedürfniß für die ganze Wissenschaft vom Lichte ist, dem jedoch ohne eine sehr ausgedehnte Anwendung der Lehren der höheren Mathematik nicht abgeholfen werden kann *). Rücksichtlich der Erklärung der doppelten Strahlenbrechung und der Polarisation des Lichts bin ich daher genöthigt, den Weg strenger mathematischer Betrachtungen und Entwickelungen zu verlassen, und muß mich begnügen, nur in ganz populärer Weise und bloß im Allgemeinen den Weg in der Kürze zu bezeichnen, welchen man bei der Erklärung der beiden genannten wichtigen Erscheinungen eingeschlagen hat, was ich nicht besser zu thun können glaube, als wenn ich ganz einem anerkannten Meister in der populären Darstellung **) folge, welcher mir zugleich die Hauptpunkte, auf

*) Einen solchen Versuch hoffe ich vielleicht bald in meinen Beiträgen zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften zu machen, wie auch schon in Theil I. Heft 3. S. 365. angedeutet worden ist.

**) Brandes in seinen Vorlesungen über die Naturlehre. Leipzig. 1844. S. 516. ff. und S. 526., woraus alles Folgende (§. 151.

Digitized by Google

die es hier besonders ankommen dürfte, in zweckmäßiger Kürze und mit vorzüglicher Deutlichkeit und Bestimmtheit hervorgehoben zu haben scheint.

§. 151.

Für einen Theil der Erscheinungen der doppelten Strahlenbrechung bietet die Undulationstheorie eine sehr angemessene Erklärung dar. Schon Huygens hatte dies mit dem ihm eigenthümlichen großen Scharfsinne gezeigt; da indeß die neueren Entwickelungen der Undulationstheorie eine noch angemessenere Darstellung gegeben haben, so wollen wir nur diese hier in einem ganz kurzen Abrisse mittheilen. Die gewöhnliche Bestimmung der Fortpflanzung der Aetherwellen setzt voraus, daß der Aether nach allen Richtungen gleich elastisch sei, und in der That kann auch wohl kein anderer Fall da angenommen werden, wo die Körpertheilchen, zwischen welchen der Aether enthalten ist, eine gleichmäßige Austheilung haben; aber in einem krystallisirten Körper ist es nicht unmöglich, daß die nach bestimmten Richtungen anders als nach den übrigen Richtungen wirkenden Attractionskräfte dem Aether eine andere Elasticität nach der einen als nach der anderen Richtung geben, oder bewirken, daß die von ihrem Gleichgewichtszustande entfernten Theilchen nach der einen Richtung mit mehr Gewalt als nach der anderen zu demselben zurückgeführt werden. Nimmt man eine solche Ungleichheit an, so ist die Gestalt einer von einem Mittelpunkte ausgehenden Welle nicht mehr sphärisch, sondern sphäroidisch oder bestimmter ellipsoidisch, und ihre Fortpflanzung von dem Punkte, wo sie ausgeht, stellt sich als unter sich ähnlichen Ellipsoiden um jenen Punkt entsprechend dar. Da wo eine Lichtwelle einen Krystall trifft, entstehen um die Punkte, wo sie nach und nach die Oberfläche desselben erreicht, solche ellipsoidische Wellen und die Fortpflanzung des Strahls hängt nun nach eben den Regeln von der gemeinschaftlichen Wirkung dieser Wellen, wie in den früheren Betrachtungen von den sich gleichsam in einander verlaufenden sphärischen Wellen ab; da zeigt sich, daß die Richtung des auf diese Weise im Innern des Krystalls fortgepflanzten, ungewöhnlich gebrochenen Strahles nach den Gesetzen bestimmt wird, die oben bei dem Doppelspath oder überhaupt bei den einaxigen Krystallen nachgewiesen worden sind.

Diese theoretische Bestimmung ist unstreitig von einem sehr bedeutenden Werthe; aber eine große Schwierigkeit scheint sie dennoch übrig zu lassen. Wir wissen nämlich, daß in einem Krystall nicht bloß ein ungewöhnlich gebrochener, sondern auch ein gewöhnlich gebrochener Strahl vorhanden ist, so daß wir also zwei Systeme von Wellen, ein sphärisches und ein ellip-

und §. 152.) fast wörtlich entlehnt ist, indem ich meine eigene, insbesondere auch kritische Darstellung dieses wichtigen Gegenstandes, welche sich der höheren Mathematik in weitester Ausdehnung bedient, jetzt absichtlich bei Seite setze und einer späteren besonderen Abhandlung (s. oben) vorbehalte.

Digitized by Google

soidisches, annehmen müssen, folglich auch zwei Arten von Aether, deren einer, nach allen Richtungen gleich elastisch, der einen Art von Aetherwellen ihre Entstehung giebt, der andere der anderen Art von Aetherwellen. Poisson bemerkt zwar nicht mit Unrecht, so gut wie Lichtwellen und Schallwellen in der Atmosphäre zugleich fortgehen, jene im Aether, diese in der Luft fortgepflanzt, so lasse sich auch hier ein zweifaches System von Wellen annehmen; aber ganz treffend scheint diese Vergleichung doch nicht zu sein, und daher scheint der Vorwurf, daß man zwei Aetherarten bedürfe, immer noch zu bestehen. Dieses ist die eine Schwierigkeit. Eine zweite scheint die zu sein, daß auch bei'm Durchgange durch die Luft die Eigenschaft der Welle, die vermöge jenes zweiten Aethers erlangt ist, fortdauert, und daß sie nun in dem zweiten Krystalle wieder die den dortigen zwei Wellensystemen entsprechenden Veränderungen annimmt. Jedenfalls scheint hier noch manche Dunkelheit zu herrschen, mancher Zweifel sich aufwerfen zu lassen, deren Beseitigung und dessen Widerlegung späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben muß.

§. 152.

Bei der Erklärung aller Erscheinungen, die nicht zu den Polarisationserscheinungen gehören, blieb die Undulationstheorie dem Grundsatze getreu, das Licht als dem Schalle*) analog anzusehen, bei den Vibrationen nicht bloß eine sphärische Ausbreitung der Wellen anzunehmen, sondern auch die Vibrationsbewegung der einzelnen Theilchen als senkrecht auf diese Wellenschichten vorauszusetzen. Aber die Erscheinungen der Polarisation ließen sich nach diesen Ansichten nicht erklären, und der hauptsächlichste Begründer der Undulationstheorie, der berühmte Fresnel, fand daher nöthig, in Beziehung auf sie ganz andere Voraussetzungen anzunehmen. Er bemerkte, daß die bis dahin gehegte Meinung, es müsse die Materie, in welcher das Licht sich fortpflanzt, ein elastisches Fluidum sein, in welchem die an einander liegenden Theilchen unmittelbar sich berühren und sich nach Verhältniß des Druckes zusammendrücken lassen, eine viel zu beschränkte sein, und daß man über die Art der Vibrationen der Lichtwellen eine andere Vorstellung fassen müsse. Wenn die Vibrationen der Aethertheilchen nach der Richtung des Strahles gehen, wie wir es mit gutem Grunde bei'm Schalle annehmen, so ist nicht einzusehen, wie der Lichtstrahl in Beziehung auf die eine Seite andere Modificationen erleiden könne, als in Beziehung auf die einen rechten Winkel von jener abstehende Seite; die Möglichkeit einer solchen Verschiedenheit wird dagegen klar, wenn wir Queervibrationen voraussetzen. Ohne jetzt nach

*) Die Lehre vom Schalle kommt erst in dem folgenden Theile dieses Werks vor; die einfachsten Begriffe aus dieser Lehre können aber wohl als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, und mehr ist nicht nöthig, um die in diesem Paragraphen wieder ganz mit den Worten von Brandes gegebene Erklärung der Polarisation zu verstehen.

Digitized by Google

der Art der Entstehung dieser Vibrationen zu fragen, ist es allerdings einleuchtend, daß hier die verschiedenen Seiten des Strahls ungleich sind, wenn wir zwar ein Fortgehen der Vibrationen von einer Kugelschicht auf die nächste annehmen, die Vibrationen selbst aber als eine in der Kugelschicht erfolgende Verschiebung der Theilchen ansehen. Fresnel hat die Möglichkeit einer bei dieser Queerrichtung der Verschiebung dennoch stattfindenden Fortpflanzung von einer Kugelschicht zur anderen nachgewiesen, indem er Folgendes bemerkt. Wenn wir uns einzeln stehende Körperchen, welche zu einem Gleichgewichte gelangt sind, denken, und sie, um der leichten Vorstellung willen, als in parallele Schichten geordnet ansehen, so könnten die in einer Schicht liegenden und in dieser bleibenden nicht von ihrer Stelle weichen, ohne vermöge der nun geänderten Attractionen und Repulsionen auch in den Körpern der nächsten Schicht eine Aenderung der Lage hervorzubringen; mithin werde eine einmal erregte Queervibration sich von Schicht zu Schicht fortpflanzen. Diese Bemerkung ist richtig, aber sie hebt nur den Zweifel nicht, warum denn nicht noch weit mehr die in derselben Schicht liegenden Theilchen ihren seitwärts liegenden Nachbarn diese Bewegung auch mittheilen, und warum der durch eine kleine Oeffnung eindringende Strahl nach der Richtung des Strahls, welche senkrecht auf jene Queervibrationen ist, die starken Wirkungen der Erleuchtung hervorbringt oder die Entstehung neuer gleich starker Queervibrationen zur Folge hat, während seitwärts nur die kaum merklichen Phänomene der Beugung des Lichts stattfinden, in den Gegenden, wohin die Ausweichungen der Aethertheilchen gerade gerichtet sind, und wo sie, wie es scheint, gerade die stärkste Wirkung hervorbringen müßten.

Nach Fresnel's Vorstellung sollen wir uns nun diese Ausweichungen der einzelnen Theilchen im unpolarisirten Strahle als nach verschiedenen Richtungen in so schneller Folge eintretend denken, daß keine einzelne Richtung der Vibrationen den Vorzug vor der anderen hat; im polarisirten Strahle hingegen sind diese Queervibrationen nur nach einer Richtung da, und die Veränderung, welche der Strahl bei der Polarisation erleidet, besteht also darin, daß die in unendlich schneller Folge wechselnden Richtungen der Vibrationen in den unpolarisirten Strahlen in den polarisirten Strahlen in immer gleiche Richtungen gebracht werden, daß da, wo zwei Strahlen bei der doppelten Brechung hervorgebracht werden, durch eine Zerlegung nach zwei auf einander senkrechten Richtungen die Vibrationen des einen Strahls in einer durch seine Richtung und die Richtung der Axe gehenden Ebene vorgehen, die des anderen Strahls in einer Ebene senkrecht auf die durch die Richtungen des Strahls und der Axe gelegte Ebene. Diese fest bestimmte Richtung der Transversalvibrationen, oder die Zerlegung der mannigfaltigen Vibrationen in solche, die nur eine oder die andere constante Richtung befolgen, kann nach Fresnel's Behauptung durch die Bre-

Digitized by Google

chung allemal hervorgebracht werden, sowohl wenn die ungleiche Geschwindigkeit der Strahlen, als auch wenn die Neigung der Wellen gegen eine Ebene es fordert.

Hat man nun diese Voraussetzungen angenommen, so sind freilich mehrere Erscheinungen als leichte Folgerungen anzusehen. Der polarisirte Strahl hat nun wirklich zwei Seiten in der Richtung der Queervibrationen, die ganz verschieden von den um 90° davon entfernten Seiten sind. Die entgegengesetzt polarisirten, d. h. in auf einander senkrechten Ebenen polarisirten Strahlen geben keine Interferenzen mehr mit einander, wie Fresnel durch Versuche gefunden hat, weil diese so wesentlich verschiedenen Vibrationen nicht verstärkend und schwächend auf die von der Differenz der Wege abhängige Weise auf einander einwirken können; gleich polarisirte Strahlen zeigen dagegen die Interferenzen, weil hier Hingang und Rückgang der Theilchen zusammentreffen oder einander gerade entgegengesetzt wirken können, und dies offenbar der Differenz der Wege entsprechend. Um die Interferenz bei unpolarisirten Strahlen zu erklären, ist es offenbar zureichend, die Wechsel in der Richtung der Vibrationen als eine regelmäßige Folge beobachtend anzusehen, wo dann allerdings, wenn in zwei Strahlen an bestimmtem Orte die Richtung der Vibration einmal zusammenstimmt, dieses unaufhörlich der Fall sein wird, dagegen wenn die Länge der Wege um eine halbe Wellenlänge, das heißt um den Zwischenraum, der die Transversalschwingungen, welche einander gerade entgegengesetzt sind, trennt, verschieden ist, so entsteht die zerstörende Interferenz.

Ich bemerke nochmals, daß ich bei der von jeder mathematischen Betrachtuug entkleideten ganz populären Darstellung in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen lediglich den oben erwähnten anerkannten Meister in populären Darstellungen habe reden lassen, weil ich selbst eine bessere Darstellung dieser Art zu geben nicht im Stande war, und auf eine streng mathematische Darstellung, die ohne Anwendung der höheren Mathematik zu geben nicht wohl möglich war, verzichten mußte, natürlich aber auch ein Verdienst bei der in den beiden genannten Paragraphen gegebenen, mir nicht gehörenden Auseinandersetzung nicht im Geringsten in Anspruch nehme. Ueberhaupt bin ich aber auch der Meinung, daß, ungeachtet der sehr verdienstlichen Bemühungen von Cauchy und Anderen, eine völlig consequent durchgeführte völlig strenge mathematische Theorie des Lichts uns noch fehlt, und sehr zu wünschen ist, daß bald ein dazu geeigneter Gelehrter sich einer solchen Arbeit unterziehe, wobei es, wie bei allen Theorieen dieser Art, darauf ankommen wird, aus möglichst wenigen hypothetisch angenommenen Grundsätzen alle bei dem Lichte bis jetzt beobachteten Erscheinungen mit völliger mathematischer Strenge abzuleiten. Möge daher dieser Newton für die Theorie des Lichts recht bald erscheinen!

Digitized by Google

Bei demselben Verleger, **C. B. Schwickert** in Leipzig, sind nachfolgende empfehlenswerthe Werke erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

J. A. Grunert,

Beiträge

zur

meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften.

In zwanglosen Heften herausgegeben. gr. 8. Erster Theil. Erstes bis drittes Heft. Mit 6 Figurentafeln. geh. 2 Thlr. 12 Ngr.

G. S. Klügel,

Mathematisches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet, in alphabetischer Ordnung.

Fortgesetzt von **C. B. Mollweide** und beendigt von **J. A. Grunert.** 5 Theile. Mit 39 Kupfertafeln. gr. 8. Herabgesetzter Preis 16 Thlr.

J. A. Grunert,

Supplemente

zu

G. S. Klügel's Wörterbuche der reinen Mathematik.

2 Abtheilungen. Mit 6 Kupfertafeln. gr. 8. 8 Thlr. 20 Ngr.

J. A. Grunert,

Elemente der Differential- und Integralrechnung

zum

Gebrauche bei Vorlesungen.

2 Theile. Mit 3 Figurentafeln. gr. 8. 2 Thlr. 18 Ngr.

Digitized by Google

J. A. Grunert,

Elemente der analytischen Geometrie

zum

Gebrauche bei Vorlesungen.

2 Theile. Mit 5 Figurentafeln. gr. 8. 2 Thlr. 20 Ngr.

J. A. Grunert,

Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie

in

analytischer Darstellung mit Anwendung auf Geodäsie und Astronomie,

zum

Gebrauche bei Vorlesungen.

Mit 3 Figurentafeln. gr. 8. 1 Thlr. 22 Ngr.

J. A. Grunert,

Leitfaden

für

den ersten Unterricht in der höhern Analysis.

Mit 1 Kupfertafel. gr. 8. 1 Thlr. 8 Ngr.

J. A. Grunert,

Optische Untersuchungen.

Enthaltend:

Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope und Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre.

2 Theile. Mit 3 Figurentafeln. gr. 8. 3 Thlr.

J. A. Grunert,

Loxodromische Trigonometrie.

Ein Beitrag zur Nautik.

gr. 8. geh. 21 Ngr.

J. A. Grunert,

Versuch einer neuen Methode

zur

Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite bei geodätischen Messungen.

gr. 8. geh. 12 Ngr.

Digitized by Google

J. S. T. Gehler,

Physikalisches Wörterbuch.

Neu bearbeitet
von
Brandes, Gmelin, Horner, Littrow, Muncke
und Pfaff.

XI Bände in 20 Theilen mit 273 Kupfertafeln nebst 6 Karten u. 5 Kupfertafeln z. Register. gr. 8.

Subscriptions-Preiss:
auf Druckpapier 72 Thlr. 12 Ngr.,
auf Schreibpapier 92 Thlr. 15 Ngr.

A. Hartrodt,

Lehrbuch

der
in den Kreis des Gymnasial-Unterrichts gehörenden allgemeinen Arithmetik.
gr. 8. 26 Ngr.

G. A. Jahn,

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung

und
ihre Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben.
Mit 1 Figurentafel. gr. 8. 1 Thlr.

G. A. Jahn,

Der Kalenderfreund,

ein sicherer Führer
durch das Gebiet des Kalenders, der Zeitrechnung und Sternkunde.
Ein Volks- und Schulbuch.
Mit 1 lithographirten Tafel. 8. geh. 15 Ngr.

C. L. v. Littrow,

Verzeichniss

geographischer Ortsbestimmungen
nach
den neuesten Quellen und mit Angabe derselben.
Aus dem
neuen physikalischen Wörterbuche besonders abgedruckt.
gr. 8. 2 Thlr. 15 Ngr.

Digitized by Google

C. L. v. Littrow,

Nachträge zum Verzeichniss

geographischer Ortsbestimmungen.

Aus dem neuen physikalischen Wörterbuche besonders abgedruckt. gr. 8. 5 Ngr.

J. v. Sniadecki,

Sphärische Trigonometrie

in

analytischer Darstellung mit Anwendung auf die Ausmessung der Erde und auf die sphärische Astronomie, zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen.

A. d. Polnischen nach der zweiten stark vermehrten Original-Ausgabe übersetzt und mit einer tabellarischen Uebersicht der vorzüglichsten und am häufigsten vorkommenden Formeln begleitet, von **L. Feldt.**

Mit 2 Kupfertafeln. gr. 8. 1 Thlr. 10 Ngr.

C. G. Wunder,

Versuch einer heuristischen Entwickelung

der

Grundlehren der reinen Mathematik

zum

Gebrauche bei dem Unterrichte auf gelehrten Schulen.

Zweite durchaus umgearbeitete und um Vieles vermehrte Ausgabe. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. 1 Thlr. 18 Ngr.

E. F. v. Bicquilley,

Die

Rechnung des Wahrscheinlichen.

Aus dem Franz. übersetzt und mit Anmerkungen versehen von **C. F. Rüdiger,** nebst einer Kupfertafel. gr. 8. 1 Thlr.

G. Fr. Hindenburg,

Ueber

Combinatorische Analysis

und

Derivations-Calcul,

einige Fragmente, gesammelt und zum Druck befördert.

gr. 8. 2 Thlr.

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

Digitized by Google

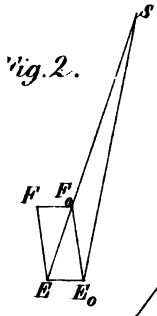


Fig. 2.

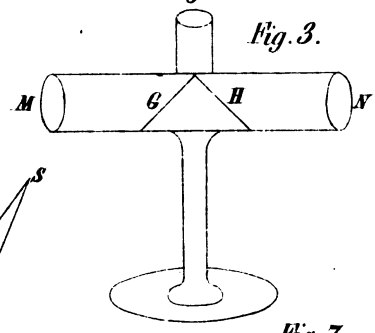


Fig. 3.

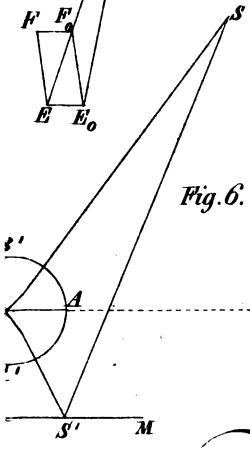


Fig. 6.

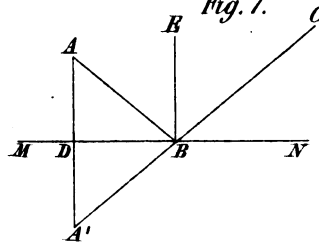
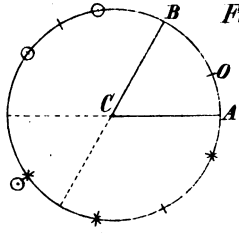


Fig. 7.



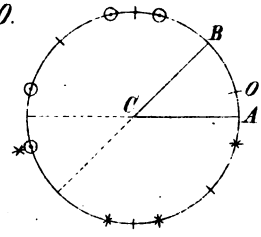
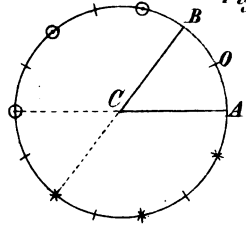


Fig. 10.



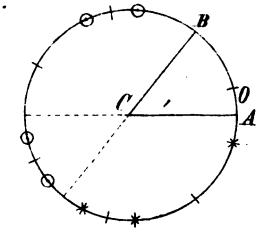


Fig. 11.

Fig. 1... Fig. 12.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 15.

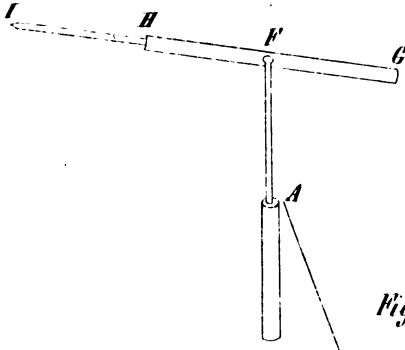


Fig. 18.

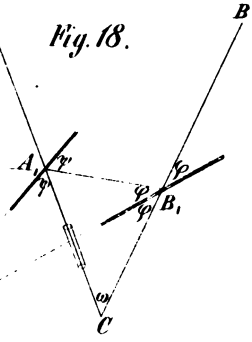
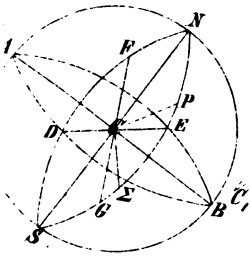


Fig. 17.



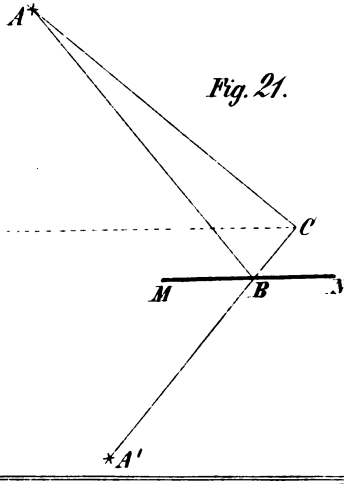


Fig. 13. ... Fig. 21.

Digitized by Google

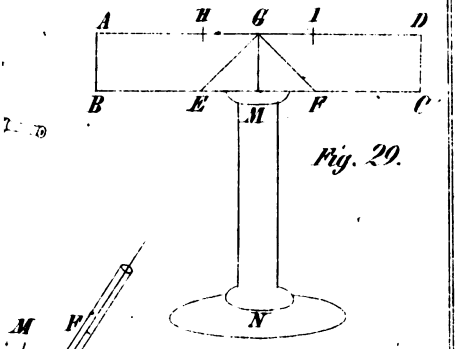
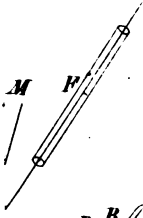


Fig. 29.



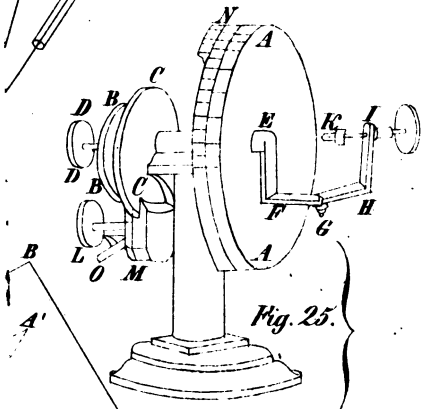
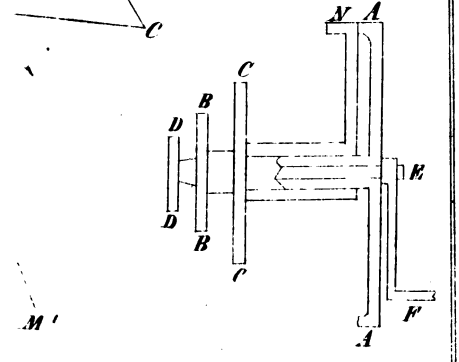


Fig. 25.



5. Fig. 26 – 28. s. Taf. IV. Fig. 29.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 30.

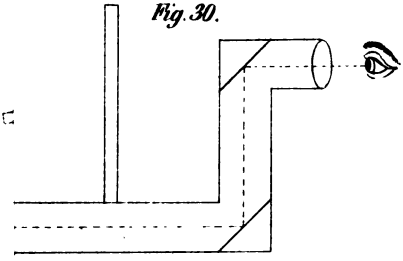


Fig. 32.

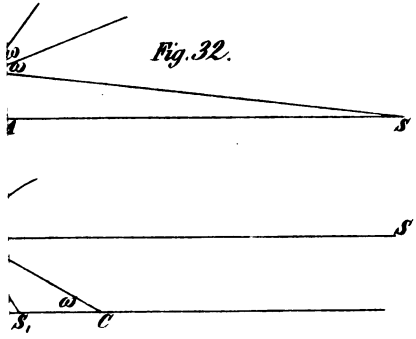
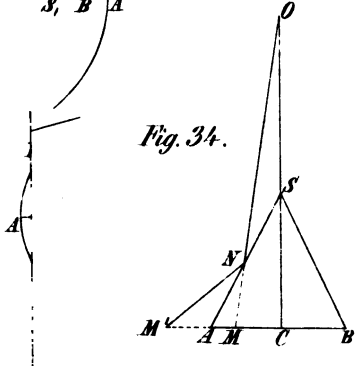


Fig. 34.



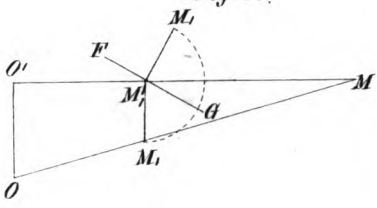
s. Taf. III. Fig. 30. — Fig. 34.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 37.

Fig. 37.*



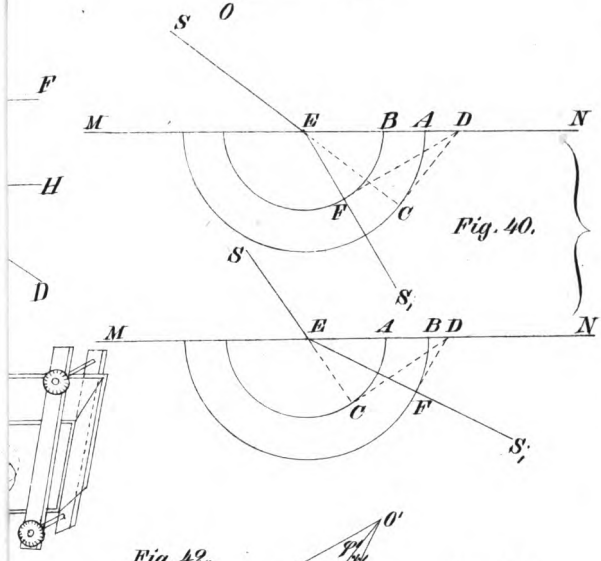


Fig. 40.

Fig. 42.

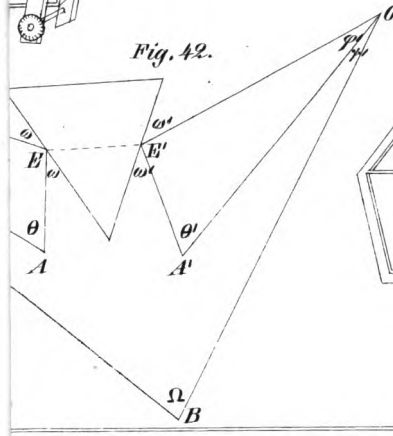


Fig. 44.

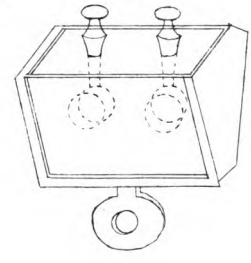
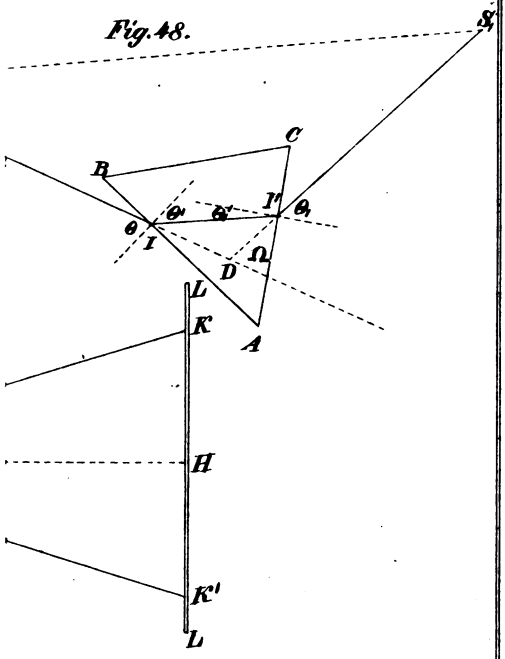


Fig. 35. — Fig. 45.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 48.



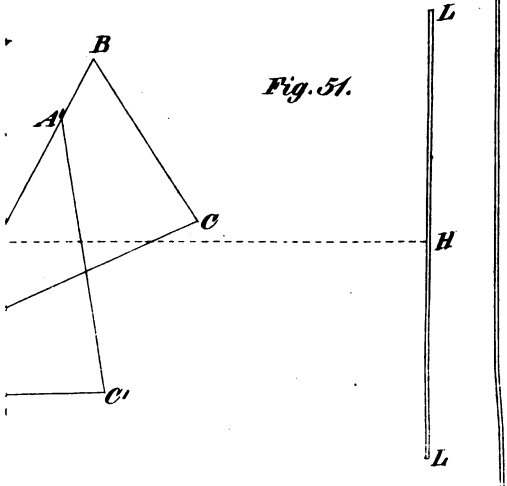


Fig. 51.

Fig. 46. – Fig. 51.

Digitized by Google

Digitized by Google

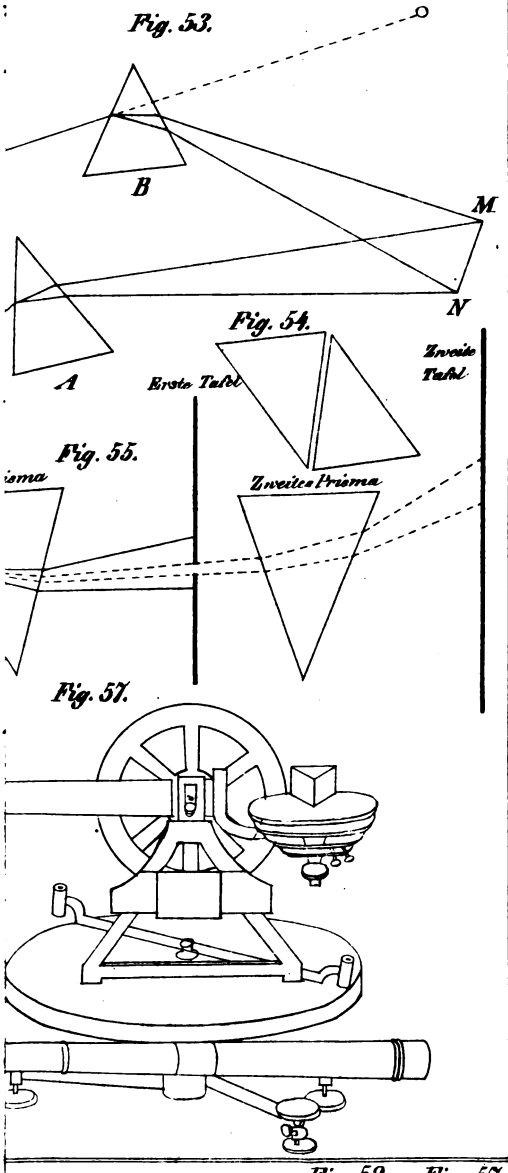


Fig. 52. — Fig. 57.

Digitized by Google

Digitized by Google

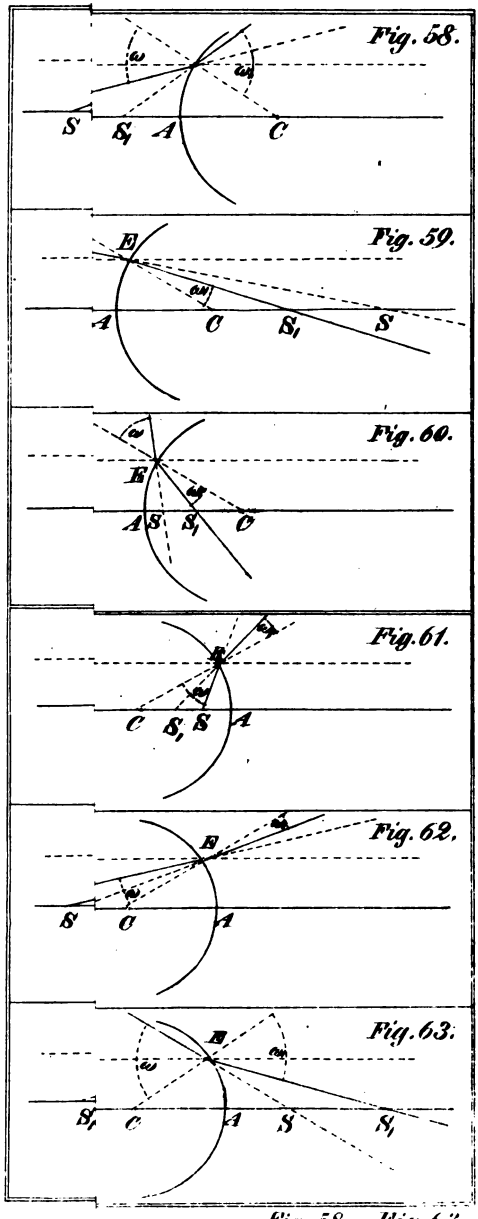


Fig. 58. — Fig. 63.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 67.

Fig. 70.

r. 69.

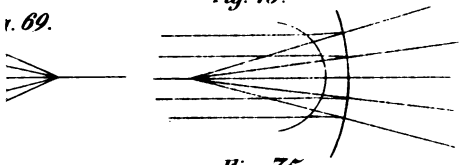


Fig. 75.

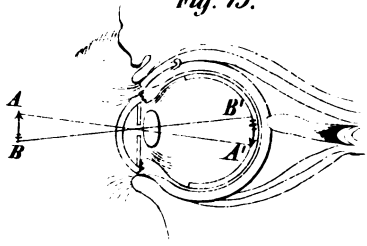


Fig. 77.

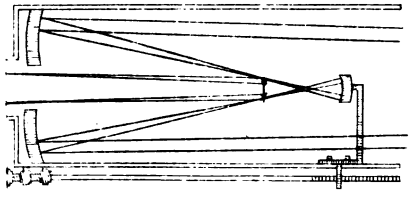


Fig. 81.

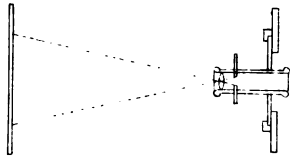


Fig. 78. Fig. 79 s. Taf. X. Fig. 80 81.

Digitized by Google

Digitized by Google

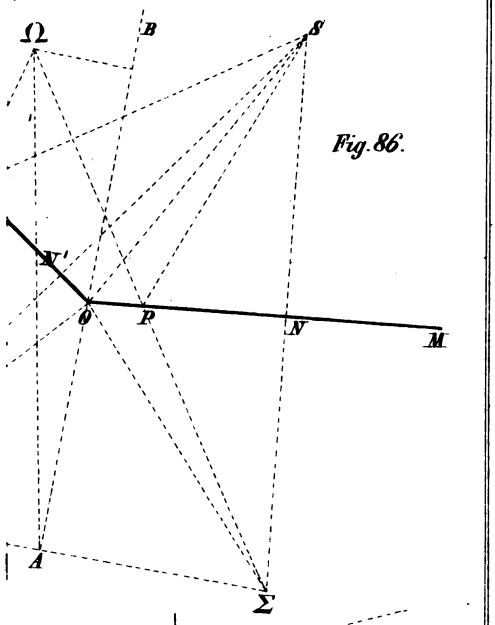
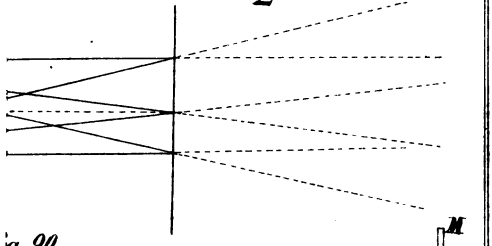


Fig. 86.



g. 90.

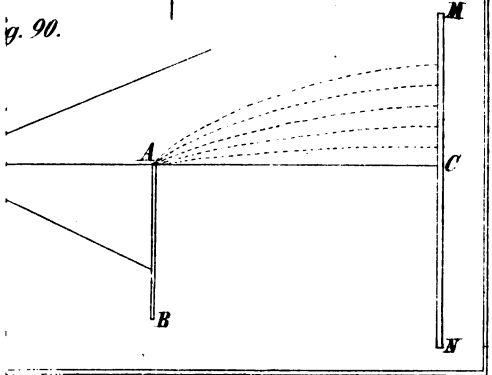


Fig. 79. Fig. 82 – Fig. 90.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 48.

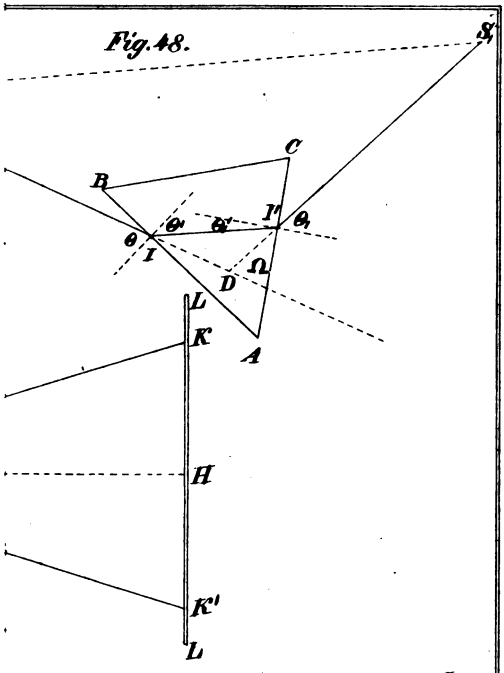


Fig. 51.

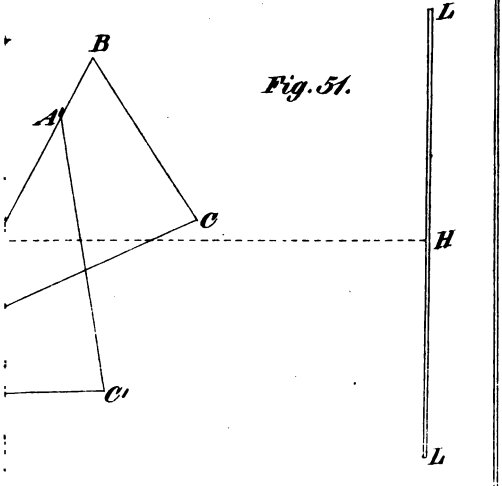


Fig. 46. – Fig. 51.

Digitized by Google

Digitized by Google

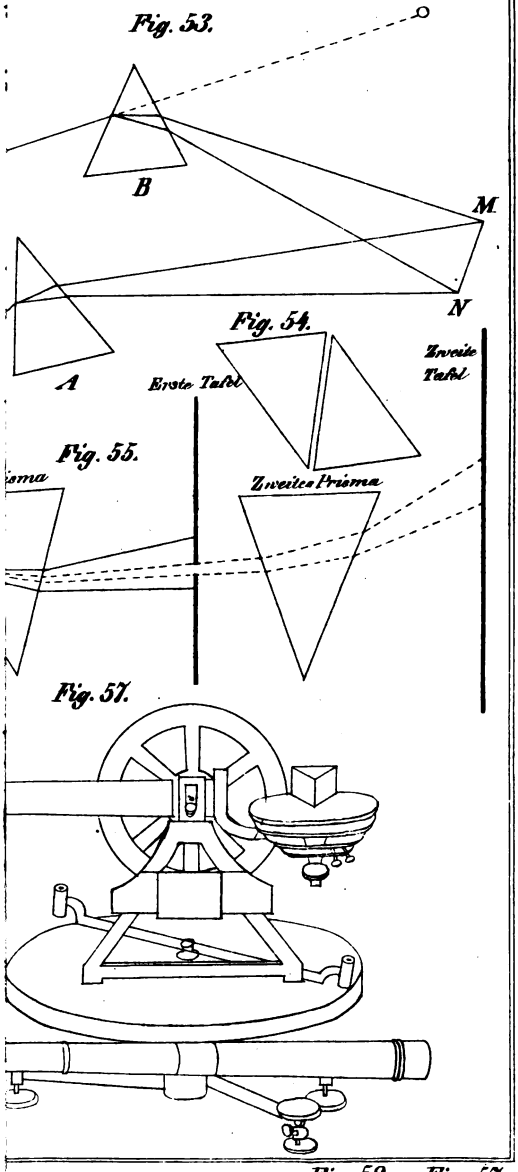


Fig. 52. — Fig. 57.

Digitized by Google

Digitized by Google

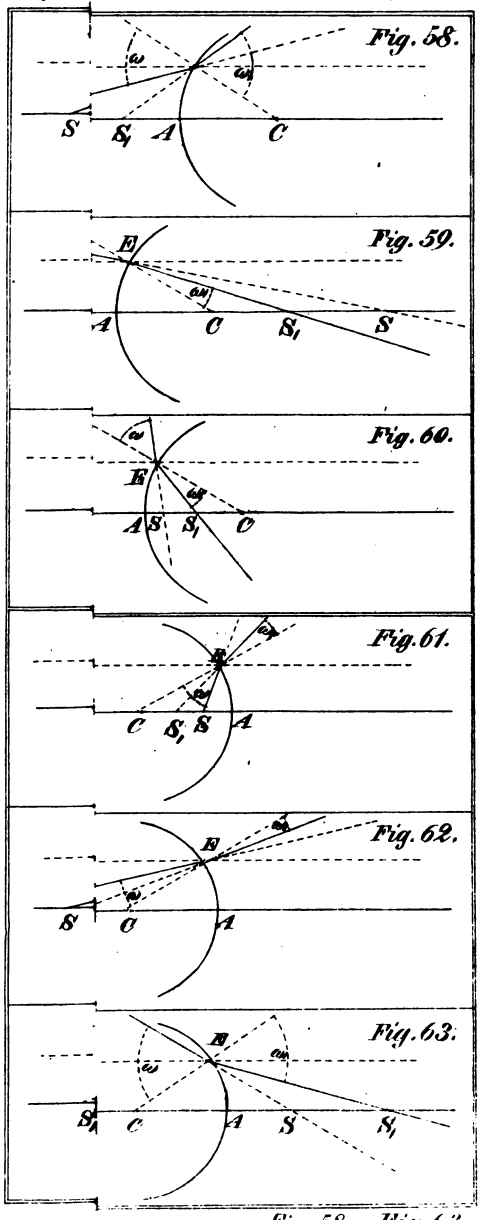


Fig. 58. — Fig. 63.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 67.

Fig. 70.

v. 69.

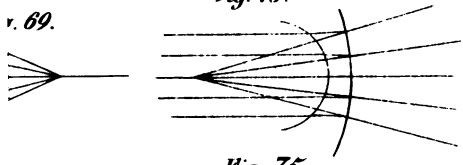


Fig. 75.

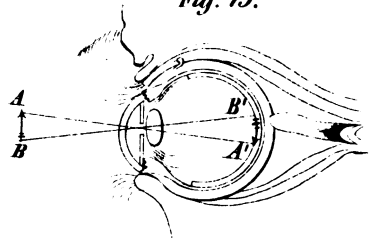


Fig. 77.

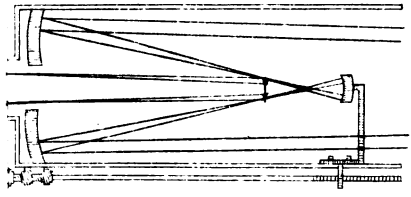


Fig. 81.

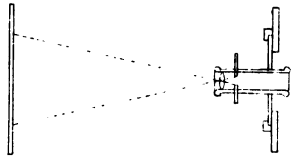


Fig. 78. Fig. 79 s. Taf. X. Fig. 80 81.

Digitized by Google

Digitized by Google

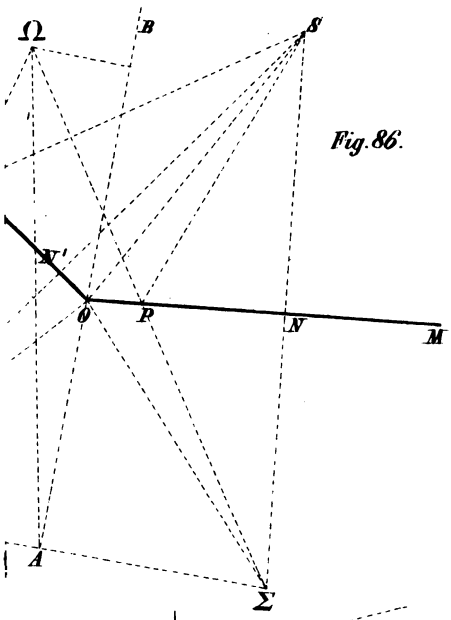
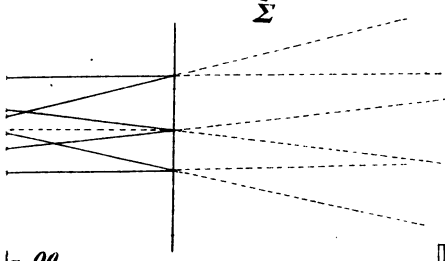


Fig. 86.



g. 90.

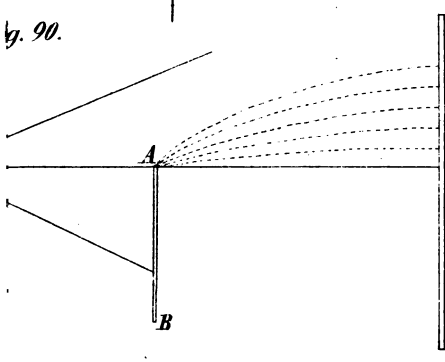


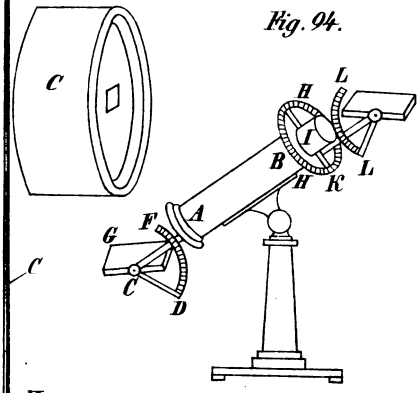
Fig. 79. Fig. 82 Fig. 90.

Digitized by Google

Digitized by Google

93.

Fig. 94.



N

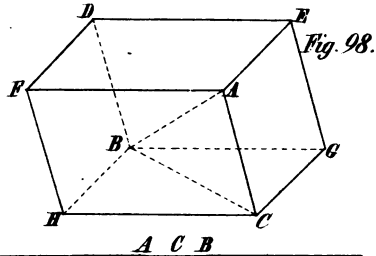


Fig. 98.

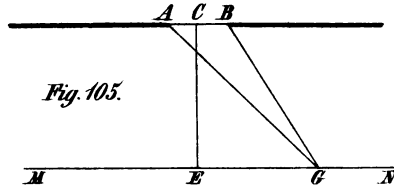


Fig. 105.

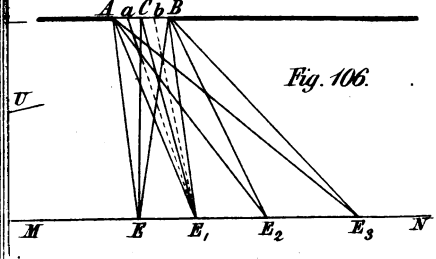


Fig. 106.

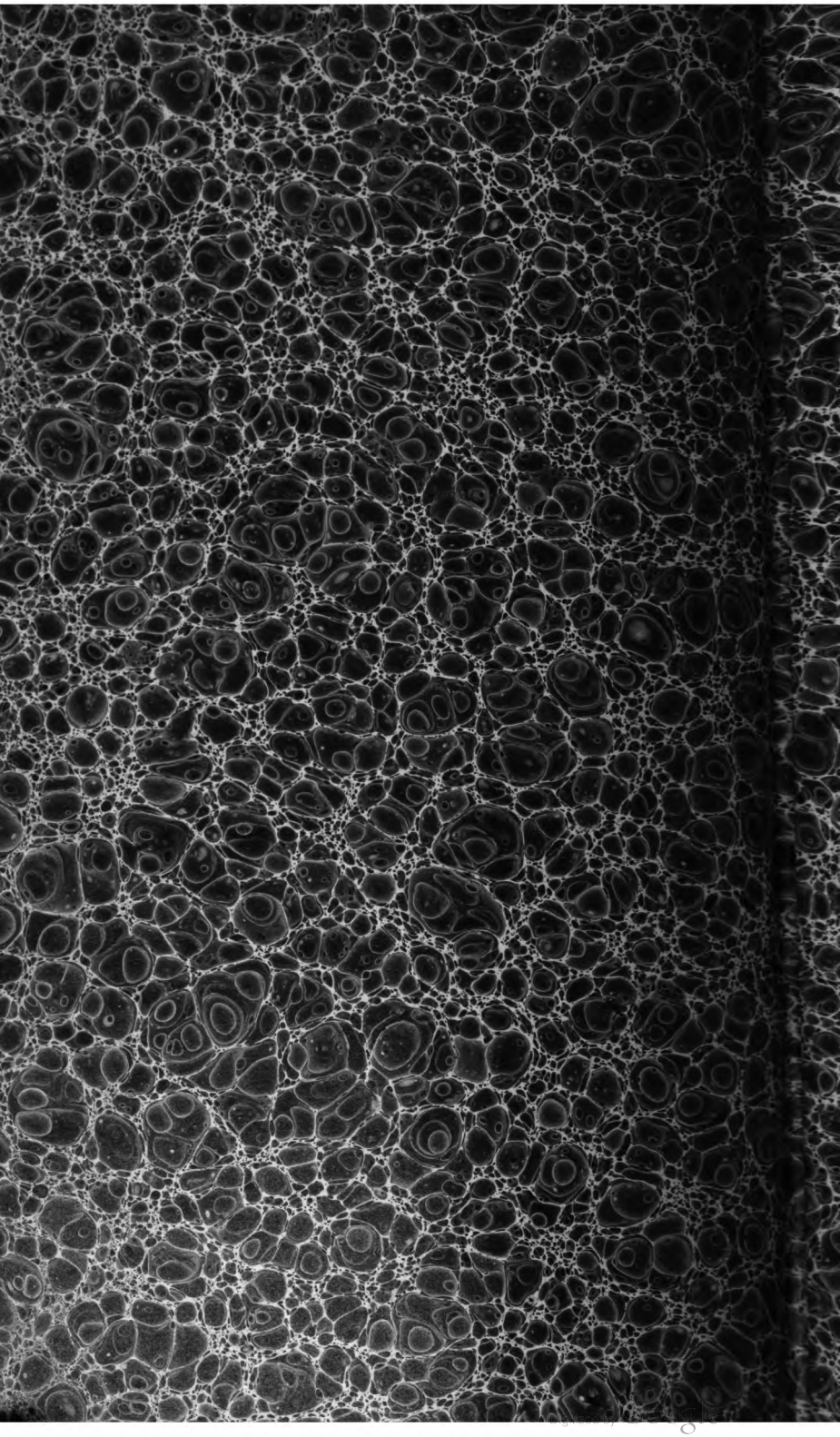
U

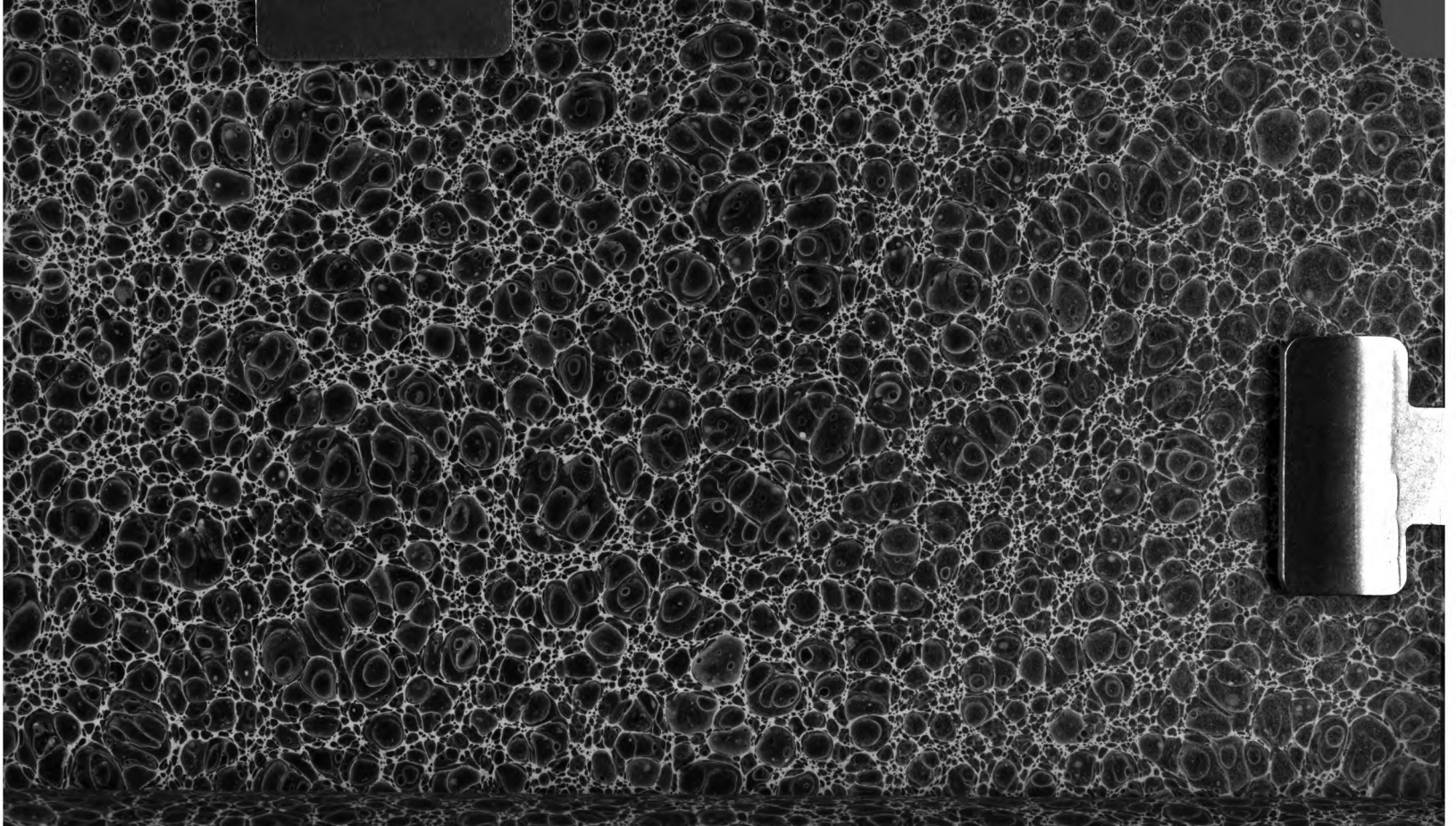
Fig. 91 – Fig. 106.

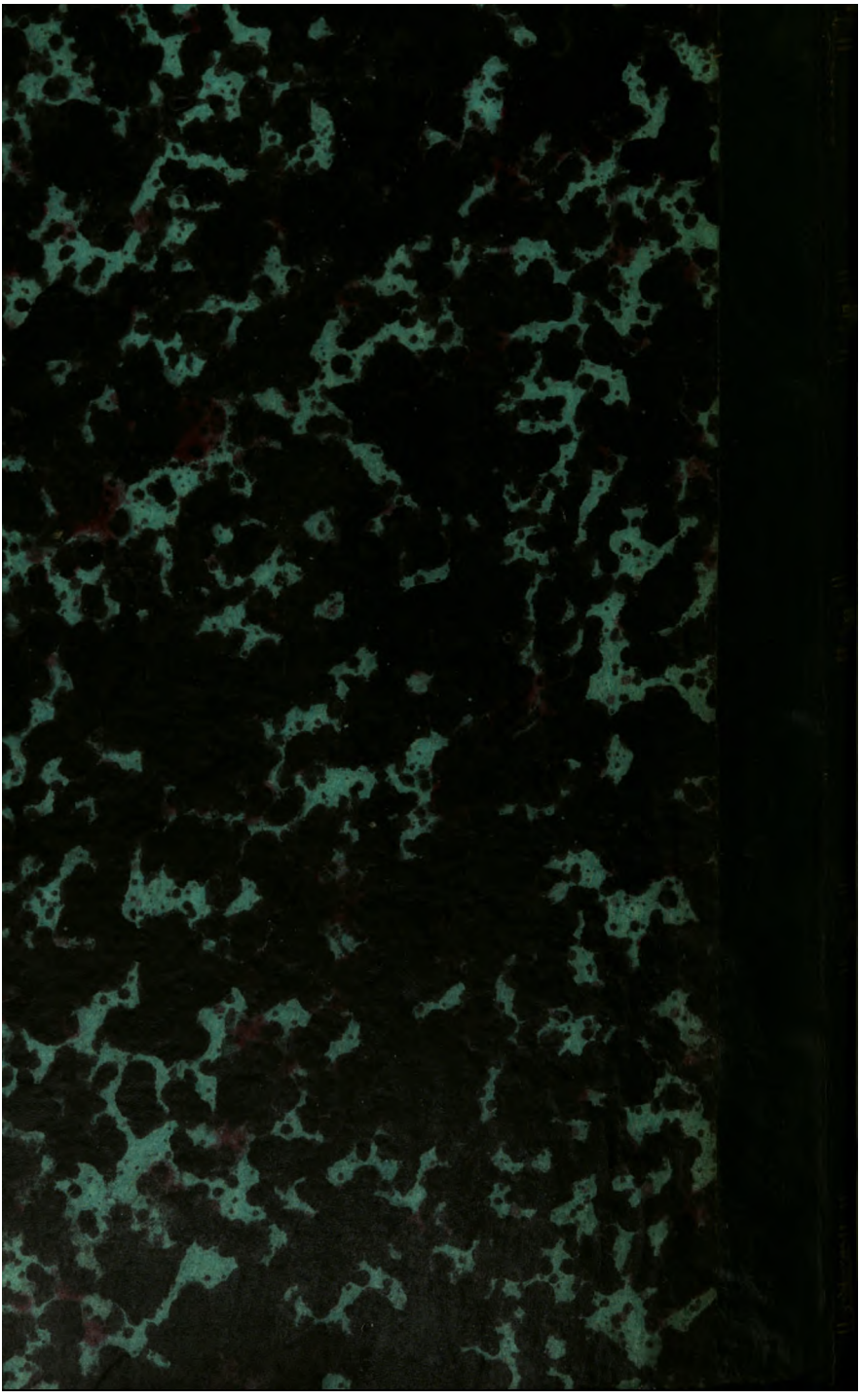
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google







Digitized by Google